Kapitola 4

Dynamika hmotného bodu 2018-04-07

4.1 Předmět

Stav {*state*} soustavy je určen tím, že známe polohu a rychlost každé její části; jejich změnu v čase nazýváme **pohyb** {*motion*} soustavy. Těleso nezanedbatelných vlastních rozměrů se také může deformovat a měnit svou dosavadní orientaci v prostoru (otáčení neboli rotace). Zatímco kinematika se zabývala jen *popisem* pohybu soustavy, **dynamika** se zabývá *příčinou* pohybu, zejména jeho *změny*.

Připomeňme, že pohyb je relativní, tedy že jeho popis je vázán na zvolenou *vztažnou soustavu*. Příčinu změny pohybu hledáme v interakci (vzájemném působení) mezi tělesy (nebo tělesem a okolním silovým polem) a v klasické vektorové (newtonovské) mechanice ji popisujeme pojmem **síla**. V analytické mechanice studujeme navíc samostatně i **vazby** a namísto sil mezi tělesy se staráme o energii soustavy jako celku.

Dřívější představy (před Newtonem) byly jiné: podle Aristotela mají předměty svá přirozená místa v přírodě (země jevdole, nad ní je voda, ještě výše vzduch, nejvýše oheň) a tato místa se snaží zaujmout.

Speciálním případem dynamiky je **statika** {*statics*}. Ta se zabývá soustavami v rovnováze, např. zkoumá, jaké musí být síly mezi tělesy, aby soustava tělesy tvořená byla a zůstávala v rovnováze.

4.2 Základní veličiny dynamiky hmotného bodu

K poloze $\vec{r}$ (kap. 3.2.2), rychlosti $\vec{v}$ (kap. 3.2.5) a zrychlení $\vec{a}$ (kap. 3.2.6) známým z kinematiky přibudou veličiny spjaté s hmotností.

Hmotnost m {*mass*} je jedním ze základních atributů hmotných objektů. Vždy platí $m \geq 0$. Hmotnost tělesa se zpravidla uvažuje v čase neproměnná: $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{m} = 0$. U soustavy s proměnnou hmotností je nutno také zadat, jakou má mizející nebo přibývající hmota hybnost. Např. padající a odpařující se kapka vody ztrácí s hmotou nejen hmotnost, ale i hybnost (odpařující se molekuly mají střední počáteční rychlost rovnou rychlosti kapky), zatímco nabývající kapka deště získává s vodou kondenzující z okolí hmotnost, nikoli však hybnost (střední rychlost kondenzujících molekul je nulová vůči okolí, nikoli vůči pohybující se kapce).

Hmotnost je v nerelativistické fyzice aditivní a absolutní (nezávislá na volbě vztažné soustavy).

Hybnost $\vec{p}$ {*momentum*} je definovaná pro částici jako součin hmotnosti m a rychlosti $\vec{v}$

$$\vec{p} := m\vec{v} \quad . \tag{4.1}$$

Je to aditivní vektorová veličina a je relativní, tj. závislá na volbě vztažné soustavy. Je rovněž „**mírou pohybu**“ tělesa (další mírou pohybu je např. kinetická energie).

Nepůsobí-li na soustavu vnější síly $\vec{F}$ (nebo je-li jejich výslednice $\vec{F}_\Sigma$ nulová), pak se celková hybnost soustavy zachovává (zákon zachování hybnosti).

Hybnost lze zobecnit i na některá pole (např. elektromagnetické).

V teorii relativity se zavádí relativistická čtyřhybnost, kap. 8.7.6, analogických vlastností.

Síla $\vec{F}$ {*force*} popisuje **interakci** dvou těles nebo tělesa s polem; občas ji pro zdůraznění nazýváme skutečná síla, pravá síla apod.

Naproti tomu „síly“ kinematické (neboli setrvačné, fiktivní, zdánlivé atp.), např. odstředivá, Coriolisova, unášivá, jsou jen pomocné členy doplněné do pohybové rovnice (tj. do 2. Newtonova zákona, $m\vec{a} = \vec{F}_\Sigma$), aby zákon „platil“ (= souhlasil s měřením v „nevhodné“ vztažné soustavě, kde naměříme jiné zrychlení $\vec{a}$). Viz dále kap. 6.

Síla je aditivní vektorová veličina a je absolutní, tj. nezávislá na volbě vztažné soustavy (na té ovšem závisí *rozklad* síly na složky).

Součet všech sil působících na těleso nazýváme **výslednicí** {*net force*}; zde ji značíme stručně $\vec{F}_\Sigma$. O síle a příbuzných veličinách jsme se již zmínili v kap. 2.3.3.

4.2.1 Síla: různé typy klasifikace

Toto se neučte. Nebudu zkoušet vaši mechanickou či optickou paměť tím, že bych po vás chtěl vyjmenovat následující nesystematický a neúplný výčet. Je ale nutné si uvědomit, že existují různá kritéria a není pak rozumné je míchat stylem „Klobouky dělíme na slaměné, dámské a žluté.“.

