

Kapitola 5

Řešení pohybové rovnice: kmity

2017-04-12

5.1 Matematický aparát

5.1.1 Homogenní rovnice

Pohybová rovnice bývá v nejjednodušších případech *homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty*, tedy

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} = 0, \quad (5.1)$$

kde a_k jsou konstanty (obecně komplexní), N je řád diferenciální rovnice (v Newtonově zákoně $N = 2$) a $x(t)$ je neznámá funkce času – zpravidla souřadnice popisující pohyb částice.

Řešení rov. (5.1) hledáme ve tvaru

$$x(t) = e^{\lambda t}. \quad (5.2)$$

Dosazením do rov. (5.1) získáme

$$\left(\sum_{k=0}^N a_k \lambda^k \right) e^{\lambda t} = 0, \quad (5.3)$$

a protože $e^{\lambda t} \neq 0$, dostáváme **charakteristickou rovnici**

$$\sum_{k=0}^N a_k \lambda^k = 0, \quad (5.4)$$

která má obecně N kořenů λ_m , vedoucích na N řešení $e^{\lambda_m t}$. Obecné řešení rov. (5.1) je jejich lineární kombinace

$$x(t) = \sum_{m=0}^N C_m e^{\lambda_m t}, \quad (5.5)$$

kde (komplexní) konstanty C_m zvolíme tak, aby vyhovovaly *počátečním podmínkám* (obvykle podmínkám na x a všechny vyšší derivace v čase $t = 0$).

Pokud však některé kořeny splývají, např. je-li $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_K$, neboli K -násobný (také K -krát degenerovaný) kořen λ , bylo by $K > 1$ funkcí $e^{\lambda_k t}$ lineárně závislých. Místo nich jsou však řešením funkce $t^k e^{\lambda t}$ pro $k = 0, 1, \dots, K-1$. Řešením je tedy

$$x(t) = P^{K-1}(t) e^{\lambda t}, \quad (5.6)$$

kde $P^{K-1}(t)$ je polynom v proměnné t , jehož stupeň je roven $K-1$.

5.1.2 Nehomogenní rovnice

Pokud lineární diferenciální rovnice není homogenní, tj. pokud má tvar

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} = F(t), \quad (5.7)$$

pak

- vyřešíme nejprve v celé obecnosti rovnici homogenní;
- uhodneme libovolným způsobem jedno řešení rov. (5.7) (tzv. partikulární řešení);
- obecným řešením nehomogenní rovnice je pak součet tohoto partikulárního řešení a obecného řešení nehomogenní rovnice.

5.1.3 Pohybová rovnice – 2. Newtonův zákon

Budeme řešit pohybovou rovnici pro jednu částici o hmotnosti $m > 0$, nepodrobenou vazbám, na kterou působí výsledná vnější síla $\vec{F}_\Sigma = \vec{F}$. Pohybová rovnice má tvar

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}. \quad (5.8)$$

V jednorozměrných případech, kterými se budeme dále zabývat, má pohybová rovnice tvar

$$m\ddot{x} = F. \quad (5.9)$$

Tuto rovnici budeme v dalším řešit pro různé konkrétní tvary síly $F(x, t)$. Řešení uvažujeme pro $t \geq 0$, přičemž pro $t = 0$ máme zadány (reálné) počáteční podmínky:

$$\text{počáteční poloha} \quad x_0 = x|_{t=0} \quad (5.10)$$

$$\text{počáteční rychlost} \quad v_0 = v|_{t=0}. \quad (5.11)$$

5.2 Konkrétní tvary síly

5.2.1 Nulová síla: $F = 0$

Pokud na HB nepůsobí žádná výsledná síla (tedy pokud je výslednice $\vec{F}_\Sigma$ všech vnějších sil v příslušném směru nulová), má pohybové rovnice tvar

$$m\ddot{x} = 0. \quad (5.12)$$

Tuto rovnici dvakrát integrujeme, čímž dostaneme řešení

$$\ddot{x} = 0 \quad (5.13)$$

$$\dot{x} = v_0 \quad (5.14)$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t \quad (5.15)$$

odpovídající rovnoměrnému přímočarému pohybu (samozřejmě podél zvolené osy x) s rychlostí v_0 a počáteční polohou $x_{(t=0)} = x_0$.

5.2.2 Konstantní síla: $F = F_0$

Konstantní síla F_0 působící na HB mu uděluje konstantní zrychlení $a = F/m$. Pohybová rovnice

$$m\ddot{x} = F_0 \quad (5.16)$$

má rovněž zřejmé řešení (s toutéž interpretací x_0 a v_0)

$$\ddot{x} = \frac{F_0}{m} \quad (5.17)$$

$$\dot{x} = v_0 + \frac{F_0}{m}t \quad (5.18)$$

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}\frac{F_0}{m}t^2. \quad (5.19)$$

Znáмым příkladem je **volný pád** z výšky $z = h$. Počáteční rychlost je nulová ($v_0 = 0$), působící síla je $F_0 = -mg$ při obvyklé orientaci osy z vzhůru, takže řešení je

$$z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2. \quad (5.20)$$

Podobně **svislý vrh** z výšky $z = h_0$ vzhůru rychlostí $v_0 > 0$ má řešení

$$z(t) = h_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (5.21)$$

5.2.3 Netlumený harmonický oscilátor: $F = -kx$

Ve fyzice nazýváme harmonickým oscilátorem hmotný bod mající jistou rovnovážnou polohu x_r a podrobený síle, která ho při vychýlení vrací do této polohy, přičemž velikost síly je úměrná výchylce od rovnovážné polohy; koeficientem úměrnosti je **pružnost** $k > 0$. Zvolíme-li pro jednoduchost počátek osy x právě v bodě x_r , má síla tvar

$$F(x) = -kx, \quad (5.22)$$

a pohybová rovnice zní

$$m\ddot{x} = -kx. \quad (5.23)$$

Zapišeme ji v obvyklém anulovaném tvaru

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (5.24)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (5.25)$$

Protože platí $m > 0$ i $k > 0$, můžeme zavést

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}} > 0. \quad (5.26)$$

Obvyklým postupem hledáme řešení ve tvaru $e^{\lambda t}$, čímž dostaneme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \quad (5.27)$$

s řešením

$$\lambda = \pm i\omega_0 \quad (5.28)$$

Fyzikálně relevantní řešení je ovšem jen reálná funkce; můžeme ji zapsat kterýmkoli z dále uvedených tvarů, vždy se dvěma konstantami volitelnými podle počátečních podmínek (označení indexů 1, 2 u φ , t , C je libovolné). Okamžitá poloha je

$$x = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi_1) \quad (x_m, \varphi_1) \quad (5.29)$$

$$= x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \quad (x_m, \varphi_2) \quad (5.30)$$

$$= x_m \sin(\omega_0(t - t_1)) \quad (x_m, t_1) \quad (5.31)$$

$$= x_m \cos(\omega_0(t - t_2)) \quad (x_m, t_2) \quad (5.32)$$

$$= A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (A, B) \quad (5.33)$$

$$= \dots$$

$$= \Re C_{\pm} e^{\pm i\omega_0 t} \quad (\text{komplexní } C_{\pm} = C_{1\pm} + i C_{2\pm}) \quad (5.34)$$

V posledním případě se velmi často nepíše značka reálné části $\Re$ a rozumí se jaks automaticky, případně se připisuje „+ c.c.“, čímž se rozumí součet s komplexně sdruženým výrazem (slušelo by se doplnit $\frac{1}{2}$). Toto není problém při lineárních operacích; pozor je však potřeba dát tehdy, kdy potřebujeme např. druhou mocninu polohy či rychlosti, třeba pro výpočet energie.

