

# Příloha A

## Keplerova úloha – problém dvou těles

2016-09-03

### A.1 Formulace úlohy

#### A.1.1 Cíl

Chceme vyšetřit v rámci klasické mechaniky pohyb planety, např. Země, v naší sluneční soustavě. Jako jedinou sílu budeme uvažovat gravitační interakci mezi Zemí a Sluncem.

#### A.1.2 Co záměrně zanedbáme

Vědomě přitom zanedbáme řadu dalších okolností:

- veškeré relativistické jevy;
- ve sluneční soustavě jsou i jiné planety než Země a působí gravitačně na Zemi i na Slunce;
- Zemi obíhá Měsíc;
- ve sluneční soustavě jsou i jiné objekty než Slunce a planety (komety, asteroidy, meziplanetární hmota, ...);
- Slunce i Země jsou nepravidelná tělesa;
- Slunce i Země rotují kolem vlastních os;
- ani Slunce, ani Země nejsou tuhá tělesa: Slunce je celé plynné, Země je pokryta oceány a ovzduším a má tekutý vnitřek;
- ...

#### A.1.3 Vztah k reálné situaci

Budeme se zabývat nejjednodušším případem, a to soustavou složenou ze dvou bodových objektů – hmotných bodů  $B_1$ ,  $B_2$ . K tomu nás opravňují tyto skutečnosti:

- Zemi i Slunce můžeme „stáhnout do bodu“ proto, že gravitační pole po vrstvách homogenní koule (ať je v klidu nebo ať rotuje) je v klasické mechanice stejné jako gravitační pole hmotného bodu;
- vlastní rozměry jak Slunce (poloměr  $0,7 \times 10^9 \text{ m}$ ), tak i Země ( $0,006 \times 10^9 \text{ m}$ ) jsou zanedbatelné ve srovnání se vzdáleností Země – Slunce ( $150 \times 10^9 \text{ m}$ ).

### A.1.4 Další možný rozvoj teorie

Dalším krokem by bylo uvážit gravitační interakci planet navzájem (včetně pohybu Slunce kolem společného těžiště) jakožto *poruchu* a doplnit poruchové, tzv. sekulární členy (lat. saeculum = století, dlouhé pro člověka, ale přesto zanedbatelné oproti věčnosti).

Mohli bychom také přejít na obecnou teorii relativity; postihli bychom s ní i nepatrnou část stáčení perihela Merkura (43" za století), která zbývá po započtení všech vlivů klasických (5 557" za století) do pozorované hodnoty (5 600" za století). To je ovšem daleko vně rámce našich zájmů zde.

## A.2 Problém dvou těles – Keplerova úloha

Vyšetříme pohyb dvou hmotných bodů  $B_1$ ,  $B_2$  o hmotnostech  $m_1$ ,  $m_2$  a polohových vektorech  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  pod vlivem vzájemného gravitačního přitahování. Vycházíme z Newtonových pohybových rovnic

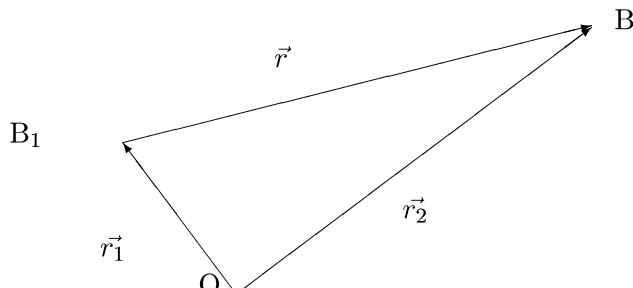
$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} \quad (\text{A.1})$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad (\text{A.2})$$

doplněných Newtonovým gravitačním zákonem

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (\text{A.3})$$

kde  $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$  je gravitační konstanta. Zavedeme relativní polohový vektor  $\vec{r}$



$$\vec{r} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (\text{A.4})$$

takže  $r$  je vzdálenost obou bodů. Dosazením dostaneme

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = + G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (\text{A.5})$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = - G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (\text{A.6})$$

(rozmyslete si znaménka obou výrazů – gravitace je přitažlivá).

Úloha je tedy trojrozměrná (3D) a hledáme šest neznámých – šest složek vektorů  $\vec{r}_k$ ,  $k = 1, 2$ .

## A.3 Těžišťová vztažná soustava

Zavedeme těžiště (hmotný střed) jakožto bod o souřadnicích

$$\vec{R} := \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (\text{A.7})$$

Protože jde o soustavu uzavřenou (vnější síly jsou nulové), očekáváme, že se těžiště bude pohybovat rovnoměrně přímočaře. To skutečně snadno dokážeme součtem (rov. (A.5) + rov. (A.6)), při němž se vyruší pravá strana a po vydělení součtem  $(m_1 + m_2)$  vyjde rovnou rovnice  $\ddot{\vec{R}} = \vec{0}$ . Tu můžeme snadno dvakrát integrovat

$$\dot{\vec{R}} = \vec{V}_0, \quad (\text{A.8})$$

$$\vec{R} = \vec{V}_0 t + \vec{R}_0, \quad (\text{A.9})$$

kde integrační konstanty  $\vec{V}_0$ , resp.  $\vec{R}_0$  mají fyzikální význam rychlosti, resp. polohy těžiště soustavy v čase  $t = 0$  (počáteční podmínky).