- podle původu (typ interakce):
  - síla gravitační
  - síla tíhová
  - síla elektromagnetická
  - síla třecí
  - …
- podle vztažné soustavy, v níž systém popisujeme:
  - síly skutečné (interakce mezi tělesy nebo tělesem a polem)
  - síly kinematické = setrvačné, zdánlivé, fiktivní, … (výrazy kompenzující použití neinerciální vztažné soustavy)
- podle geometrie dráhy (volná částice):
  - síla tečná (k dráze částice) – způsobí změnu velikosti rychlosti (a tím změnu energie)
  - síla normálová (k dráze částice) – způsobí změnu směru pohybu (zakřivuje trajektorii)
- podle geometrie zadání úlohy (částice vázaná na plochu):
  - síla tečná (k vazebné ploše): např. tření
  - síla normálová (k vazebné ploše): např. přítlačná síla
- podle způsobu přenosu dovnitř tělesa:
  - síly objemové (těleso v silovém poli): gravitace, elektromagnetická síla, …
  - síly plošné (přes povrch tělesa): síly kontaktní, vztlak v tekutině, …
- silové pole (rozložení v prostoru v rámci zkoumaného objektu):
  - *konstantní*: konstantní pole (silové, rychlostní) se zpravidla nazývá polem *homogenním*
  - *proměnné = nehomogenní*: je-li v rámci zkoumaného tělesa vnější silové pole dostatečně nehomogenní, pak rozdíl skutečných místních hodnot od vhodné střední hodnoty nazýváme **slapové síly** {*tidal force*}, případně jen **slapy** {*tides*}.

    Např. gravitační pole Měsíce či Slunce takto působí na rozlehlou Zemi s vodami a atmosférou na povrchu. U pole přitažlivé síly tedy slapy „natahují“ těleso v radiálním směru.

4.3 Silový diagram

V praktických úlohách budeme často sledovat síly působící mezi soustavou tuhých těles: třeba míč ležící na stole stojícím na Zemi. Namalujme si vždy náčrtek – obrázek, abychom rozuměli dobře, o co jde, a vedle vytvoříme **silový diagram** zobrazující všechny síly působící na zkoumané těleso. Takto zanesené síly můžeme pak snadno graficky sečíst, abychom dostali výslednici $\vec{F}_\Sigma$ sil na dané těleso působících a mohli lépe formulovat pohybové rovnice.

4.4 Newtonovy pohybové zákony

4.4.1 Rámec: Newtonův absolutní prostor a čas (původní pojetí)

Newton postuluje existenci **absolutního prostoru** – poloha je v něm určena polohovým vektorem $\vec{r} \equiv (x, y, z)$, a **absolutního času** t). Zavádí je takto:

Newton – Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687): „Absolutní, skutečný a matematický čas plyne sám od sebe a díky své povaze rovnoměrně a bez ohledu na vnější objekty. Absolutní prostor je vzhledem ke své podstatě a bez ohledu na vnější objekty stále týž a nepohyblivý.“

Toto zavedení je názorné, ale fyzikálně sporné: vůči čemu je absolutní čas rovnoměrný a absolutní prostor nepohyblivý? V novějším pojetí klasické fyziky se absolutní prostor a absolutní čas neužívá. Všude nám místo něj stačí kterákoli inerciální soustava (IS, viz dále). Občas (při popularizaci) se místo IS užívá formulace typu „těleso je v klidu vůči **stálicím**“; míní se tím, že nerotuje. Jeho posuvný pohyb tím ovšem popsán není, zejména uvážíme-li, že se „stálice“ pohybují vůči sobě, a to slušnými rychlostmi.

4.4.2 Newtonovy pohybové zákony

Tyto zákony jsou základními pohybovými zákony klasické mechaniky.

- Přívlastek „pohybový“ se používá k jejich odlišení od Newtonova gravitačního zákona; zpravidla se však vynechává, užijeme-li řadové číslovky;
- Historicky se mluví o tělese, ale v současném (newtonovském) pojetí uvažujeme jen hmotný bod (částici, tedy těleso mající zanedbatelné vlastní rozměry a tvar). Formulace pro těleso konečných rozměrů by musela popisovat i jeho možné otáčení, což je ze současného pohledu zbytečná komplikace (třebaže Newton i o tomto uvažoval a do svých úvah zahrnoval). Nyní pokládáme za jednodušší nejprve formulovat mechaniku (jednoho) hmotného bodu, poté mechaniku soustavy hmotných bodů a až pak mechaniku tuhého tělesa coby speciální soustavy hmotných bodů spojených vazbami zaručujícími stálé vzdálenosti.