Z časové závislosti polohy určíme snadno všechny ostatní fyzikální veličiny, např. podle rov. (5.30)

$$\text{rychlost } v = -x_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_2) \quad (5.35)$$

$$\text{zrychlení } a = -x_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2) = -\omega_0^2 x \quad (5.36)$$

Pro harmonické kmity se užívají následující termíny (formulované např. pro rov. (5.30)):

$$\text{amplituda} \quad x_m \quad (5.37)$$

$$\text{fáze} \quad \omega_0 t + \varphi_2 \quad (5.38)$$

$$\text{počáteční fáze} \quad \varphi_2 \quad (5.39)$$

$$\text{úhlová frekvence} \quad \omega_0 \quad (5.40)$$

$$\text{frekvence} \quad f = \omega_0 / 2\pi \quad (5.41)$$

$$\text{perioda} \quad T = 1/f \quad (5.42)$$

Synonyma: kruhová = úhlová; kmitočet = frekvence; doba kmitu = perioda. Někdy se místo „počáteční fáze“ užívá označení „fázová konstanta“. Není to moc vhodné, protože nejde o konstantu ve fyzikálním smyslu.

Připomeňme, že síla $F = -kx$ má **potenciál**

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2 + U_0 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 + U_0 \quad (5.43)$$

s libovolně zvolenou konstantou U_0 , protože platí $\vec{F} = -\text{grad } U$ (zde tedy $F = -dU/dx$). Odtud plyne, že se při pohybu harmonického oscilátoru zachovává celková mechanická energie.

Potenciál u síly pružnosti splývá s potenciální energií, protože síla pružnosti pružiny nezávisí na hmotnosti (náboji apod.) kmitajícího objektu.

Harmonický oscilátor se ve fyzice vyskytuje velice často, mj. jako první přiblížení pro chování soustavy (reprezentované HB) v blízkém okolí stabilní rovnováhy. Je to zřejmé z matematického hlediska: potenciál v místě x_r stabilní rovnováhy (zvolíme $x_r = 0$) musí nabývat minima. Je-li však potenciál v okolí nuly analytický, lze ho rozvinout v Taylorovu mocninnou řadu:

$$U(x) = U_0 + U_1 x + U_2 x^2 + \mathcal{O}(x^3) \quad (5.44)$$

Z podmínky extrému plyne $U_1 = 0$ (pro minimum navíc $U_2 > 0$), takže při zanedbání členů x^3 a vyšších dostáváme právě potenciál harmonického oscilátoru (rov. (5.43)). Nelze-li členy $\mathcal{O}(x^3)$ zanedbat (např. vyjde-li $U_2 = 0$), jde o *anharmonický oscilátor*.

Obvyklá realizace je např. závaží hmotnosti m upevněné na pružině s tuhostí k . Zde je však nutno zajistit nesnadnou podmínku, aby vlastní hmotnost m_P pružiny byla zanedbatelná vůči hmotnosti m zkoumané částice. V opačném případě nelze zanedbat setrvačnost pružiny (resp. jejích částí) oproti setrvačnosti částice a museli bychom zkoumat limitní případ $N \rightarrow \infty$ složité soustavy tvořené řetízkem N částic hmotnosti $\mu = m_P/N$ spojených pružinami, každá o tuhosti k , zakončeným jednou částicí hmotnosti m .

Počáteční podmínky mohou být nejrůznější. Často se ale vyskytují dva typické případy:

- $x_0 \neq 0, v_0 = 0$: částici drženou mimo rovnovážnou polohu v okamžiku $t = 0$ volně vypustíme;
- $x_0 = 0, v_0 \neq 0$: částici vychýlíme z rovnovážné polohy úderem v okamžiku $t = 0$. Má-li narážející předmět rychlost w a je-li jeho hmotnost $M \gg m$ podstatně větší než hmotnost m částice, udělí ji rychlost $v_0 = 2w$.

5.2.4 Harmonický oscilátor s předpětím: $F = -kx + F_0$

Uvažujme sílu poněkud obecnější (např. na nehmotné pružině visí závaží a působí na něj i zemská tíže). Síla má pak tvar

$$F(x) = -kx + F_0, \quad (5.45)$$

a pohybová rovnice (nehomogenní, ale stále lineární) zní

$$m\ddot{x} + kx = F_0. \quad (5.46)$$

Její řešení je opět triviální. Jde o typ rov. (5.7) a její partikulární řešení je zřejmě např.

$$kx_r = F_0, \text{ tedy } x_r = \frac{F_0}{k}. \quad (5.47)$$

V případě pružiny se tedy závaží posune dolů o délku $d = \frac{mg}{k}$ a HB kolem nové polohy x_r harmonicky kmitá s toutéž frekvencí, rychlostí atd. jako dříve, bez předpětí.

Obecné řešení je (např. – viz rov. (5.30))

$$x - x_r = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_2), \quad (5.48)$$

kde nová rovnovážná poloha je $x_r = \frac{F_0}{k}$.

V řešení tedy nepřibyl žádný zajímavější jev. V dalším proto opět uvažujeme pro jednoduchost jen harmonický oscilátor bez předpětí.

5.2.5 Tlumený harmonický oscilátor: $F = -kx - h\dot{x}$

Chceme uvažovat realističtější situaci, kdy je pohyb harmonického oscilátoru nějak tlumen. Seznámili jsme se s třemi jednoduchými modely tlumení:

1. Suché tření (mezi pevnými tělesy; závislé na normálovém tlaku, málo závislé na rychlosti);
2. Odpor tekutého prostředí (kapalina či plyn) při malých rychlostech, kdy se uplatní hlavně vazkost prostředí; odpor prostředí je úměrný rychlosti pohybu HB;
3. Odpor tekutého prostředí při větších rychlostech, kdy se uplatní hlavně „rozhrnování“ prostředí; odpor je úměrný energii rozhrnované tekutiny, tedy čtverci rychlosti pohybu HB.

Označíme-li $1 M$ (jednotka: mach) velikost rychlosti vln v tekutině, pak cca od $\frac{1}{10} M$ se začne zřetelněji projevovat stlačitelnost tekutiny a s ní zcela nové jevy, jako rázová vlna u zvuku. Lze je hezky pozorovat na rozhraní voda-vzduch, kde je rychlost povrchových vln velmi nízká, centimetry za sekundu. Rychlost zvuku ve vzduchu je řádově 330 m/s, ve vodě asi 1 km/s.

Budeme se zabývat případem 2, který je velmi častý v praxi (např. kmitání tlumené vzduchem, ale i kmitání, kdy se po sobě pohybují pevná tělesa, jejichž styčná plocha je pro snížení odporu namazána olejem). Pro nás má nyní praktickou výhodu, že vede na lineární rovnici, kterou umíme vyřešit do všech podrobností.

Síla tření F_{tr} směřuje proti rychlosti pohybu. Výsledná síla má proto tvar

$$F(x) = F_{\text{pruž}} + F_{\text{tr}} = -kx - h\dot{x}, \quad (5.49)$$

a pohybová rovnice zní

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = 0. \quad (5.50)$$

Stejně jako dříve zavedeme

$$\omega_0 := \sqrt{k/m} \quad (5.51)$$

a dále součinitel tlumení vztahem

$$\delta := h/2m; \quad \delta > 0. \quad (5.52)$$

Jeho převrácená hodnota se často nazývá časová konstanta: $\tau = 1/\delta$. (Opět: termín „časový parametr“ by byl správnější.) Pohybová rovnice dostane tvar

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (5.53)$$

Řešíme ji opět stejně: hledáme řešení ve tvaru $x = e^{\lambda t}$. Charakteristická rovnice zní

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (5.54)$$

Je to kvadratická rovnice s diskriminantem $D = 4(\delta^2 - \omega_0^2)$ a řešení zřejmě závisí na tom, která z veličin δ a ω_0 je větší. Podle toho můžeme rozlišit tři případy:

1) **tlumené harmonické kmity:** $\delta < \omega_0$;

2) **aperiodický pohyb:** $\delta > \omega_0$;

3) **mezní aperiodický pohyb:** $\delta = \omega_0$.

Probereme je postupně.