## A.4 Redukovaná úloha

Přejdeme od šesti proměnných (složky  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ ) k šesti proměnným (složky  $\vec{R}, \vec{r}$  z rov. (A.4), (A.7)). Pro první tři proměnné (složky  $\vec{R}$ ) jsme už úlohu vyřešili (rov. (A.9)). Pravé strany rov. (A.5) a rov. (A.6) obsahují jen  $\vec{r}$ , nikoli jednotlivá  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ . Zkombinujeme tedy obě rovnice tak, aby zbylo samotné  $\vec{r}$  i na levé straně: první rovnici vydělme  $-m_1$ , druhou  $m_2$  a sečteme. Dostaneme

$$\ddot{\vec{r}} = - \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (\text{A.10})$$

a zavedením **redukované hmotnosti**  $\mu$ , celkové hmotnosti  $M$  a pomocné konstanty  $g$

$$\mu := \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{A.11})$$

$$M := m_1 + m_2 \quad (\text{A.12})$$

$$g := G \frac{m_1 m_2}{\mu} = GM, \quad (\text{A.13})$$

dostaneme vztah

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (\text{A.14})$$

$$= -\mu g \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \text{resp.} \quad (\text{A.15})$$

$$= -G \frac{\mu M}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}, \quad (\text{A.16})$$

Všimněme si, že síla vyjádřená pravými stranami rov. (A.5), (A.6), (A.14) až (A.16) je (až event. na znaménko) táž a má i analogický zápis.

Zápis (A.16) lze interpretovat takto: eliminací pohybu těžiště a zavedením relativní vzdálenosti  $r$  jsme úlohu převedli na náhradní úlohu – pohyb tělesa („kvaziplaneta“) s redukovanou hmotností  $\mu$  v centrálním silovém poli ve vzdálenosti  $r(t)$  od centra. Naše „kvazislunce“ je nyní nehybné v počátku souřadnic (jako kdyby mělo setrvačnou hmotnost nekonečnou) a má gravitační hmotnost  $M = m_1 + m_2$ . Kolem něj obíhá „kvaziplaneta“ o hmotnosti  $\mu$  z rov. (A.11).

Jde o stejný trik, který jsme použili v kap. 5.2.8 při vyšetřování harmonických kmitů soustavy navzájem pružně sprzęžených částic. Jejich polohy jsme převedli lineárními kombinacemi na polohy redukovaných částic – kvazičástic. Ty se chovají jako volné (nesprážené) a každá z nich koná harmonický pohyb nezávislý na ostatních kvazičásticích. Zde jsme Slunce a planetu (dvě závislá tělesa) převedli na dvě nezávislé kvazičástice: „těžiště soustavy“ (hmotnost  $M + m$ , pohyb rovnoměrný přímočarý) a „kvaziplaneta“ (hmotnost  $\mu$ , pohyb rovinný, po kuželosečce – jak dále odvodíme).

Z polohy  $\vec{r}$  kvaziplanety dostaneme skutečné polohy planety i Slunce jednoduchou lineární transformací (vyřešením rov. (A.4) a (A.7)):

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (\text{A.17})$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (\text{A.18})$$

## A.5 Rovinný problém; moment hybnosti

Ukážeme, že náš problém je trojrozměrný jen zdánlivě. Ve skutečnosti se kvaziplaneta pohybuje pouze v jisté rovině procházející počátkem souřadnic (kde leží centrum síly), počáteční polohou planety a obsahující směr její počáteční rychlosti. Tato rovina je kolmá k momentu hybnosti  $\vec{L}$  kvaziplanety:

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times \mu \vec{v} = \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}$$

přičemž vektor  $\vec{L}$  zůstává s časem neproměnný (vnější síly jsou nulové a mají tedy výsledný moment nulový):  $\vec{L} = \vec{L}_0 = \overrightarrow{konst.}$

Dá se ukázat, že i původní Keplerova úloha (tedy se Sluncem a planetou, nejen s kvazisluncem a kvaziplanetou, a nejen v těžištové soustavě) se odehrává v rovině procházející počáteční polohou Slunce, planety a jejich těžiště a pohybující se rovnoměrně přímočaře rychlostí těžiště.

K důkazu vynásobíme rov. (A.16) zleva vektorově polohovým vektorem  $\vec{r}$ . Protože na její pravé straně je též vektor  $\vec{r}$ , dostaneme nulu:

$$\vec{r} \times \mu \ddot{\vec{r}} = -G \frac{\mu M}{r^2} \frac{\vec{r} \times \vec{r}}{|\vec{r}|} = \vec{0}. \quad (\text{A.19})$$

Dále použijeme vztah

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}) = (\dot{\vec{r}} \times \mu \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \mu \ddot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \mu \ddot{\vec{r}} \quad (\text{A.20})$$

a z rov. (A.19) dostaneme *zákon zachování momentu hybnosti* (ZZMH) planety:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} \equiv \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}) = \vec{0}, \quad (\text{A.21})$$

$$(\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}) = \vec{L}_0 = \overrightarrow{konst.} \quad (\text{A.22})$$

Vektor momentu hybnosti  $\vec{L}_0$  tedy nemění svůj směr v prostoru. Protože je roven vektorovému součinu polohového vektoru  $\vec{r}$  (s rychlostí  $\vec{v}$ ), leží polohový vektor kvaziplanety (i její rychlost  $\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$ ) stále v rovině kolmé k  $\vec{L}_0$ . Pohyb v centrálním poli je tedy rovinný.