4.4.3 Nultý Newtonův zákon – (přísně tajný) zákon výslednice

Pozor!!! Nikde neříkejte, že jsem vám toto prozradil!!! Neví o něm nic ba ani sama sv. Wikipedie!!! Jeho číslování odpovídá obvyklému číslování u zákonů termodynamiky. Newton sám však ctil zákony natolik, že toto tvrzení uvedl jen coby korolár.

0NZ: Síly působící na tutéž částici se chovají jako vektory, zejména je lze sčítat. Výslednou sílu zpravidla nazýváme výslednicí (těchto sil).

Není to vůbec „samozřejmost“. Mimochodem, otočení v prostoru o konečný úhel (kap. 3.4) je také popsáno směrem v prostoru a velikostí, a ***není*** to vektor (dvě otočení nejsou komutativní)! Sčítání vektorů sil se na SŠ nazývá „skládání sil“.

4.4.4 První Newtonův zákon – zákon setrvačnosti (1NZ)

V historickém *Newtonově* pojetí je zákon formulován takto:

1NZ (klasicky): Každé těleso setrvává ve stavu klidu nebo rovnoměrného přímočarého pohybu, dokud není donuceno působením vnějších sil svůj stav změnit.

- Těleso konečných rozměrů může i bez působení vnějších sil též rotovat; proto je lépe hovořit o částici neboli hmotném bodu.

Tato formulace předpokládá existenci význačné vztažné soustavy („absolutní prostor a čas“), vůči níž mluvíme o klidu či pohybu; tuto soustavu však nelze konstruktivně zavést. Proto se v současném pojetí 1NZ často formuluje jinak, totiž jako *existenční výrok* na základě definice **inerciální soustavy** {*inertial frame*}, IS (lat. inertia, -æ, f. = setrvačnost).

Inerciální soustava *je vztažná soustava, v níž se volné hmotné body pohybují bez zrychlení.*

V současném *newtonovském* pojetí potom formulujeme 1NZ takto:

> *1NZ (nověji):* ***Existuje*** *inerciální vztažná soustava (IS).*

- Jde tedy o *existenční teorém* zaručující existenci jisté významné vztažné soustavy; v ní budeme formulovat všechny další zákony.
- Tím mj. padá námitka E. Macha, že 1NZ je důsledkem 2NZ pro $\vec{F}_\Sigma = \sum \vec{F} = \vec{0}$.

Z definice je zřejmé, že IS není jediná: IS je i každá jiná IS', která se vůči IS pohybuje bez zrychlení (a bez otáčení). Neinerciální je však každá vztažná soustava, která se vůči některé IS pohybuje se zrychlením (nebo se vůči ní otáčí, což implikuje zrychlení bodů mimo osu otáčení).

4.4.5 Druhý Newtonův zákon – zákon síly (2NZ)

> *2NZ: Časová změna hybnosti částice je rovna výslednici $\vec{F}_\Sigma$ sil na ni působících.*

Jako obvykle, „časovou změnu" vystihneme matematicky derivací podle času, tedy

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_\Sigma \quad . \tag{4.2}$$

- Protože hmotnost m částice je v nerelativistické mechanice stálá, platí též

$$m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_\Sigma \quad . \tag{4.3}$$

- Ani hmotnost, ani síla nezávisejí na volbě vztažné soustavy, ale zrychlení (odvozené od polohy) na ní obecně závisí; v tom smyslu lze prohlásit, že 2NZ je platný jen v inerciální vztažné soustavě. Aby formálně platil i při měření v neinerciálních soustavách, lze doplnit k působícím silám ještě tzv. „setrvačné síly" kompenzující rozdíly vzniklé měřením v neinerciální soustavě. Ty budou vyloženy později v samostatné kap. 6.
- Jak zjistíme později (rov. (7.12)), 2NZ platí i pro těleso konečných rozměrů: časová změna úhrnné hybnosti tělesa je rovna úhrnné síle, což je zostřeno 1. větou o hybnosti (1. impulzová věta) na úhrnnou *vnější* sílu (protože součet všech vnitřních sil je díky 3NZ nulový).

4.4.6 Třetí Newtonův zákon – zákon akce a reakce (3NZ)

> *3NZ: Působí-li těleso $\mathcal{T}_1$ na těleso $\mathcal{T}_2$ silou $\vec{F}_{12}$, pak i těleso $\mathcal{T}_2$ působí na těleso $\mathcal{T}_1$ silou; označíme-li ji $\vec{F}_{21}$, pak platí $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.*

- Síla se v rovnosti chápe jako volný vektor, tj. bez ohledu na umístění (na „působiště síly").
- Zákon má smysl i platnost nejen pro hmotné body, ale i pro tělesa konečných rozměrů, uvažujeme-li síly jako volné vektory, bez umístění.
- Zákon platí jen pro skutečné síly. Není použitelný na „setrvačné síly" (ty nepopisují vzájemné působení těles).
- Akce a reakce vystupují plně symetricky: současně vznikají, trvají a zanikají. Je jedno, kterou ze sil $\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{21}$ pojmenujeme akcí; ta druhá bude reakce. Proto *nesouvisejí* s filozofickými kategoriemi příčiny (akce) a důsledku (reakce).
- $\hookleftarrow$Zákon platí i pro *necentrální síly* (např. mezi dipóly).