1) **Tlumené harmonické kmity:** $\delta < \omega_0$

Zavedeme-li

$$\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} > 0, \quad (5.55)$$

dostaneme ihned obecné řešení, např.

$$x(t) = C_+ e^{(-\delta + i\omega)t} + C_- e^{(-\delta - i\omega)t} \quad (5.56)$$

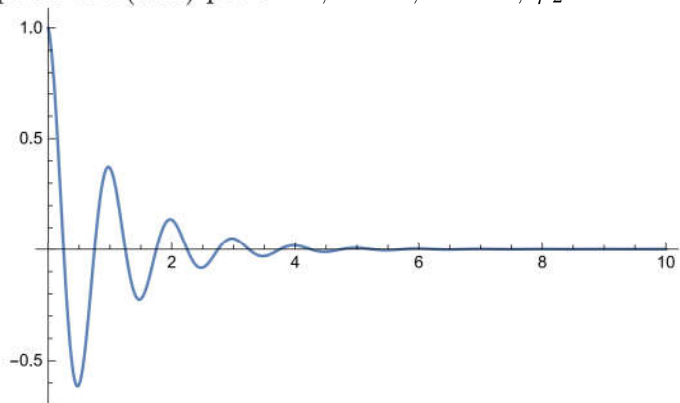
$$= (A \cos \omega t + B \sin \omega t) e^{-\delta t} \quad (5.57)$$

$$= C e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_2), \quad (5.58)$$

z něhož je zřejmý tvar pohybu. HB kmitá (teoreticky nekonečněkrát) kolem rovnovážné polohy, přičemž každý další kmit je oproti předchozímu zeslaben ve stálém poměru

$$1 : \beta = 1 : e^{-\delta T} = 1 : e^{-\frac{2\pi\delta}{\omega}}. \quad (5.59)$$

Je zřejmé, že nulové body funkce $x(t)$ jsou od sebe vzdáleny o $\frac{1}{2}T$, kde $T = \frac{2\pi}{\omega}$ je perioda tlumených kmitů. Výpočtem však ověříme, že i maxima a minima této funkce (zjistíme je obvyklým způsobem, tj. anulováním derivace) mají tutéž periodu, třebaže *neleží* uprostřed mezi nulovými body. Obrázek je podle rov. (5.58) pro $\delta = 1$; $C = 1$; $\omega = 2\pi$; $\varphi_2 = 0$.



2) **Aperiodický pohyb:** $\delta > \omega_0$

Tentokrát zavedeme naopak

$$\Delta := \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} > 0 \quad (0 < \Delta < \delta) \quad (5.60)$$

a dostaneme ihned jako obecné řešení např.

$$x(t) = x_1 e^{-(\delta+\Delta)t} + x_2 e^{-(\delta-\Delta)t}, \quad (5.61)$$

Protože je zřejmé $\delta > \Delta$, jsou oba exponenty v rov. (5.58) pro $t > 0$ záporné a s rostoucím časem výchylka x klesá exponenciálně k nule.

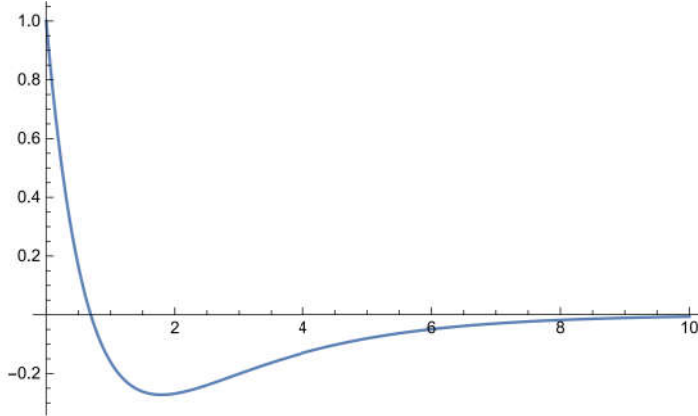
Snadno ověříme, že počáteční výchylka x_0 je rovna $x_0 = x_1 + x_2$, počáteční rychlost v_0 je rovna $v_0 = -\delta x_0 + \Delta(x_2 - x_1)$.

Okamžitá výchylka má (v závislosti na hodnotách a znaménkách x_1, x_2) nejvýše jeden extrém na intervalu $]0, +\infty[$.

Snadný rozbor ukáže, že jsou právě tři možnosti: HB se z počáteční polohy své rovnovážné poloze

1. monotonně přibližuje;
2. vzdaluje až do nejvzdálenějšího bodu trajektorie, odkud se už monotonně vrací do rovnovážné polohy.
3. přibližuje, přeběhne ji a pokračuje do nejvzdálenějšího bodu trajektorie, odkud se už monotonně vrací do rovnovážné polohy;

Obrázek je podle rov. (5.61) pro $\delta = 1$; $x_1 = 2$; $x_2 = -1$; $\delta = 1$; $\Delta = 0,5$.



3) Mezní aperiodický pohyb: $\delta = \omega_0$

V tomto případě má charakteristická rovnice dvojnásobný kořen 0. Řešení má proto poněkud jiný tvar (viz rov. (5.6)):

$$x(t) = C_1 e^{-\delta t} + C_2 t e^{-\delta t} = (C_1 + C_2 t) e^{-\delta t} \quad (5.62)$$

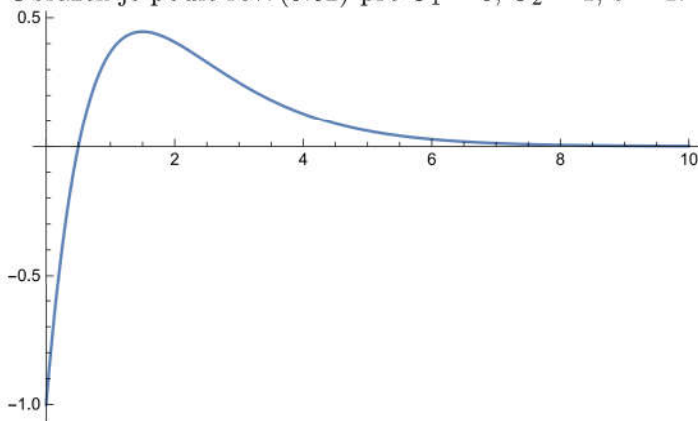
Charakter řešení i jeho vlastnosti jsou však podobné předchozímu, tedy aperiodickému pohybu; speciálně i zde je nejvýše jeden extrém a tři typy přibližování k rovnovážné poloze.

Z praktického hlediska je zvláště významné, že za stejných okolností (m , k) a při různém tlumení h (resp. δ) vede mezní tlumení k nejrychlejšímu přiblížení rovnovážné poloze.

Přesněji řečeno: Při zadané odchylce ε je to právě mezní tlumení $\delta = \omega_0$, při kterém je minimální ten čas $T(\varepsilon, \delta)$, pro který v každém pozdějším čase $t > T(\varepsilon, \delta)$ platí

$$|x(t)| < \varepsilon. \quad (5.63)$$

Obrázek je podle rov. (5.62) pro $C_1 = 0$; $C_2 = 1$; $\delta = 1$.



Společná terminologie pro oscilátor s tlumením

Ve všech třech případech se pro $t \rightarrow \infty$ poloha HB exponenciálně blíží rovnovážné poloze $x_r = 0$.

Pro puntičkáře: „blíží se exponenciálně“ neznamená, že jde o exponenciálu (i součet dvou exponenciál s různými exponenty již není exponenciála), ale že průběh pohybu lze majorizovat exponenciální funkcí.

Popisujeme-li časový průběh popsany funkcí

$$x = x_m e^{-\delta t} \cos(\omega(t - t_0) + \varphi_0), \quad (5.64)$$

pak veličinu δ nazýváme **součinitel tlumení**, součin tohoto součinitele s periodou nazýváme **logaritmický dekrement** Λ . Pro čistě exponenciální útlum

$$x = x_m e^{-\delta t} \quad (5.65)$$

zavádíme **časovou konstantu** (během které poklesne rozkmit na $1/e$ -násobek) τ . Platí tedy

$$\text{počáteční amplituda: } x_m \quad (5.66)$$

$$\text{počáteční fáze: } \varphi_0 \quad (5.67)$$

$$\text{úhlová frekvence: } \omega \quad (5.68)$$

$$\text{frekvence: } f = \omega/2\pi \quad (5.69)$$

$$\text{perioda: } T := 1/f = 2\pi/\omega \quad (5.70)$$

$$\text{součinitel tlumení: } \delta \quad (5.71)$$

$$\text{logaritmický dekrement: } \Lambda := -\ln \beta = \delta T = 2\pi\delta/\omega \quad (5.72)$$

$$\text{časová konstanta (časový parametr): } \tau := 1/\delta. \quad (5.73)$$

$$(\text{útlum}): \beta := e^{-\delta T} \quad (5.74)$$

Veličina β (značení ani název není předepsán normou) se často prostě nazývá útlum a udává, kolikrát poklesne amplituda za jednu periodu.