Při odvození jsme nevyužili závislosti síly na čtverci vzdálenosti. Pohyb částice je tedy rovinný, ať je závislost síly na vzdálenosti jakákoliv.

## A.6 Zákony zachování

Zákon zachování momentu hybnosti (ZZMH, rov. (A.22)) platný pro libovolné centrální pole jsme právě odvodili a použili k důkazu rovinnosti úlohy. Ukážeme, že pro libovolné centrální pole platí i zákon zachování mechanické energie (ZZE) a využijeme toho ke zjednodušení úlohy.

Využijeme relace

$$\frac{d}{dt}(r^n) = n r^{n-2} \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right) = \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}. \quad (\text{A.24})$$

a dosadíme při  $n = -1$  do rov. (A.15) vynásobené skalárně rychlostí  $\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$ :

$$\mu \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \mu v^2 \right) = \mu g (-r^{-3} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) = \frac{d}{dt} \frac{\mu g}{r} \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{\mu g}{r} \right) = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{\mu g}{r} = konst = E_0 \quad (\text{A.27})$$

$$E_k + E_p = E_0, \quad (\text{A.28})$$

což je odvození ZZE pro speciální případ síly (pro obecnou centrální sílu).

Ani zde jsme při odvození nevyužili závislosti síly na čtverci vzdálenosti.

## A.7 Řešení rovinného problému

### A.7.1 Polární souřadnice

Vzhledem k tomu, že uvažované pole je centrální a jeho velikost tedy závisí jen na vzdálenosti  $r$  od počátku souřadnic, budou jistě polární souřadnice výhodnější než kartézské.

Polární souřadnice jsou ortogonální. Proto je v nich vyjádření čtverce rychlosti jednoduché. Nejprve vyjádříme obecné posunutí  $d\ell$  pomocí přírůstku  $dr$  radiální souřadnice (vzdálenosti od počátku) a přírůstku  $d\varphi$  úhlu; při změně o  $d\varphi$  se poloha změní o  $rd\varphi$ . Pak dostaneme vztah mezi přírůstky z Pythagorovy věty:

$$(d\ell)^2 = (dr)^2 + (rd\varphi)^2 \quad (\text{A.29})$$

a odtud vydělením  $(dt)^2$  přímo čtverec rychlosti:

$$v^2 = (\dot{r})^2 + (r\dot{\varphi})^2 \equiv \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2. \quad (\text{A.30})$$

V polárních souřadnicích má tedy ZZE tvar

$$\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{\mu g}{r} = E_0. \quad (\text{A.31})$$

ZZMH zní velmi jednoduše:

$$r^2\dot{\varphi} = \frac{L_0}{\mu} \equiv \lambda \quad (\text{A.32})$$

a umožňuje nám odstranit  $\dot{\varphi}$  z rov. (A.31). V ní se pak vyskytuje jen  $\dot{r}$ ,  $r$  a  $t$ . Můžeme ji tedy řešit samostatně. Upravíme ji do tvaru

$$\frac{1}{2} \left( \dot{r}^2 + \frac{\lambda^2}{r^2} \right) - \frac{g}{r} = \frac{E_0}{\mu}, \quad (\text{A.33})$$

odkud

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \frac{2g}{r} - \frac{\lambda^2}{r^2}}. \quad (\text{A.34})$$

Dále můžeme postupovat dvěma směry:

### A.7.2 Výpočet závislosti vzdálenosti $r$ a času $t$

Jedna možnost je upravit rov. (A.34) na tvar se separovanými proměnnými:

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \frac{2g}{r} - \frac{\lambda^2}{r^2}}} = dt \quad (\text{A.35})$$

a přímo integrovat: dostaneme  $t = t(r)$ , tedy informaci, ve kterém čase se kvaziplaneta dostane do dané vzdálenosti  $r$  od centra.

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \frac{2g}{r} - \frac{\lambda^2}{r^2}}} + t_0. \quad (\text{A.36})$$

Nás by ovšem zajímala spíše inverzní funkce  $r = r(t)$  udávající, kde se částice nachází v daný okamžik  $t$ . Tu bychom dále použili k řešení  $\varphi(t)$  integrací z rov. (A.32). Proto se vrátíme k rov. (A.34) a budeme postupovat jinak.

### A.7.3 Výpočet trajektorie kvaziplanety $r = r(\varphi)$

Jiná možnost řešení redukováného problému je určit trajektorii (parametrizovanou úhlem  $\varphi$ ) a eliminovat čas, tedy ponechat v rov. (A.31) a (A.32) jen proměnné  $r$  a  $\varphi$ .

Výpočet lze vlastně provést jen v monotonní části trajektorie planety, ale na výsledku se toto omezení neprojeví.