- $\hookleftarrow$Zákon akce a reakce vypovídá jen o silách, nikoli o silových dvojicích; působí-li těleso $\mathcal{T}_i$ na těleso $\mathcal{T}_k$ také silovou dvojicí $\vec{M}_{ik}$, je obecně $\vec{M}_{ik} \neq \vec{M}_{ki}$.
- Zdůrazněme, že obě síly působí vždy na *různé* objekty: akce $\vec{F}_{12}$ na těleso $\mathcal{T}_2$, reakce $\vec{F}_{21}$ na těleso $\mathcal{T}_1$. Jsou-li tělesa v dotyku, pak obě síly působí v tomtéž bodě (v bodě dotyku), ovšem opět na různá tělesa. Proto je většinou nemá smysl sčítat.
(Má to smysl jen tehdy, uvažujeme-li obě interagující tělesa za součást jednoho objektu, v němž pak jde o vnitřní síly.)
- Při působení na dálku je nutno předpokládat okamžité působení na dálku (např. klasická, nerelativistická gravitace). Použijeme-li však jako prostředníka síly *pole* (např. elektromagnetické), v němž se šíří signály konečnou rychlostí, pak je nutno připsat tomuto poli i hybnost, energii a moment hybnosti.

4.5 Princip relativity; Galileo, Einstein

Mechanický princip relativity (též: **Galileův princip relativity**) znal a formuloval Galileo ještě před Newtonem. Řečeno naší terminologii, zní takto:

Mechanické jevy probíhají stejně ve všech inerciálních soustavách. (Galileo)

Galileo popisuje, jak na lodi v kajutě za staženými záclonami nerozeznáme mechanickými pokusy – lití čaje, let komárů –, zda loď stojí (vůči břehu), nebo zda se pohybuje rovnoměrně přímočaře. Urychlený pohyb však poznáme.

Na základě mechanických dějů tedy není důvod dávat nějaké IS přednost před jinou, a proto na základě mechanických dějů nelze ani rozlišit, která z IS je absolutní prostor a čas. Zdálo by se, že nemechanickými ději (elektromagnetismus, světlo) by to mohlo jít, ale v praxi se to také nepodařilo, viz speciální teorie relativity (STR), kap. 8.

Princip relativity je ekvivalentní s výrokem, že pohybové rovnice (2NZ) jsou invariantní vůči příslušné transformaci mezi inerciálními soustavami $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$. Mají-li tyto soustavy rovnoběžné odpovídající osy a jestliže

- jistá událost B má v $\mathcal{S}$ souřadnice $\vec{r}, t$
- táž událost B má v $\mathcal{S}'$ souřadnice $\vec{r}\,', t'$
- $\mathcal{S}'$ má vůči $\mathcal{S}$ rychlost $\vec{V}$,

pak platí:

$$\vec{r}\,' - \vec{r}\,'_0 = (\vec{r} - \vec{r}_0) - \vec{V}(t - t_0) \qquad \text{(Galileova transformace)} \tag{4.4}$$
$$t' - t'_0 = t - t_0 \quad , \tag{4.5}$$

resp. při takové **synchronizaci** {*synchronisation*} soustav, že událost $\{\vec{0}, 0\}'$, tj. $(\vec{r}\,' = \vec{0})\,\&\,(t' = 0)$, je shodná s událostí $\{\vec{0}, 0\}$, tj. $(\vec{r} = \vec{0})\,\&\,(t = 0)$, platí pro všechny události $\mathrm{U} \equiv \{\vec{r}, t\} = \{\vec{r}\,', t'\}'$

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{V}t \qquad \text{(Galileova transformace)} \tag{4.6}$$
$$t' = t \quad . \tag{4.7}$$

(Einsteinův) princip relativity, **speciální princip relativity** {*special principle of relativity*} zobecňuje tento zákon na *všechny* fyzikální jevy:

Všechny fyzikální jevy probíhají stejně ve všech inerciálních soustavách.

Aby však byl splněn i pro elektromagnetické jevy (světlo, Maxwellovy rovnice), nemůže platit transformace ve tvaru rov. (4.6) a je nutno přijmout transformaci Lorentzovu, viz kap. 8. Einsteinova interpretace (nyní běžně přijímaná) jde ještě dále tím, že opouští samostatné pojmy prostor a čas a zavádí místo nich prostoročas.

4.6 Další příbuzné mechanické veličiny

Silovým polem $\vec{F}(\vec{r})$ {*force field*} nazýváme prostor, kde v nějaké oblasti Ω působí síla $\vec{F}(\vec{r})$; přitom $\vec{r} \in \Omega$ (viz kap. 2.3.3).