5.2.6 Vynucené kmity: $F = -kx - h\dot{x} + F(t)$

Obecné řešení

Předpokládejme, že na kmitající oscilátor působí vtištěná vnější síla F_{vt} . Budeme se zabývat silou konkrétního tvaru

$$F_{vt}(t) = F_0 \cos \Omega t, \quad (5.75)$$

a to z několika důvodů, zejména

- jde o případ velmi častý a významný v praxi;
- protože pohybové rovnice jsou lineární, je každá lineární kombinace jejich řešení rovněž řešením původních rovnic. Z funkcí typu $\cos$ na pravé straně pak lineární kombinací (Fourierova transformace) můžeme ze získaných výsledků odvodit řešení pro prakticky všechny časově závislé vtištěné síly $F_{vt}(t)$ na pravé straně, se kterými se v praxi můžeme setkat.

Pohybová rovnice má tedy tvar

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t, \text{ resp.} \quad (5.76)$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \cos \Omega t, \quad (5.77)$$

kde jsme zavedli označení

$$a_0 := F_0/m. \quad (5.78)$$

Řešení budeme hledat způsobem uvedeným v kap. 5.1.2. Řešení příslušné homogenní rovnice, tedy rov. (5.53), známe – jde o jeden ze tří dříve rozebraných případů rov. (5.58), (5.61), (5.62), přičemž všechny alternativy ubývají s rostoucím časem exponenciálně k nule. Nyní tedy potřebujeme najít jedno řešení (partikulární integrál) rov. (5.76).

Pomůže nám fyzikální představa. Pod vlivem stále působící periodické síly tvaru $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ bude zřejmě nakonec HB oscilovat s toutéž (vynucenou) úhlovou frekvencí Ω , jen s neznámou amplitudou x_m a fází φ_0 :

$$x(t) = x_m \cos(\Omega t + \varphi_0) \quad (\text{pro } t \rightarrow \infty). \quad (5.79)$$

Tato funkce se obvykle nazývá **řešením v ustáleném stavu**. (Úplné řešení vycházející z počátečních podmínek a zahrnující proto i řešení příslušné homogenní rovnice se nazývá **řešením v přechodovém stavu**, zejména pro malé hodnoty t , kdy členy s časem exponenciálně ubývající ještě nejsou zanedbatelné.)

Dosadíme proto funkci z rov. (5.79) do rov. (5.77), provedeme všechny derivace a upravíme na tvar

$$F \sin \Omega t + G \cos \Omega t = 0, \quad (5.80)$$

z něhož plynou (díky lineární nezávislosti funkcí $\sin \Omega t$ a $\cos \Omega t$) rovnosti

$$F = 0, \quad (5.81)$$

$$G = 0. \quad (5.82)$$

Dosazování je zcela mechanické, ale zabere dosti místa a času. Zjednodušíme si proto zápis zkratkami

$$\sin \Omega t \equiv S \quad (5.83)$$

$$\cos \Omega t \equiv C \quad (5.84)$$

$$\sin \varphi_0 \equiv s \quad (5.85)$$

$$\cos \varphi_0 \equiv c, \quad (5.86)$$

takže do rov. (5.77)

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 C \quad (5.87)$$

dosazujeme rov. (5.79) ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= x_m \cos(\Omega t + \varphi_0) = x_m c C - x_m s S \\ \dot{x} &= -\Omega x_m \sin(\Omega t + \varphi_0) = -\Omega x_m c S - \Omega x_m s C \\ \ddot{x} &= -\Omega^2 x_m \cos(\Omega t + \varphi_0) = -\Omega^2 x_m c C + \Omega^2 x_m s S \end{aligned}$$

s výsledkem (po vytknutí x_m):

$$-\Omega^2 c C + \Omega^2 s S - 2\delta\Omega c S - 2\delta\Omega s C + \omega_0^2 c C - \omega_0^2 s S = \frac{a_0}{x_m} C \quad (5.88)$$

To je již naše požadovaná rov. (5.80), takže podle následujících rov. (5.81) a rov. (5.82) dostáváme dvě rovnice pro dvě neznámé a_0 a φ_0 (prostřednictvím $s = \sin \varphi_0$ a $c = \cos \varphi_0$):

$$-(\Omega^2 - \omega_0^2)c - 2\delta\Omega s = \frac{a_0}{x_m} \quad (\text{podle } C) \quad (5.89)$$

$$(\Omega^2 - \omega_0^2)s - 2\delta\Omega c = 0 \quad (\text{podle } S) \quad (5.90)$$

Umocněním každé z těchto rovnic na druhou a následným sečtením dostaneme

$$(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2 = \left(\frac{a_0}{x_m}\right)^2, \quad (5.91)$$

takže po konečném dosazení $a_0 = F_0/m$ dostáváme řešení pro amplitudu výchylky

$$x_m = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \quad (\text{amplituda}), \quad (5.92)$$

zatímco z rov. (5.90) vydělením c dostaneme pro fázový posuv vztah

$$\tan \varphi_0 = s/c = \frac{2\delta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2} \quad (\text{fáze}). \quad (5.93)$$

Tím je partikulární řešení, totožné s ustáleným stavem, nalezeno; přičtením řešení homogenní rovnice, tedy podle okolností rov. (5.58), rov. (5.61), nebo rov. (5.62) získáme obecné řešení (zvané též „přechodové řešení“, zejména v čase t krátce po počátku:

$$\begin{aligned} x(t) &= \overbrace{x_{00} e^{-\delta t} \cos(\omega + \varphi_1)}^{\text{řešení homogenní rovnice}} + \overbrace{x_m \cos(\Omega t + \varphi_0)}^{\text{ustálený stav}}, & \text{resp.} \\ x(t) &= x_{10} e^{-\delta t} + x_{11} t e^{-\delta t} + x_m \cos(\Omega t + \varphi_0), & \text{resp.} \\ x(t) &= x_{01} e^{-(\delta+\Delta)t} + x_{02} e^{-(\delta-\Delta)t} + x_m \cos(\Omega t + \varphi_0). \end{aligned}$$

Dva parametry (x_{00}, φ_1 , resp. x_{10}, x_{11} , resp. x_{01}, x_{02}) v přechodovém řešení volíme tak, abychom splnili počáteční podmínky pro výchylku x_0 a rychlost $\dot{x}_0$ kmitající částice. Ostatní parametry byly definovány dříve.

Rozbor; rezonance výchylky při malém tlumení

Při malém tlumení δ oscilátoru se může stát, že při proměnné úhlové frekvenci Ω vnější síly bude mít výchylka x (nebo energie E , ...) výrazné maximum při jisté hodnotě $\Omega = \Omega_0$; říkáme, že dochází k *rezonanci* výchylky (energie, ...). Rozebereme tuto situaci analyticky.

Jde o případ tlumených harmonických kmitů (nikoli o aperiodický pohyb) a řešení je tedy dáno vzorcem

$$x(t) = Ce^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_1) + x_m \cos(\Omega t + \varphi_0) \quad , \quad (5.94)$$

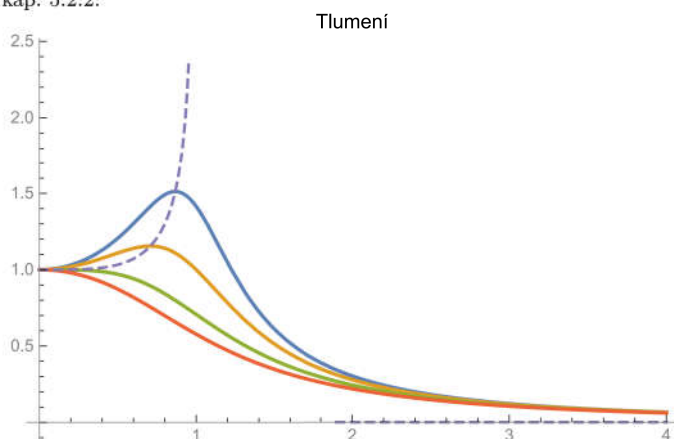
v němž zvolíme C , φ_1 tak, abychom splnili počáteční podmínky pro $x_{(t=0)}$ a $v_{(t=0)}$, zatímco amplituda x_m a fázový posuv φ_0 v ustáleném stavu jsou určeny rov. (5.92) a rov. (5.93):

$$x_m = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \quad , \quad (5.95)$$

$$\varphi_0 = \arctan \frac{2\delta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2} \quad . \quad (5.96)$$

Kdy mají výrazy smysl? Jmenovatel výrazu v rov. (5.96) není nebezpečný, protože i pro $\Omega \rightarrow \omega_0$, kdy se jmenovatel blíží nule, se prostě φ_0 blíží $\frac{\pi}{2}$. V rov. (5.95) je ale jmenovatel odmocninou ze součtu dvou čtverců. Výraz má tedy smysl vždy, kromě jediného případu, když platí $\Omega = \omega_0$ (rezonance energie, jak uvidíme) a současně $\delta = 0$ (nulové tlumení); v takovém případě roste amplituda kmitů neomezeně.