Berme tedy  $r = r(\varphi)$ . Vyjádříme

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \dot{r} \frac{r^2}{\lambda} \quad (\text{A.37})$$

dosadíme do rov. (A.34) a separujeme proměnné:

$$d\varphi = \frac{dr\lambda}{r^2\dot{r}} = \frac{\lambda dr}{r^2 \sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \frac{2g}{r} - \frac{\lambda^2}{r^2}}}. \quad (\text{A.38})$$

Integrace pravé strany je samozřejmě čistě záležitostí matematické analýzy (resp. kalkulu). Fyzika však může napomoci ideou: víme-li, že se planety pohybují po kuželosečkách v ohniskové poloze, budeme hledat řešení v tomto tvaru rovnice kuželosečky, tedy

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \text{ resp. } \frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0), \quad (\text{A.39})$$

kde  $p$  určuje „velikost“ (měřítko) kuželosečky a numerická výstřednost (excentricita)  $\varepsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$  určuje její charakter:

- $\varepsilon = 0$ : kružnice;
- $0 < |\varepsilon| < 1$ : elipsa;
- $|\varepsilon| = 1$ : parabola;
- $|\varepsilon| > 1$ : hyperbola.

Tvar rov. (A.39) nás vede na vhodné substituce v rov. (A.38). Nejprve zavedeme  $\rho := \frac{\lambda}{r}$ , takže  $d\rho = -\frac{\lambda}{r^2}dr$ :

$$d\varphi = \frac{-d\rho}{\sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + 2\frac{g}{\lambda}\rho - \rho^2}}. \quad (\text{A.40})$$

Výraz pod odmocninou známým způsobem zbavíme lineárního členu: zavedeme  $\sigma := \rho - \frac{g}{\lambda}$ ,  $d\sigma = d\rho$ ,  $K := \sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \left(\frac{g}{\lambda}\right)^2}$ ,

$$d\varphi = \frac{-d\rho}{\sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \left(\frac{g}{\lambda}\right)^2 - \left(-\frac{g}{\lambda} + \rho\right)^2}} = \frac{-d\sigma}{\sqrt{K^2 - \sigma^2}}. \quad (\text{A.41})$$

a konečně zavedeme  $s := \sigma/K$ ,  $ds = d\sigma/K$ :

$$d\varphi = \frac{-ds}{\sqrt{1 - s^2}}. \quad (\text{A.42})$$

K této funkci již primitivní funkci známe (arccos). Do ní pak postupně dosazujeme všechny předchozí substituce.

$$\varphi = \arccos s + \varphi_0 \quad (\text{A.43})$$

$$s = \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (\text{A.44})$$

$$K = \sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \frac{g^2}{\lambda^2}} \quad (\text{A.45})$$

$$\sigma = K \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (\text{A.46})$$

$$\rho = \frac{g}{\lambda} + K \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (\text{A.47})$$

$$\frac{\lambda}{r} = \frac{g}{\lambda} + K \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{\lambda^2}{g} \frac{1}{r} = 1 + \frac{K\lambda}{g} \cos(\varphi - \varphi_0). \quad (\text{A.49})$$

Tato rovnice přesně odpovídá druhé rov. (A.39), jestliže značíme

$$p = \frac{\lambda^2}{g} = \frac{L_0^2}{G\mu m_1 m_2}, \quad (\text{A.50})$$

$$\varepsilon = \frac{K\lambda}{g} = \sqrt{\frac{2E_0 L_0^2}{\mu G^2 m_1^2 m_2^2}} + 1 \quad (\text{A.51})$$

$$= \sqrt{\frac{2E_0 p}{Gm_1 m_2}} + 1 \quad (\text{A.52})$$

Pro délku  $a$  velké poloosy, resp. vzdálenost  $r_P$  perihelia platí

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} \quad (\text{A.53})$$

$$r_P = \frac{p}{1 + \varepsilon} \quad (\text{A.54})$$

#### A.7.4 Pohyb planety a slunce

Odvodili jsme, že kvaziplaneta se pohybuje po kuželosečce (rov. (A.39)) s ohniskem v počátku souřadnic, tedy s rovnicí

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (\text{A.55})$$

kde  $\varphi_0$  určuje úhel velké osy trajektorie vůči ose  $x$ , a rov. (A.50) a další určují parametr  $p$  i excentricitu  $\varepsilon$ . Charakter trajektorie je zřejmě dán znaménkem energie  $E$  soustavy:

- pro  $E < 0$  je  $\varepsilon < 1$  (elipsa),
- pro  $E = 0$  je  $\varepsilon = 1$  (parabola),
- pro  $E > 0$  je  $\varepsilon > 1$  (hyperbola).

Speciálně pro  $E = -Gm_1 m_2 / 2p$  vyjde  $\varepsilon = 0$  a trajektorií je kružnice.

Z pohybu kvaziplanety odvodíme pohyb skutečné planety a skutečného Slunce dosazením výsledku redukované úlohy pro kvaziplanetu do rov. (A.17) a (A.18) s tím, že obvykle předpokládáme těžiště soustavy v klidu, tedy  $\vec{R} = \vec{0}$ . Je tedy

$$\vec{r}_1 = \frac{-m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} = -\frac{\mu}{m_1} \vec{r} \quad (\text{A.56})$$

$$\vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} = \frac{\mu}{m_2} \vec{r} \quad (\text{A.57})$$

Snadno nahlédneme, že i v tom případě zůstane charakter kuželosečky zachován a změní se jen parametry její trajektorie.