Hustota síly $\vec{f}(\vec{r})$ {*force density*} je definována tak, aby úhrnná síla $\mathrm{d}\vec{F}$ působící na prostorový element $\mathrm{d}\Omega$ o objemu $\mathrm{d}V$ byla rovna $\mathrm{d}\vec{F} = \vec{f}\mathrm{d}V$ (viz obecněji kap. 2.3.2).

Intenzita pole $\vec{I}$ je síla působící na „jednotkovou testovací částici“ (podrobněji viz kap. 4.7).

Moment síly $\vec{M}$ **(vůči bodu)** {*moment*},{*moment of force*} nazývaný též **točivost** {*torque*}

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{4.8}$$

je aditivní (pseudo)vektorová veličina užívaná v dynamice tuhého tělesa (i ve statice). Referenčním bodem pro polohový vektor $\vec{r}$ je zpravidla počátek souřadnic.

Moment hybnosti $\vec{b}$ **(vůči bodu)** {*moment of momentum*} {*angular momentum*} je definován jako

$$\vec{b} = \vec{r} \times \vec{p} \quad . \tag{4.9}$$

Je to (pseudo)vektorová, aditivní veliina. Obecně zavádíme moment pro vektorovou veličinu takto:

Moment vektorové veličiny je rameno vektorově vynásobeno touto veličinou.

Rameno se měří od počátku souřadnic k bodu umístění veličiny (u síly k jejímu působišti).

Platí věta analogická 2NZ, ale s momentem hybnosti a momenty sil:

Časová změna momentu hybnosti je rovna součtu momentů sil (= momentu výslednice sil).

Dokážeme ji snadno:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{\vec{v} \ \times \vec{p}}_{=0} + \vec{r} \times \dot{p} = \vec{r} \times \sum \vec{F} = \sum (\vec{r} \times \vec{F}) \tag{4.10}$$

protože $\vec{v} \times \vec{p} = m\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Věta platí po vhodném zobecnění i pro tělesa konečných rozměrů a patří mezi základní pohybové rovnice tuhého tělesa (kap. 7.5).

Impulz síly $\vec{J}$ {*impulse*} je aditivní vektorová veličina definovaná jako

$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\mathrm{d}t \quad . \tag{4.11}$$

Způsobí přírůstek hybnosti: $\vec{J} = \vec{p}_\mathrm{f} - \vec{p}_\mathrm{i}$. Je výhodný např. při studiu srážek, kap. C. Popisuje *časový* účinek síly (na rozdíl od práce, která popisuje *dráhový* účinek síly a způsobí přírůstek energie).

4.7 Práce, energie

Motivace: V dobách vlády absolutního prostoru a času byla vznesena otázka, čím vyjádřit „míru pohybu“; zda hybností $\vec{p} = m\vec{v}$, či „**živou silou**“ mv^2 (lat.{*vis viva*}, dvojnásobek kinetické energie). Šlo o nedorozumění, jde totiž o dvojí pohled na účinek síly – dráhový či časový.

Potenciálová síla; **potenciální energie** Sílu $\vec{F}$ nazýváme **potenciálovou** {*potential*}, pokud existuje skalární funkce $U(\vec{r})$ (zvaná **potenciální energie**, též **polohová energie**) taková, že

$$\vec{F} = -\mathbf{grad}\, U \qquad \text{neboli} \tag{4.12}$$

$$F_i = -\partial_i U \qquad \text{neboli} \tag{4.13}$$

$$\vec{F}(x,y,z) = -\left\{\frac{\partial U}{\partial x};\ \frac{\partial U}{\partial y};\ \frac{\partial U}{\partial z}\right\} \tag{4.14}$$

Ne každá síla je potenciálová (taky ne každou trojici funkcí – kartézských složek síly – lze vyjádřit jedinou funkcí skalární). Určitě to nejde u sil závislých nejen na poloze, ale i na rychlosti částice (např. síla tření nebo magnetická Lorentzova síla $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$). Jsou ale i jiné jednoduché příklady, např. síla

$$\vec{F}(x, y, z) = \{1;\ 0;\ y\} \tag{4.15}$$

není potenciálová (protože forma $\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 1 \cdot \mathrm{d}x + 0 \cdot \mathrm{d}y + y \cdot \mathrm{d}z = \mathrm{d}x + y\mathrm{d}z$ není integrabilní).

Intenzitu $\vec{I}$ zavádíme, je-li testovaná síla $\vec{F}$ působící na zkusmé tělísko lineárně úměrná jeho vhodné charakteristice q. Pak

$$\vec{I} = \vec{F}/q \quad . \tag{4.16}$$

Ta už charakterizuje silové pole bez ohledu na „velikost" (tj. charakteristiku) zkusmého tělíska.
- Pro gravitační sílu $\vec{F}_\mathrm{g}$ působící na částici o hmotnosti m je intenzita $\vec{I} = \vec{F}_\mathrm{g}/m$.
- Pro tíhovou sílu $\vec{G}$ působící na částici o hmotnosti m je intenzita rovněž $\vec{I} = \vec{G}/m$.
- Pro elektrickou Coulombovu sílu $\vec{F}_\mathrm{e}$ působící na náboj q je elektrická intenzita $\vec{E} = \vec{F}_\mathrm{e}/q$.
- Pro oscilátor tvořený částicí na pružině $\vec{F} = -k\vec{r}$ nezávisí síla pružiny na žádné charakteristice částice a intenzita je totožná se sílou, $\vec{I} = \vec{F}$.