Obvykle předpokládáme i $\Omega > 0$. Cvičně uvažte i případ $\Omega = 0$ (tj. stálá, „stejnoseměrná“ síla), kdy výraz v rov. (5.92) diverguje. Rozeberte si podrobně, co a proč znamená divergence výrazu fyzikálně; příslušná úloha je vám známa už z dřívějšíka – z kap. 5.2.2.



Vyšetříme, jak závisí amplituda x_m ustálených kmitů na úhlové frekvenci Ω vynucených kmitů. Na grafu je vynesena též funkce $x_m(\Omega)$ spojující maxima pro různé δ . V krajních hodnotách platí

$$\text{Pro } \Omega \rightarrow 0 : \quad x_m \rightarrow \frac{F_0/m}{\sqrt{\omega_0^4}} = \frac{F_0/m}{k/m} = \frac{F_0}{k} \quad , \quad (5.97)$$

a to je, jak se dalo čekat, právě statická výchylka částice pod konstantní silou F_0 .

$$\text{Pro } \Omega \rightarrow \infty : \quad x_m \rightarrow \frac{F_0/m}{\sqrt{\Omega^4}} \rightarrow 0 \quad ; \quad (5.98)$$

čím rychlejší vynucené kmity, tím hůř je oscilátor stačí sledovat.

Maximum funkce $x_m(\Omega)$ nalezneme obvyklou cestou – anulováním derivace:

$$0 = \frac{dx_m}{d\Omega} = \left(\frac{F_0}{m} ((\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2)^{-1/2} \right)' \quad (5.99)$$

$$= \frac{F_0}{m} \frac{-1}{2} \left(((\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2) \right)^{-3/2} (2(\Omega^2 - \omega_0^2) \cdot 2\Omega + 4\delta^2 \cdot 2\Omega) \quad (5.100)$$

$$= \text{konst } 4\Omega(\Omega^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2) \quad (5.101)$$

Vedle krajních bodů $(0; \infty)$ je tedy derivace nulová nanejvýš v jediném bodě Ω_r :

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad (5.102)$$

pokud ovšem platí

$$\omega_0 > \sqrt{2}\delta \quad (5.103)$$

Tato podmínka je ostřejší než podmínka $\omega_0 > \delta$ nutná pro existenci tlumených kmitů (a nikoli aperiodického pohybu). Je-li splněna, pak při úhlové frekvenci Ω_r dojde k rezonanci amplitudy.

Limitní případ: nulové tlumení

Pokud by bylo opravdu $\delta = 0$ a vnucená frekvence by se přesně rovnala vlastní $\Omega = \omega_0$, pak by pohybová rovnice rov. (5.76) přešla na tvar

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega_0 t, \text{ resp.} \quad (5.104)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \cos \omega_0 t, \quad (5.105)$$

opět s označením

$$a_0 := F_0/m. \quad (5.106)$$

Partikulární řešení rovnice by však bylo nyní jiné. Podle toho, že by amplituda měla být s časem stále rostoucí sinusoida s frekvencí ω_0 , zkusíme funkci

$$x(t) = x_0 t \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (5.107)$$

a postupem stejným jako výše dostaneme konkrétní hodnoty x_0, φ_0 jako

$$x(t) = \frac{a_0}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t) \quad (5.108)$$

Jak je vidět, amplituda, rychlost i zrychlení by kolísavě rostly do nekonečna, což by jistě rychle narazilo na limity (působící síla pružnosti přestala být lineární a řídit se tedy vztahem $F = -kx$, s rostoucí rychlostí by přestalo být zanedbatelné tření apod.).

Energie

Zabývejme se nyní energií buzených tlumených kmitů.

Celková mechanická energie E_Σ se u netlumeného oscilátoru s časem nemění. Uvažujeme-li např. rov. (5.30): $x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$, $\dot{x}(t) = -\omega_0 x_m \sin(\omega_0 t + \varphi_2)$, pak platí

$$E_\Sigma = E_k + E_p = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2. \quad (5.109)$$

U tlumeného oscilátoru klesá E_Σ s časem exponenciálně k nule díky činiteli $e^{-\delta t}$:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = \dot{x}(-h\dot{x}) = -h\dot{x}^2. \quad (5.110)$$

U vynucených kmitů se zabýváme jen ustáleným stavem. Ten má průběh stejného tvaru jako volný harmonický oscilátor a udržuje si proto i stejnou energii. Je to však vyváжено tím, že vtištěná síla koná práci a dodává energii, která se díky tlumení ztrácí. Výkon síly je roven skalárnímu součinu síly a rychlosti (rov. (4.25)).

Rezonance energie

Energie E_z dodaná vtištěnou silou za dobu $T = 2\pi/\Omega$ jedné periody v ustáleném stavu je rovna

$$E_z = \int_0^T (-h\dot{x}^2)dt = -2\pi\delta\Omega m x_m^2 \quad (5.111)$$

a průměrný ztrátový výkon je

$$P = -\frac{E}{T} = \delta\Omega^2 m x_m^2 = \frac{\delta\Omega^2 F_0^2/m}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2} \quad (5.112)$$

Tato funkce má sice podobný průběh jako amplituda kap. 5.95 vyšetřovaná dříve, obvyklým způsobem můžeme najít extrémy anulováním derivace podle Ω , ale tentokrát je podmínkou rezonance (energie)

$$2\Omega\omega_0^2(\Omega^2 - \omega_0^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega = \omega_0 \quad (5.113)$$

nezávisle na tlumení δ , resp. h .

Činitel jakosti

Činitelem Q jakosti kmitající soustavy (např. rezonančního obvodu) nazýváme poměr průměrné energie kmitající soustavy ku průměrné energii E_z , kterou vtištěná síla dodá během jednoho cyklu, aby udržela ustálené kmitání:

$$Q = \frac{E_\Sigma}{E_z} = \frac{2\pi\frac{1}{2}m\omega_0^2 x_m^2}{2\pi\delta\Omega m x_m^2} \quad (5.114)$$

$$\text{v rezonanci:} \quad Q = \frac{\omega_0}{2\delta} \quad (5.115)$$

5.2.7 Skládání kmitů

Princip superpozice

Pokud součet příčin dává prostý součet důsledků, říkáme že platí princip superpozice. Lze snadno nahlédnout, že tento princip je splněn právě tehdy, jsou-li pohybové rovnice lineární (v proměnných, které popisují konfiguraci soustavy). Protože až dosud probírané pohybové rovnice lineární byly, byl tím splněn předpoklad principu superpozice.

Princip superpozice umožňuje používat plně redukcionismus a řešit namísto složité rovnice několik jednodušších dílčích rovnic — konkrétně zde namísto složité pravé strany (vtištěné síly) vyřešit pohybovou rovnici s pravou stranou sinusoidální; pro libovolný jiný průběh pravé strany použijeme její Fourierovy řady a převedeme tím novou úlohu na součet úloh známých, tj. řešením složité úlohy bude prostý součet řešení úloh jednodušších.