#### A.7.5 Shrnutí a diskuse

Vyřešili jsme pohybové rovnice pro soustavu dvou částic při síle mezi nimi dané Newtonovým gravitačním zákonem (rov. (A.3)). Zjistili jsme, že v těžišťové soustavě je trajektorií planety (i Slunce) kuželosečka s ohniskem (nikoli středem!) v těžišti soustavy.

Energie  $E$  soustavy určuje charakter trajektorie planety takto:

- pro  $E < 0$  má planeta uzavřenou trajektorii eliptickou (případně kruhovou),
- pro  $E = 0$  by měla planeta trajektorii parabolickou,
- pro  $E > 0$  by měla planeta trajektorii hyperbolickou.

Poslední dva případy odpovídají návštěvníkům typu komety s původem mimo Sluneční soustavu. (U nich, chceme-li být v souladu s realitou, zřejmě nemůžeme zanedbat veškeré ostatní objekty kromě Slunce a uvažovaného návštěvníka.)

Jde-li skutečně o soustavu Slunce + planeta s hmotností planety zanedbatelnou proti hmotnosti Slunce, pak je Slunce prakticky v klidu a jeho střed je i těžištěm soustavy. Naše řešení se však hodí i pro soustavu typu dvojhvězdy tvořené složkami se stejnou či srovnatelnou hmotností, opisujícími pak eliptické trajektorie kolem společného těžiště.

Připomeňme konečně, že výsledek platí i v případě, že Slunce a planety nejsou bodové, ale že jde o koule po vrstvách homogenní.

## A.8 Keplerovy zákony

### A.8.1 1. Keplerův zákon

*Planety se pohybují po elipsách málo odlišných od kružnic, v jejichž společném ohnisku je Slunce.*

Tento zákon je speciálním důsledkem rov. (A.39), přihlédneme-li k tomu, že

- planety jsou vůči Slunci lehké, malé a jsou daleko od sebe, takže jejich vzájemné působení lze v prvním přiblížení zanedbat a řešit soustavu planet a Slunce jako superpozici soustav „jediná planeta a Slunce“;
- trajektorii každé z planet je kuželosečka podle rov. (A.39), resp. rov. (A.53). Parabola ani hyperbola však pro planetu nepřicházejí v úvahu (vedou z nekonečna a nejsou periodické).

Konkrétními počátečními podmínkami bylo dáno, že každá z trajektorií má malou výstřednost (je blízká ke kružnici) a že leží všechny blízko jediné společné roviny – roviny ekliptiky. Jak ukazují numerické simulace, byla a bude tato konstelace stabilní ještě několik miliard let; poté se však ekliptika zbortí, a rovněž Slunce ve svém dalším vývoji se rozroste tak, že pohltí Merkur atp.

### A.8.2 2. Keplerův zákon

(Zákon ploch:) *Plošná rychlost  $\vec{w}$  planety je podél celé její trajektorie konstantní.*

Má-li planeta posuvnou rychlost  $\vec{v}(t)$ , pak elementární plocha opsaná jejím průvodičem za dobu  $dt$  je dána plochou  $dP = |\vec{w}|dt$  úzkého trojúhelníku o vrcholu ve Slunci a se stranami danými vektory  $\vec{r}(t)$ ,  $\vec{v}dt$  a  $\vec{r}(t + dt)$ . Tato plocha je polovinou velikosti vektorového součinu  $\vec{r} \times \vec{v}dt$  a souvisí jasně s momentem hybnosti  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times \mu\vec{v}$  vztahem

$$w = |\vec{w}| = \frac{dP}{dt} = \frac{1}{2\mu}|\vec{L}| = \frac{L_0}{2\mu} \quad (\text{A.58})$$

Zákon zachování momentu hybnosti byl pro obecné centrální pole odvozen jako rov. (A.22).

### A.8.3 3. Keplerův zákon

*Poměr třetích mocnin velkých poloos eliptických trajektorií dvou planet je roven poměru druhých mocnin jejich oběžných dob.*

Pro kruhové trajektorie lze tento zákon odvodit na středoškolské úrovni; tam je prostě dostředivá síla  $F(r) = \mu v^2/r$  (nutná pro to, aby planeta konala rovnoměrný kruhový pohyb) dána gravitační silou podle rov. (A.3), resp. rov. (A.16) a předcházejících:

$$\frac{\mu v^2}{r} = G \frac{M\mu}{r^2}; \quad r = a; \quad v = \frac{2\pi a}{T} \quad (\text{A.59})$$

$$\left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 \frac{1}{a} = G \frac{M}{a^2} \quad (\text{A.60})$$

Odtud dostaneme hledaný vztah

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \quad (\text{A.61})$$

Pro obecnou eliptickou trajektorii využijeme toho, že plošná rychlost  $w$  je konstantní; za periodu oběhu tedy planeta urazí plochu elipsy, tedy  $\pi ab$ :

$$wT = \pi ab \quad ( )^2 \quad (\text{A.62})$$

$$\frac{L_0^2}{4\mu^2} T^2 = \pi^2 a^4 (1 - \varepsilon^2) = \pi^2 a^3 p \quad (\text{A.63})$$