Potenciál φ {*potential*} zavedeme k intenzitě $\vec{I}$ podobně jako potenciální energii k síle:

$$\vec{I} = -\,\mathbf{grad}\,\varphi \qquad \text{neboli} \tag{4.17}$$

$$I_i = -\,\partial_i\varphi \qquad \text{neboli} \tag{4.18}$$

$$\vec{I}(x, y, z) = -\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x};\ \frac{\partial\varphi}{\partial y};\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\} \tag{4.19}$$

Ten pak stejně jako intenzita popisuje „samotné pole", bez ohledu na charakteristiku zkusmé částice.

Práce W {*work*}. Předpokládejme, že zkoumaná síla $\vec{F}$ působí na pohybující se částici po dobu $\mathrm{d}t$. Za tu dobu se posune částice o $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\,\mathrm{d}t$ a urazí dráhu $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\vec{r}|$. Zaveďme **elementární práci** coby *dráhový* účinek $đW$ síly působící na částici pohybující se po trajektorii při posunutí o $\mathrm{d}\vec{r}$:

$$đW = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F\mathrm{d}s\cos\alpha \quad , \tag{4.20}$$

kde α je úhel mezi směrem síly a tečnou k trajektorii částice.

$\hookleftarrow$ Značka đ, přeškrtnuté „d", znamená, že jde o lineární kombinaci diferenciálů, ale výsledek nemusí být sám diferenciál, tj. nemusí existovat nějaká funkce W, jejímž diferenciálem by pak tento výraz byl.

Pro potenciálovou sílu lze elementární práci $đW$ upravit takto:

$$đW = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v}\,\mathrm{d}t = -\mathbf{grad}\,U \cdot \mathrm{d}\vec{v}\,\mathrm{d}t \tag{4.21}$$

$$= -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t \tag{4.22}$$

$$= -\mathrm{d}U \tag{4.23}$$

neboli elementární práce vykonaná *potenciálovou* silou je totálním diferenciálem a je rovna úbytku potenciální energie částice. Obvyklé čtení je „Práce se konala na účet potenciální energie částice v silovém poli".

Konečná (nikoli elementární) práce W však obecně závisí na trajektorii Γ (nejenom na krajních polohách), je to tedy *dějová veličina* (nikoli *stavová veličina*).

$$W = \int_\Gamma đW \equiv \int_\Gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\Gamma\,(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \equiv \int_{\Gamma\,\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{4.24}$$

Práce je veličina téhož druhu (a samozřejmě i rozměru) jako energie.

Výkon P {*power*} jsme poznali už v rov. (4.21), kde znamenal rychlost konání práce, resp. rychlost předávání energie:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \quad . \tag{4.25}$$

Nazývá se **výkon**, resp. **příkon** {*consumption*}, podle orientace toku energie vůči uvažovanému objektu).

4.7.1 Zákon zachování mechanické energie; konzervativní síla

Upravujme pohybovou rovnici (2NZ) takto:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\dot{\vec{v}} \qquad | \cdot \vec{v} \tag{4.26}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = m\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} = m\frac{1}{2}(\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}) \tag{4.27}$$

$$-\sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \quad . \tag{4.28}$$

Zavedeme-li vedle potenciální energie $E_\mathrm{p} = U$ částice v silovém pole ještě **kinetickou energii** $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$ pohybující se částice (též **pohybová energie**) a **celkovou mechanickou energii** $E = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p}$ částice, zjistíme, že platí

$$-\left(\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}E_\mathrm{k}}{\mathrm{d}t} \tag{4.29}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_\mathrm{p} + E_\mathrm{k}) = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{4.30}$$

$$E = E_\mathrm{p} + E_\mathrm{k} = \mathsf{konst} \tag{4.31}$$

tedy celková mechanická energie se při pohybu částice v potenciálovém silovém poli zachovává (**zákon zachování mechanické energie** {*law of conservation of energy*} v potenciálovém poli).

4.7.2 Konzervativní síly

Viděli jsme, že pro potenciálovou sílu $\vec{F}$ platí $đW = -\mathrm{d}U$, a tedy práce W vykonaná při pohybu z bodu (1) do (2) (tzn. z bodu o polohovém vektoru $\vec{r}_1$ do bodu o polohovém vektoru $\vec{r}_2$) je rovna $U_1 - U_2 = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2)$ a nezávisí tedy na tvaru trajektorie Γ spojující oba body. To nám také dává jednoduchou možnost konstruktivního nalezení potenciálu v jednom bodě vůči jinému, totiž spočíst práci při přechodu mezi těmito body po vhodné křivce.