Kmity ve stejném směru

Úlohy s netlumenými kmity a s ustálenými stavy vynucených kmitů vedly na sinusoidální řešení typu např.

$$x_1 = x_{m1} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (5.116)$$

$$x_2 = x_{m2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (5.117)$$

Často se vyskytují dva speciální případy: úhlové frekvence ω_1, ω_2 jsou

stejné , tj. $\omega_1 = \omega_2$, amplitudy různé

blízké , tj. $\omega_1 \approx \omega_2$, přesněji $\omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1 + \omega_2$, amplitudy stejné.

Pro **stejně** úhlové frekvence lze snadno dokázat, že součtem dvou sinusoidálních funkcí s týmiž frekvencemi je opět sinusoidální funkce téže frekvence, jen s jinou amplitudou i fází:

$$x_1 + x_2 = x_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1) + x_{m2} \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (5.118)$$

$$= x_{m12} \cos(\omega t + \varphi_{12}) \quad (5.119)$$

kde

$$x_{m12} = \sqrt{x_{m1}^2 + x_{m2}^2 + 2x_{m1}x_{m2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (5.120)$$

$$\varphi_{12} = \arctan \frac{x_{m1} \sin \varphi_1 + x_{m2} \sin \varphi_2}{x_{m1} \cos \varphi_1 + x_{m2} \cos \varphi_2} \quad (5.121)$$

Odvození (nemáme-li právě po ruce Wolfram Mathematica):

Označme pro stručnost $s := \sin \omega t$, $c := \cos \omega t$, $S_k := \sin \varphi_k$, $C_k := \cos \varphi_k$, $X_k := x_{mk}$. Potom máme dokázat, že pravé strany rov. (5.118), (5.119) jsou si rovny. Upravíme funkce součtu úhlů:

$$X_1 c C_1 - X_1 s S_1 + X_2 c C_2 - X_2 s S_2 = X_{12} c C_{12} - X_{12} s S_{12} \quad (5.122)$$

Protože s , c jsou lineárně nezávislé, musí platit

$$X_1 C_1 + X_2 C_2 = X_{12} C_{12} \quad (5.123)$$

$$X_1 S_1 + X_2 S_2 = X_{12} S_{12} \quad (5.124)$$

Umocněním rovnic na druhou a sečtením dostáváme rov. (5.120), z podílů obou rovnic pak rov. (5.121).

Amplituda je zřejmě největší, jsou-li oba kmity „ve fázi“, tj. $\varphi_1 = \varphi_2$ a nejmenší, jsou-li oba kmity „v protifázi“, tj. $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$; ve druhém případě pro $x_{m1} = x_{m2}$ kmity vymizí, amplituda výsledku je nulová.

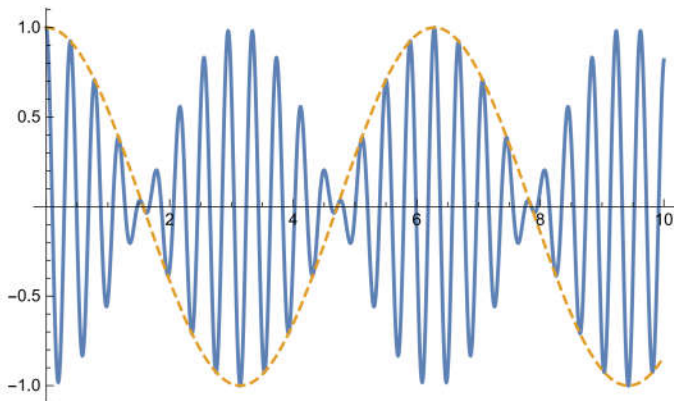
Pro **blízké** úhlové frekvence se stejnou amplitudou x_m upravíme součet s využitím rovnosti $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$:

$$x_1 + x_2 = x_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + x_m \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (5.125)$$

$$= 2x_m \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \quad (5.126)$$

Rázy Výsledek rov. (5.126) interpretovat jako *modulované kmity*, tj. kmity s úhlovou frekvencí $(\omega_1 + \omega_2)/2$ a s (poměrně pomalu) proměnnou amplitudou, avšak nikoli $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ (jak by se zdálo z rov. (5.126)), ale dvakrát vyšší, totiž $|\omega_1 - \omega_2|$. „Záporná amplituda“ není totiž odlišitelná od kladné a *obalová křivka* — funkce typu $|\cos \alpha|$ — má periodu dvakrát větší než funkce $\cos \alpha$.

Jsou-li si v akustice úhlové frekvence ω_1 , ω_2 blízké natolik, že odpovídající rozdíl frekvencí $|f_1 - f_2| = |\omega_1 - \omega_2|/2\pi$ je menší než cca 10 Hz, dokážeme maxima sluchem vnímat a odlišit. Tento akustický jev se pak nazývá *rázy* (dříve též *zázněje*). Obrázek je podle rov. (5.125) pro $x_m = 0,5$; $\omega_1 = 17$; $\omega_2 = 15$; $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ spolu s čárkovanou funkcí $\cos t$ (frekvence $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$).



Kmity ve směrech navzájem kolmých. Lissajousovy obrazce

Kmitá-li částice dvěma harmonickými kmity ve směrech navzájem kolmých, např.

$$\begin{aligned} x(t) &= x_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y(t) &= y_m \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \quad (5.127)$$

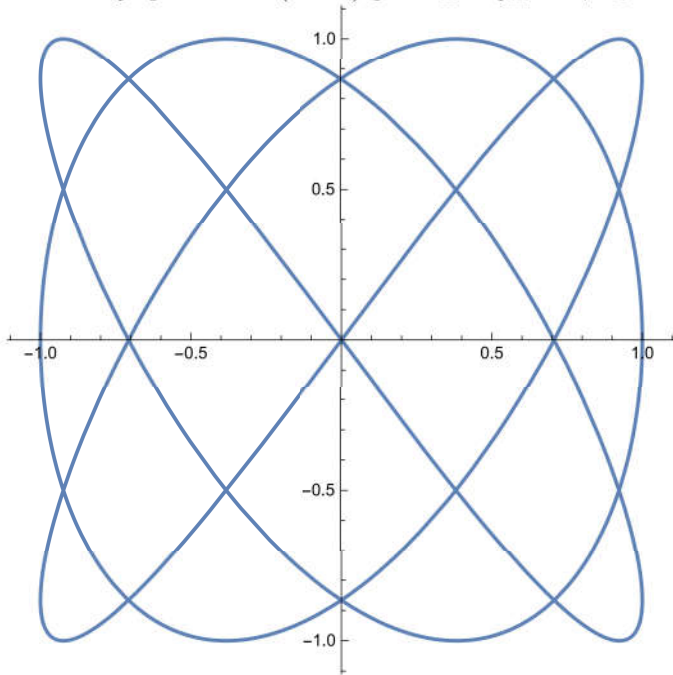
je zajímavé sledovat její trajektorii $F(x, y) = 0$, tedy vyloučit čas t z právě uvedených závislostí. Amplitudy x_m, y_m jen určují měřítko výsledné křivky a nejsou zajímavé; zvolíme je $x_m = y_m = 1$.

Jsou-li úhlové frekvence ω_1, ω_2 v *racionálním* poměru $\omega_1 : \omega_2 = l : m$ s celými nesoudělnými l, m , pak je trajektorii uzavřená křivka dotýkající se opsaného čtverce právě v l bodech ve směru x a v m bodech ve směru y . Označíme-li totiž $\omega_{12} = \omega_1/l = \omega_2/m$, pak doba $T_{12} = 2\pi/\omega_{12}$ je nejmenší společnou periodou funkcí $x(t), y(t)$, tj. platí $x(t) = x(t + T_{12}), y(t) = y(t + T_{12})$ a částice (poprvé) znovu pokračuje po své předchozí trase. Protože mezitím nabyla l -krát funkce $x(t) = \cos(l\omega_{12}t + \varphi_1)$ svého minima i maxima, má trajektorie se svou (čtvercovou) hranicí l společných bodů ve směru osy x a podobně m společných bodů ve směru osy y .

Je-li poměr úhlových frekvencí $\omega_1 : \omega_2$ iracionální, pak trajektorie vyplňuje hustě čtverec, tj. ke každému bodu B uvnitř čtverce a ke každému $\varepsilon > 0$ existuje čas t takový, že v okamžiku t je bod trajektorie bodu B blíže než ε .