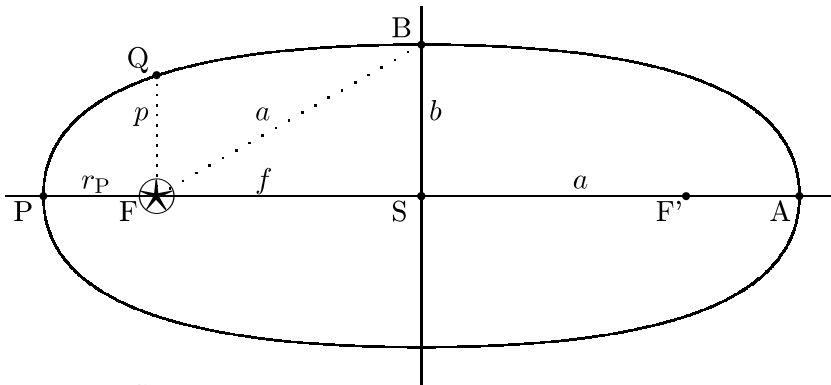
a po dosazení za  $p$  z rov. (A.50) a  $\mu$  z rov. (A.11) se  $L_0^2$  vykrátí:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{L_0^2}{4\pi^2 \mu^2 p} = \frac{GM}{4\pi^2} \quad (\text{A.64})$$

## A.9 Označení

Pro pohodlí připomeneme z geometrie základní vlastnosti elipsy a shrneme zde užívané označení.

### A.9.1 Elipsa



**střed**  $S$ ;

**ohniska**  $F, F'$ ;  $SF = SF' = f$ ; slunce leží v  $F$

**perihelium**  $P$ ;  $FP = r_P = a(1 + \varepsilon)$  (pro Zemi a družici: perigeum)

**afelium**  $A$ ;  $FA = r_A = a(1 - \varepsilon)$  (pro Zemi a družici: apogeum)

**velká poloosa**  $SA = SP = FB = a$

**malá poloosa**  $SB = b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$

**parametr**  $FQ = p = b^2/a = a(1 - \varepsilon^2)$

**numerická výstřednost (excentricita)**  $\varepsilon = \frac{f}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

Rovnice elipsy v kartézských souřadnicích ve středové poloze (střed v počátku souřadnic) s velkou osou ve směru  $x$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{A.65})$$

Rovnice elipsy v polárních souřadnicích v ohniskové poloze (ohnisko v počátku souřadnic):

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad , \quad (\text{A.66})$$

kde  $\varphi_0$  určuje úhel velké osy trajektorie vůči ose  $x$ .

### A.9.2 Označení užitá v Keplerově úloze

$m_1$  hmotnost skutečného slunce

$m_2$  hmotnost skutečné planety

$\vec{r}_1$  polohový vektor skutečného slunce

$\vec{r}_2$  polohový vektor skutečné planety

$M := m_1 + m_2$  celková hmotnost; gravitační hmotnost kvazislunce

$\vec{R} := \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}$  polohový vektor těžiště soustavy

$\mu := \frac{m_1 m_2}{M}$  redukovaná hmotnost (kvaziplanety)

$\vec{r} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  polohový vektor kvaziplanety

$\vec{v} := \dot{\vec{r}}$  vektor rychlosti kvaziplanety

$G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$  gravitační konstanta

$g := GM$

$\vec{L} := \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}$  moment hybnosti kvaziplanety (zůstává konstantní, roven  $\vec{L}_0$ )

$L_0 := |\vec{L}_0|$ , např. z perihelia:  $L_0 = r_P v_P$

$p := \frac{L_0^2}{\mu^2 GM} = \frac{L_0^2}{\mu G m_1 m_2} = \frac{L_0^2 M}{G(m_1 m_2)^2}$  parametr elipsy (trajektorie kvaziplanety)

$E_0 := \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{\mu GM}{r}$  celková mechanická energie kvaziplanety v gravitačním poli kvazislunce (pro planetu  $E_0 < 0$ , pro kometu  $E_0 \geq 0$ )

$\varepsilon := \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{2E_0 p}{G m_1 m_2}}$  excentricita trajektorie kvaziplanety

$r_P = \frac{p}{1+\varepsilon}$  vzdálenost kvaziplanety od kvazislunce v periheliu

$r_A = \frac{p}{1-\varepsilon}$  vzdálenost kvaziplanety od kvazislunce v afeliu

# Příloha B

## Srážka (ráz)

2016-08-24

### B.1 Srážka obecně

**Srážka** *{collision}* těles (dříve též **ráz** těles; nesouvisí s termínem „rázy“, str. 54), v mikrosvětě také často zvaná **rozptyl** *{scattering}* je děj, při němž se rychlost tělesa (sněrm velikost nbo obojí) podstatně změní za velmi krátkou dobu<sup>1</sup>. Představuje velmi důležitou oblast fyziky. V kvantové fyzice je naším nejsilnějším prostředkem k poznávání vlastností elementárních struktur, svůj velký význam má i v klasické fyzice, a to jak v každodenní technice, tak i např. v gravitačním praku, kdy je raketa urychlena průletem gravitačního pole pohybující se planety.

Budou nás zajímat jen dvě situace *systému*<sup>2</sup> srážejících se těles:

1. stav (dávno) před srážkou, zvaný **počáteční** *{initial}*, index *i*; zpravidla v čase  $t \rightarrow -\infty$ ;
2. stav (dlouho) po srážce, zvaný **koncový** *{final}*, index *f*; zpravidla v čase  $t \rightarrow +\infty$ ,

přičemž v obou těchto stavech jsou tělesa natolik vzdálená, že jejich interakci lze zanedbat.