Dále, práce konzervativní síly po uzavřené trajektorii je rovna nule:

$$W = \oint_\Gamma đW = 0 \tag{4.32}$$

pro libovolnou uzavřenou smyčku Γ. Pro konzervativní síly platí rovněž zákon zachování mechanické energie.

Každá síla, pro kterou platí zákon zachování mechanické energie ve smyslu rov. (4.32), se nazývá **konzervativní**. Tento pojem je *širší* než síla potenciálová: např. výše zmíněná Lorentzova magnetická síla $\vec{F}_\mathrm{m} = q\vec{v} \times \vec{B}$ potenciál nemá (závisí na rychlosti náboje), ale je konzervativní, protože má směr vždy kolmý k rychlosti nosiče náboje a může sice změnit směr letu nabité částice, ale nikoli velikost její rychlosti. Nemůže tedy ani změnit její kinetickou energii.

4.8 Tření

4.8.1 Klasifikace

Tření je v praxi velmi významný *jev* doprovázený nekonzervativní **třecí silou** {*friction*} (často rovněž stručně nazývanou **tření**) působící ve styčné ploše mezi dvěma tělesy proti směru pohybu (při kinematickém tření), resp. proti změně klidového stavu (při klidovém tření). Tření je makroskopickým projevem jednak deformací, jednak vyrovnávání vzájemných rychlostí v mikroskopických oblastech materiálu. Můžeme rozlišit několik podstatně rozdílných jevů:

smykové tření {*dry friction*}, též **suché tření**, ale obvykle jen **tření** {*friction*}, mezi dvěma pevnými tělesy klouzajícími po sobě;

valivý odpor {*rolling resistance*} pokud se jedno pevné těleso kutálí po druhém (tj. neklouže, takže místě styku jsou tělesa navzájem v klidu);

odpor prostředí mezi pevným tělesem a okolní tekutinou;

vnitřní tření {*internal friction*}, {*fluid friction*} uvnitř tekutiny.

4.8.2 Smykové tření

Uvažujme tuhé těleso T, které leží na tuhé podložce P; stýkají se podél třecí plochy. Na T působí jednak vnější výsledná síla $\vec{F}$ (zahrnující svislou tíži $\vec{G}$ a zpravidla další šikmé či vodorovné vtištěné síly), jednak odezva $\vec{R}$ podložky. Obě síly rozložíme na složky podle orientace vůči podložce: normálovou $\vec{F}_\mathrm{n}$ a tečnou $\vec{F}_\mathrm{t}$, resp. normálovou $\vec{R}_\mathrm{n}$ a tečnou $\vec{R}_\mathrm{t}$.

Předpokládáme, že těleso T zůstává na podložce a makroskopicky se neproboří[1]. Pak platí $\vec{F}_\mathrm{n} = -\vec{R}_\mathrm{n}$. Velikost $\vec{R}_\mathrm{n}$ je jistě omezená pevností podložky, předpokládáme však, že je dostatečná.

Pokud také $\vec{F}_\mathrm{t} = -\vec{R}_\mathrm{t}$, pak buď zůstává těleso T v klidu (jde o klidové tření, vzájemná rychlost $\vec{v} = \vec{0}$), nebo se pohybuje po podložce rovnoměrně přímočaře rychlostí o velikosti $v > 0$ (jde o tření za pohybu).

Pro $F_\mathrm{t} > R_\mathrm{t}$ těleso T klouže po podložce se zrychlením úměrným $\vec{F}_\mathrm{t} - \vec{R}_\mathrm{t}$.

Analogicky řešíme úlohy, kdy „podložka“ neleží pod tělesem, ale tře se o bok tělesa apod.

Rozlišujeme vždy dva různé případy:

- **tření za pohybu**, **kinematické**, dříve též **dynamické** {*kinetic friction*}, když pevné těleso již klouže rychlostí $v > 0$ po podložce. Třecí síla $\vec{R}_\mathrm{t}$ je málo závislá na vzájemné rychlosti, ale je zhruba úměrná normálové (přítlačné) síle $\vec{F}_\mathrm{n}$:

$$R_\mathrm{t} = \mu F_\mathrm{n} \tag{4.33}$$

  Nejde o rovnici vektorovou, protože obě síly mají různé směry!

  Činitel smykového tření μ bývá obvykle cca 0,1 až 0,7 podle kvality a materiálu povrchů.

- **klidové (statické) tření** {*static friction*}, pokud ještě nedošlo ke vzájemnému pohybu, $v = 0$:

$$R_\mathrm{t} \leq \mu_0 F_\mathrm{n} \tag{4.34}$$

  Činitel klidového tření μ_0 bývá o 20 % až 25 % větší než kinematický činitel μ_0.