Generujeme-li na počítači trajektorii tak, že se s plynoucím časem t zobrazuje vždy úsek trajektorie $[t - t_0; t]$ s pevným t_0 , dostaneme esteticky hezké časově proměnné obrazce — „hada“ elegantně se vinoucího uvnitř obdélníka. Viz Wikipedie, Lissajousovy obrazce.

Obrázek je podle rov. (5.127) pro $x_m = y_m = 1; \omega_1 = 3; \omega_2 = 4; \varphi_1 =; \varphi_2 = \pi/2$.



Lissajousových obrazců generovaných dvěma signály na osciloskopu se dříve, kdy nebyla digitální technika rozvinutá jako nyní, často užívalo pro měření frekvence neznámého signálu porovnáním se signálem známé frekvence.

5.2.8 Vázané kmity. Kvazičástice

Uvažujme dva stejné oscilátory kmitající samostatně s touž úhlovou frekvencí $\omega_A = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Zavedeme-li mezi nimi vazbu

$$F_P := -k_P(x_2 - x_1) \quad (5.128)$$

(např. pružinou s tuhostí k_P), pak vedle ω_A se objeví i nová úhlová frekvence $\omega_B = \sqrt{\frac{k+2k_P}{m}}$. Pro slabou vazbu ($k_P \ll k$) zde může dojít k rázům uvedeným výše; původní oscilátory si navzájem jakoby přelévají energii. Vše snadno zjistíme řešením soustavy pohybových rovnic:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k_P(x_2 - x_1) = -(k + k_P)x_1 + k_Px_2 \quad (5.129)$$

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 + k_P(x_1 - x_2) = k_Px_1 - (k + k_P)x_2 \quad (5.130)$$

odkud sečtením a odečtením rovnic dostaneme ihned

$$m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 = -k(x_1 + x_2) \quad (5.131)$$

$$m\ddot{x}_2 - m\ddot{x}_1 = -(k + 2k_P)(x_2 - x_1) \quad (5.132)$$

a dosazením $\xi_A = x_1 + x_2$, $\xi_B = x_2 - x_1$

$$m\ddot{\xi}_A = -k \xi_A \quad (5.133)$$

$$m\ddot{\xi}_B = -(k + 2k_P)\xi_B \quad (5.134)$$

$$(5.135)$$

Soustavu dvou spřažených oscilátorů jsme převedli na dvě nezávislé rovnice popisující nové dva oscilátory – nezávislé *kvazičástice* s polohami ξ_A , ξ_B , s efektivními hmotnostmi m a s úhlovými frekvencemi

$$\omega_A = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.136)$$

$$\omega_B = \sqrt{\frac{k + 2k_P}{m}} \quad (5.137)$$

$$(5.138)$$

Takto se vyšetřují např. kmity v pevné látce a kvantují se na *fonony*, viz dále.

Je poučné rozmyslet si zde, jak se to má s „existencí“ a „neexistencí“ částic a kvazičástic. Soustava interagujících částic se pod vlivem vnějších vln opravdu chová (rezonuje či nerezonuje) jako soustava dvou neinteragujících kvazičástic, jejichž přítomnost v soustavě tedy opravdu můžeme zjistit přímým měřením. Polohu kvazičástic však přímým měřením nezjistíme. Tu můžeme vypočítat z poloh skutečných částic se započtením jejich interakcí — a naopak, ze známých hodnot veličin kvazičástic bychom mohli vypočítat i polohu a ostatní veličiny skutečných částic. A především – obojí, částice i kvazičástice, jsou modely reality. Každý z nich je někde názornější než druhý.

5.2.9 ←Řetízek oscilátorů (podélné kmity)

Uvažujme řetízek N stejných částic pohyblivých jen po ose x ; číslujme je 1 až n . Každá nechť je spojena pružinou s tuhostí k se svým nejbližším sousedem. Předpokládejme, že v rovnováze mají částice tutéž vzájemnou vzdálenost a (u krystalů „mřížkový parametr“) a tedy n -tá částice má

$$\text{rovnovážnou polohu} \quad x_{n0} = na, \quad (5.139)$$

$$\text{okamžitou polohu (odchýlenou o } u_n(t)) \quad x_n(t) = na + u_n(t) \quad (5.140)$$

a pohybové rovnice jsou tedy

$$m\ddot{x}_n = k(x_{n+1} - x_n) - k(x_n - x_{n-1}) \quad (5.141)$$

$$\text{resp.} \quad \ddot{u}_n = -\omega_0^2(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) \quad (5.142)$$

s obvyklým zavedením $\omega_0 := \sqrt{k/m}$. Rovnice platí pro $n = 2$ až $n = N - 1$; krajní body 1 a N však nemají po jedné straně souseda a tedy by chyběla příslušná síla. Zesymetrizujeme rovnice *cyklickými okrajovými podmínkami*¹; rozšíříme řetízek, ale periodicky s periodou N . Ztotožníme tedy N -tou částici s nultou; při větším N si můžeme představit, že řetízek stočíme do kruhu. Pak budou rov. (5.141), (5.142) univerzálně platné pro všechna n (můžeme je brát mod N). Rovnice jsou spřažené a potřebovali bychom je separovat. Cítíme přitom, že v cyklickém řetízku si jsou všechny částice „rovnoprávné“, nemělo by záležet na tom, která — v kruhu — bude první. Hledejme proto u_n ve tvaru periodické funkce proměnné n se zatím neznámými parametry q , ω

$$u_n = u_m e^{i(2\pi qn/N - \omega t)} \quad (5.143)$$

¹Ve 3D případě se takové cyklické okrajové podmínky nazývají *Bornovy-Kármánovy*.

Pro celočíselná q má u_n periodu N v parametru n (jak požadujeme). Dosazením dostaneme

$$-\omega^2 u_n = \omega_0^2 u_n (-e^{-i2\pi q/N} + 2 - e^{+i2\pi q/N}) \quad (5.144)$$

$$= -\omega_0^2 u_n \left(2 + 2 \cos \frac{2\pi q}{N} \right) \quad (5.145)$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 2 \left(1 + \cos \frac{2\pi q}{N} \right)^2 = 4 \left(\sin \frac{2\pi q}{2N} \right)^2 \quad (5.146)$$

$$\omega = 2\omega_0 \left| \sin \frac{\pi q}{N} \right| \quad (5.147)$$

Tím jsme dostali pro různá celá q povolené úhlové frekvence $\omega(q)$.

Fyzikální smysl parametru q :

5.2.10 $\leftrightarrow$ Struna

5.2.11 $\leftrightarrow$ Řetízek s bází

5.3 Speciální pohyby 3D: centrální pole

5.3.1 Definice centrálního pole

Silové pole $\vec{f}(\vec{r})$ nazýváme centrálním, jestliže

- síla $\vec{f}(\vec{r})$ směřuje vždy k jistému bodu² O zvanému *centrum síly*;
- má velikost f závislou jen na vzdálenosti r od tohoto bodu (nikoli na směru $\vec{r}_0$).

V bodě O zpravidla volíme počátek vztahné soustavy; pole $\vec{f}$ v něm není definováno. Pak

$$\vec{f}(\vec{r}) = f(r)\vec{r}_0 \quad (5.148)$$

kde $\vec{r}_0 = \vec{r}/r$ je jednotkový vektor příslušný nenulovému polohovému vektoru $\vec{r}$.

5.3.2 Obecné vlastnosti centrálních polí

Centrální pole je konzervativní

Lze dokázat, že každé centrální pole je *konzervativní*. Nejjednodušší je konstruktivní důkaz:

Označme $F(r)$ primitivní funkci k funkci $f(r)$, tj. platí $F(r) = \int f(r)dr$; $f(r) = \frac{dF(r)}{dr}$.

Pak $U(r) = -F(r) + \text{konst} = -\int f dr + \text{konst}$ je potenciální energií silového pole $\vec{f}$, tj.

$$\vec{f}(\vec{r}) = -\mathbf{grad} U(r) \quad (5.149)$$

Důkaz si proveďte přímou derivací.