Vlastní detailní průběh samotné srážky nás co možná nebude zajímat vůbec; bude stačit jen jeho celková charakteristika (srážka pružná nebo nepružná, centrální nebo necentrální apod.) projevující se ve vztahu mezi stavem počátečním a koncovým.

♣ Čtenář znalý Cimmmana jistě poznal, že v popisu srážek vycházíme přímo z jeho filozofie externismu, což je pravý opak solipsismu: podle externismu neexistuje „já“. Naopak existuje všechno, co je kolem tohoto neexistujícího „já“.

Tělesa na sebe při srážce pochopitelně působí. Může to být „na dálku“ – gravitační či elektromagnetické pole, může to být „na blízko“ – kontaktní **nárazové síly** dané materiálem těles: uplatní se drsnost povrchu, pružnost, **vzpruživost** (zvaná též **činitel restituace**, míra, do jaké srážkou zdeformované těleso obnoví svůj původní tvar). Chceme se však vyhnout řešení pohybových rovnic (numerickému, krok po kroku s vzrůstajícím časem o  $dt$ , anebo takovému, jak jsme např. řešili v příl. A při parabolickém či hyperbolickém průletu tělesa kolem Slunce). Předpokládáme jen, že síly, kterými lze interakci popsat, jsou pro pružnou srážku konzervativní (zachovávají celkovou energii), nemusí však ubývat se čtvercem vzdálenosti, ani nemusí být centrální, mohou se uplatnit i momenty sil (rozvažte např. silové působení mezi elektrickým nábojem a elektrickým dipólem: síly nejsou centrální, na dipól působí od náboje kroutivý moment, na náboj od dipólu nikoli). Předpokládá se dále, že síly ubývají do nekonečna tak, aby dostatečně vzdálená tělesa na sebe působila jen zanedbatelně málo. Neuvažujeme však žádné *vnější* vlivy, síly ani vazby; pokud by byly, vhodně je odtransformujeme. Rovněž předpokládáme, že „v nekonečnu“ mají srážející se tělesa tutéž potenciální energii a lze ji položit rovnu nule. Systém tvořený srážejícími se tělesy je tedy *izolovaný*.

*Pro izolovaný systém platí zákony zachování celkové energie  $E_0$ , hybnosti  $\vec{P}$ , momentu hybnosti  $\vec{B}$  a hmotnosti  $m$ . Další aditivní integrály pohybu neexistují.*

<sup>1</sup>Těleso tedy projde velkým zrychlením, zapůsobí na něj náhlá síla. Toto je sice vymezení subjektivní, většinou antropocentrické, v praxi to však nevadí.

<sup>2</sup>Pro větší přehlednost mluvíme o *systému* srážejících se těles k odlišení od vztažné *soustavy*.

Zde zjistíme, co lze z těchto zákonů odvodit. Užité přístupy připomíná svým použitím integrálů pohybu analytickou mechaniku. Lze ho použít i ve speciální teorii relativity (s relativistickou hmotností a Lorentzovým skládáním rychlostí). Také je použitelný v kvantové teorii pro mikrosvět; proto občas zmíníme jako objekt např. atomy a jejich specifika (vlastní moment hybnosti – spin  $\vec{s}$ , princip nerozlišitelnosti stejných částic). Výsledky jsou platné pro libovolný počet těles, ale je jich ovšem málo: v této jednoduché a obecné formě však postačí k vyřešení nejjednodušších případů srážky dvou těles. Složitější úlohy (srážka výstředná, šikmá, vrtná) vyžadují další rozbor. A už úloha tří těles může vést na deterministický chaos, změnu vázaných stavů na volné a naopak atp.

## B.2 Srážka dvou těles

### B.2.1 Strategie

Inerciální vztažnou soustavu  $\mathcal{L}$ , v níž je úloha zadána, nazýváme **laboratorní**. (Často v ní bývá v klidu některé z těles, zvané v tomto kontextu **terč**; není to však nutné.) V  $\mathcal{L}$  má těžiště systému zpravidla nenulovou rychlost  $\vec{W}_t$ . Pro výpočet proto přejdeme (Galileovou transformací) do té inerciální vztažné soustavy  $\mathcal{T}$  zvané **těžišťová soustava**<sub>{center-of-mass frame}</sub>, kde těžiště systému leží v počátku souřadnic  $O$  v klidu<sup>3</sup>, má tedy nulovou rychlost. Vzhledem k zákonu zachování hybnosti zůstane těžiště v bodě  $O$  stále, i po srážce.

Při Galileově transformaci s rychlostí  $\vec{W}_t$  se všechny rychlosti v  $\mathcal{T}$  oproti  $\mathcal{L}$  zmenší o  $\vec{W}_t$ . Rozdíl dvou rychlostí — např. vzájemná rychlost  $\vec{W}$  dvou těles — se tedy nezmění. Toho s výhodou využijeme při formulaci úlohy v těžišťové soustavě.