Přes podobnost rov. (4.33) a (4.34) i blízkost hodnot μ, μ_0 se úlohy řeší úplně jinak, viz kap. 4.9.1 a kap. 4.9.2.

4.8.3 Valivý odpor

Valivý odpor {*rolling resistance*} (výstižnější termín než dřívější **valivé tření**) – objekt a okolí jsou vůči sobě v klidu. Typickým příkladem je válec o poloměru R valící se beze smyku po podložce.

$$F_\mathrm{t} = \xi \frac{F_\mathrm{n}}{R} = c_\mathrm{R} F_\mathrm{n} \tag{4.35}$$

Ani zde nejde o rovnici vektorovou. **Součinitel valivého odporu** ξ má rozměr *délky* (proto se nazývá **součinitel** {*coeffitient*}); bezrozměrová veličina $c_\mathrm{R} = \xi/R$ je **činitel valivého odporu** {*factor*}.

Fyzikálně mu porozumíme představou, že se v místě styku zdeformují válec i podložka do mělké jamky; v ní během valení už není odezva $\vec{R}$ podložky symetrická vůči svislé rovině procházející osou válce, ale posunutá dopředu o ξ a vytváří tak s tíží v ose valení silovou dvojici s momentem o velikosti $M = F_\mathrm{n}\xi$. Ten pak musí vyvážit tečná „tažná síla“ $\vec{F}_\mathrm{t}$ s ramenem o velikosti R a s momentem o velikosti $M = F_\mathrm{t} R$.

Valivý odpor je mnohem menší než vlečné tření, zejména jde-li o tvrdé materiály. Činitel c_R mívá hodnoty $c_\mathrm{R} = 0{,}001$ (kulička v ložisku) až $c_\mathrm{R} = 0{,}3$ (pneumatika na písku).

4.8.4 Vnitřní tření; odpor prostředí

Vnitřní tření v tekutině je dáno její viskozitou (vazkostí). Zabývá se jím (z hlediska tekutiny) mechanika kontinua. Z hlediska tělesa pohybujícího se v tekutině nás zajímá **odpor prostředí** kladený pohybujícímu se tělesu. Při pohybu tělesa v tekutině malou rychlostí obtéká tekutina těleso a proudí přitom laminárně. Odpor je dán vnitřním třením mezi jednotlivými vrstvami obtékající tekutiny, je úměrný viskozitě (vazkosti) tekutiny a je pro kouli o poloměru r mající rychlost v vůči tekutině s dynamickou viskozitou η dán Stokesovým vztahem

$$F = 6\pi\eta r v \quad ; \tag{4.36}$$

[1] Mikroskopicky ovšem nejde o roviny, ale drsné plochy, jejichž „hory“ a „doly“ do sebe zapadají, obrušují se ap.

obecněji

$$F = k\eta l v \quad , \tag{4.37}$$

kde l je **charakteristický rozměr** tělesa a činitel k charakterizuje jeho tvar, druh povrchu apod.

Při vyšších rychlostech kapalina proudí turbulentně, s víry, a odpor je úměrný energii podle **Newtonova vzorce** pro rovinnou desku o obsahu S pohybující se kapalinou kolmo ke své ploše:

$$F = \frac{1}{2} S \rho v^2 \quad . \tag{4.38}$$

Pro obecné těleso se zavádí navíc **činitel odporu** C charakterizující tvar, povahu povrchu atd..

4.9 Výpočty se započítáním tření

4.9.1 Tření za pohybu (kinetické)

Tato situace je jednodušší na zpracování. Uplatní se, pokud se již předmět pohybuje vůči podložce a my počítáme všechny síly, které ovlivňují jeho pohyb. Je-li přítlačná síla (což je normálová síla, složka výslednice sil do směru normály k povrchu) známa, je dynamickým činitelem tření jednoznačně určena velikost třecí síly; její směr je proti směru pohybu. Spočteme a přičteme k ostatním působícím silám.

4.9.2 Tření klidové

Tato situace je složitější. Uplatní se, pokud se předmět ještě nepohybuje vůči podložce a my počítáme, zda vydrží v klidu, nebo zda se „utrhne". Je-li přítlačná síla známa, pak statický činitel tření udává *nikoli* skutečnou třecí sílu, ale její největší možnou hodnotu F_{max}. Její směr není znám a nebude ani podstatný. Sečteme tedy všechny okolní síly kromě reakce podložky na výslednici $\sum \vec{F}$ a zjistíme její velikost a směr. Rozložíme ji do složky normálové (tu bude anulovat reakce podložky) a tečné; tu by měla – pro zachování stavu klidu – anulovat třecí síla. Na směru nezáleží, ale velikost musí být nanejvýš F_{max}; pak zůstane stav klidu zachován. Je-li však tečná složka výslednice větší, dá se předmět do pohybu a musíme počítat znova – tentokrát ovšem s dynamickým třením.