Centrální pole zachovává moment hybnosti $\vec{b}$

Zákon zachování momentu hybnosti $\vec{b} := \vec{r} \times \vec{p}$ v centrálním poli dostaneme snadno. Moment $\vec{M}$ centrální síly vůči centru je totiž vždy roven nule:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{f} = \vec{r} \times f\vec{r}_0 = \vec{0} \quad (5.150)$$

a protože časová změna momentu hybnosti je rovna momentu výslednice sil (rov. (4.10)), nemění se moment hybnosti s časem, a to ani co do směru (z toho vyplyne rovinný pohyb), ani co do velikosti (z toho vyplyne zachování plošné rychlosti).

²Pokud je centrální silové pole odpuzivé, směřuje síla pochopitelně *od centra*, nikoli k němu; jinak ovšem platí totéž. S takovým polem se setkáme např. při rozptylu (kladně nabitých) α -částic na (kladně nabitém) jádru atomu.

Pohyb v centrálním poli je rovinný

Zadání úlohy je sice 3D, ale dokážeme, že pohyb v centrálním poli je *rovinný*, tedy jen 2D. Odehrává se v rovině určené centrem a počátečními podmínkami: leží v ní počáteční polohový vektor $\vec{r}_0$ a počáteční rychlost $\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}_0$. Těmi je totiž určen počáteční moment hybnosti $\vec{b}_0 = \vec{r}_0 \times m\vec{v}_0$, a jak jsme dokázali, moment hybnosti $\vec{b}$ se při pohybu v centrálním poli zachovává.

Centrální pole zachovává plošnou rychlost v_p

V rovině pohybu se zachovává *plošná rychlost* v_p , tedy plocha opsaná průvodičem dělená dobou pohybu. Z definice plošné rychlosti platí totiž $v_p = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{b}/m$ a moment hybnosti $\vec{b}$ se při pohybu v centrálním poli zachovává.

Dva speciální případy centrálních sil: síla pružnosti a síla gravitace

Pružnost: $\vec{F}(\vec{r}) = -k\vec{r}$. Jde o (prostorový) harmonický oscilátor;

Gravitace: $\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{1}{r^2}\vec{r}_0$. Tuto úlohu vyřešíme jako část obecnější úlohy — pohybu dvou těles, které se gravitačně přitahují (Keplerova úloha).

První úlohu probereme zde v kap. 5.3.3, druhou v samostatné kap. A.

5.3.3 Prostorový harmonický oscilátor

Harmonický oscilátor je charakterizován přitažlivou silou přímo úměrnou odchylce z rovnovážné polohy tedy (vektorově)

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k\vec{r} \quad (5.151)$$

Z kap. 5.3.2 víme, že půjde o rovinný pohyb. Zvolíme kartézské souřadnice a rozepíšeme pohybové rovnice do složek:

$$m\ddot{x} = -kx \quad (5.152)$$

$$m\ddot{y} = -ky \quad (5.153)$$

s řešením podle kap. 5.2.3, rov. (5.30) a dále u Lissajousových obrazců, kap. 5.2.7, rov. (5.127):

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi_1) \quad (5.154)$$

$$y(t) = y_m \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (5.155)$$

tedy se stejnou úhlovou frekvencí $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Trajektorií je obecně elipsa, jak dostaneme eliminací času t z těchto rovnic: označíme $\xi := x/x_m$, $\eta := y/y_m$, $c_k := \cos \varphi_k$, $s_k := \sin \varphi_k$ a rozepíšeme:

$$(a) \quad \xi = c_1 \cos \omega t - s_1 \sin \omega t \quad (5.156)$$

$$(b) \quad \eta = c_2 \cos \omega t - s_2 \sin \omega t \quad (5.157)$$

a eliminujeme funkci $\cos \omega t$ kombinací $c_2(a) - c_1(b)$, funkci $\sin \omega t$ kombinací $s_2(a) - s_1(b)$:

$$c_2\xi - c_1\eta = (-s_1c_2 + c_1s_2) \sin \omega t \quad (5.158)$$

$$s_2\xi - s_1\eta = (c_1s_2 - s_1c_2) \cos \omega t \quad (5.159)$$

Obě rovnice umocníme na druhou a sečteme. Do výsledku dosadíme $s_1c_2 - c_1s_2 = \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$, $c_1c_2 - s_1s_2 = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$, $\xi = x/x_m$, $\eta = y/y_m$ a dostaneme

$$\left(\frac{x}{x_m}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_m}\right)^2 - 2\frac{x}{x_m}\frac{y}{y_m}\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) \quad , \quad (5.160)$$

což je rovnice elipsy s poloosami x_m , y_m ve středové poloze s hlavní osou natočenou o úhel $\varphi_1 - \varphi_2$. Po ní se tedy pohybuje částice realizující prostorový harmonický oscilátor. (Zdůrazněme, že centrum pole leží ve *středu* elipsy, zatímco v Keplerově úloze pro gravitační pole řešené v kap. A leží centrum pole v *ohnisku* elipsy).

5.4 Relaxační kmity

Podstatou harmonických kmitů částice kolem rovnovážné polohy je, jak jsme viděli, síla navracející částici zpět s velikostí přímo úměrnou vzdálenosti od této rovnovážné polohy. Nemusí také jít o částici; harmonicky kmitat může i jiná fyzikální veličina (např. elektrické napětí či proud), je-li snadno realizovatelná její druhá derivace podle času.

Kmity tohoto typu mívají v praxi víceméně *pevnou frekvenci*, vnější rušivé vlivy ovlivní spíše amplitudu.

Vedle těchto kmitů se v technice i v živé přírodě často vyskytují **relaxační kmity** vznikající zcela jiným mechanismem, a to střídáním dvou režimů.

Uvažujme např. elektrický obvod podle obrázku. Ze zdroje pevného napětí U_0 se přes rezistor R nabíjí kapacitor s kapacitou C s paralelně zapojenou doutnavkou. Doutnavkou zatím prakticky neprochází proud. Nabíjením roste napětí $U(t)$ na kapacitoru i doutnavce a exponenciálně by se blížilo hodnotě U_0 . Jakmile však dosáhne zápalného napětí U_Z doutnavky, nastane v doutnavce výboj, náboj do té doby kumulovaný na kapacitoru poklesne, až při hodnotě U_A nestačí k udržení výboje a výboj zhasne. Doutnavkou přestane téct proud a kapacitor se opět nabíjí v prvním režimu.

Obě větve děje — nabíjení i vybíjení — mají charakter relaxace, tj. uvolnění, přechod z nerovnováhy do rovnováhy; odtud název *relaxační kmity*. (Nejprve je to neúplně nabitý kapacitor zapojený na nabíjející zdroj napětí, poté nabitý kapacitor z možností vybití náboje přes doutnavku.)

Charakteristická proměnná (zde napětí U kapacitoru) probíhá interval od U_A do U_Z prvním režimem (nabíjení kapacitoru); při hodnotě U_Z dojde ke změně režimu a napětí se výbojem v doutnavce mění obráceně, od U_Z do U_A , v režimu vybíjení. (Může, ale nemusí být tedy symetrický k režimu prvnímu; zde zřejmě není, vybíjí se přes jiný odpor, než přes který se předtím nabíjelo.) Při napětí U_A se opět situace změní. Přejde se na první režim a celý děj se stále opakuje.

Výsledkem je sice periodický průběh proměnné veličiny x (zde U), ale určitě nikoli harmonický (který by měl sinusoidální závislost). Je tvořen dvěma větvemi (nárůst, pokles) obecně různé povahy, a proto obecně různého průběhu. Fáze relaxační bývá dána exponenciálou klesající asymptoticky k jisté limitní hodnotě, pokud platí, že rychlost $\dot{x}$ je úměrná odchylce x (u harmonických kmitů to nebyla rychlost, ale zrychlení odchylky $\ddot{x}$). Rychlost může být např. i konstantní (pak je větev popsána parabolickým obloukem) nebo může kmitající objekt získávat impulz jen v okamžiku změny režimu (pak je větev popsána úsečkou), apod. Podle povahy tohoto průběhu lze např. v biologii uvažovat a odhadovat podstatu a původ působící zobecněné síly.

U kmitů tohoto typu zůstává stálý *rozkmít*, tedy amplituda kmitů. Vnější poruchy ovlivňují zpravidla spíše frekvenci.

Teoretické studium pak spočívá ve zkoumání jednak mechanismů relaxací, jednak mechanismů změn režimů.