### B.2.2 Těžišťová soustava $\mathcal{T}$

V těžišťové soustavě  $\mathcal{T}$  má srážka dvou těles tak jasnou symetrii, že řešení je vidět na první pohled: stačí se prostě od srážky v čase vracet — provést inverzi času  $t \rightarrow -t$ , a celková hybnost systému (rovná nule v  $\mathcal{T}$ ) ani energie se nezmění. Do  $\mathcal{L}$  se pak z  $\mathcal{T}$  dostaneme zpětnou Galileovou transformací, tj. přičtením rychlosti těžiště systému.

Rovněž geometrie úlohy v  $\mathcal{T}$  je podstatně jednodušší než v  $\mathcal{L}$ : Tečny k trajektoriím těles na počátku („směry výstřelů“)

- buď jsou v  $\mathcal{L}$  mimoběžné; pak jsou v  $\mathcal{T}$  rovnoběžné, těžiště leží mezi nimi,
- nebo jsou v  $\mathcal{L}$  různoběžné; pak v  $\mathcal{T}$  splývají, těžiště leží na nich,
- nebo jsou v  $\mathcal{L}$  rovnoběžné; pak jsou i v  $\mathcal{T}$  rovnoběžné, těžiště leží mezi nimi,
- nebo v  $\mathcal{L}$  splývají; pak i v  $\mathcal{T}$  splývají a těžiště leží na nich.

### B.2.3 Označení

- Vektory značíme šipkou:  $\vec{V}$ .  
 $V$  je velikost vektoru  $\vec{V}$  (tedy  $V \geq 0$ )  
 $V_x$  je složka vektoru  $\vec{V}$  (tedy  $-\infty < V_x < \infty$ ).

Zabýváme se dále dvěma tělesy:  $T$  a  $t$ .

- $\vec{V}$  je rychlost<sup>4</sup> tělesa  $T$
- $\vec{v}$ : malé písmeno značí veličinu tělesa  $t$
- $\vec{V}'$ : čárka značí veličinu po srážce
- $\vec{V}_{\mathcal{T}}$ : index  $\mathcal{T}$  značí veličinu měřenou v těžišťové soustavě  $\mathcal{T}$

<sup>3</sup>Striktně vzato, pro určení rychlostí není nutné se starat o polohu těžiště systému těles vůči počátku  $O$  soustavy  $\mathcal{T}$ . Hlavně že má v  $\mathcal{T}$  těžiště systému nulovou rychlost.

<sup>4</sup>Přesněji: rychlost těžiště tělesa  $T$ .

- $\vec{W} = \vec{V} - \vec{v}$  je vzájemná rychlost těles (je stejná v každé vztažné soustavě,  $\mathcal{L}$  i  $\mathcal{T}$ )
- $\vec{W}_t$  je rychlost těžiště systému těles ( $T + t$ ):

$$\vec{W}_t = \frac{M\vec{V} + m\vec{v}}{M + m} \quad (\text{B.1})$$

- $\vec{P} = M\vec{V}$  je hybnost tělesa  $T$
- $E_0$  je celková energie tělesa  $T$
- $E_k = \frac{1}{2}MV^2$  je kinetická energie posuvného pohybu tělesa  $T$ ,  
případně ještě obecněji
- $\vec{B} = \vec{R} \times \vec{P}$  je moment hybnosti  $T$  vůči počátku souřadnic
- $\vec{S} = J\vec{\Omega}$  je vlastní moment hybnosti rotujícího tělesa, případně jeho spin

Budeme dále předpokládat srážku netříšřivou:

$$M = M' \quad , \quad m = m' \quad . \quad (\text{B.2})$$

Zákony zachování hybnosti, energie a momentu hybnosti celého systému pak znějí

$$M\vec{V} + m\vec{v} = M\vec{V}' + m\vec{v}' \quad (\text{B.3})$$

$$E_0 + e_0 = E'_0 + e'_0 \quad (\text{B.4})$$

$$\vec{B} + \vec{S} + \vec{b} + \vec{s} = \vec{B}' + \vec{S}' + \vec{b}' + \vec{s}' \quad (\text{B.5})$$

Zachovávali se při srážce i samotná kinetická energie posuvného pohybu, mluvíme o (dokonale) **pružné srážce** a platí

$$\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}mv'^2 \quad (\text{pružná srážka}) \quad (\text{B.6})$$

Při dokonale **nepružné srážce** se po srážce tělesa od sebe vůbec neodrazí, mají tutéž rychlost:

$$\vec{V}' = \vec{v}' \quad ; \quad W' = 0 \quad (\text{nepružná srážka}) \quad (\text{B.7})$$

Newton zavedl pro charakteristiku reálných, nedokonale pružných srážek **vzpruživost** {coefficient of restitution} neboli **činitel restituce**  $k$  definovaný podílem velikosti skutečné vzájemné rychlosti  $W'_{sk}$  po srážce ku velikosti vzájemné rychlosti  $W'$  po srážce dokonale pružné:

$$k = \frac{W'_{sk}}{W'} \quad (\text{vzpruživost, činitel restituce}) \quad (\text{B.8})$$

U makroskopických těles leží  $k$  mezi 1 (srážka dokonale pružná; blíží se jí srážka ocelových koulí) a 0 (srážka dokonale nepružná, např. srážka dvou blátěných koulí).

↔ Při klasické srážce se sice může rotační energie  $E_r$  i potenciální energie  $E_p$  měnit na posuvnou  $E_k$  a naopak, ale vnitřní energie  $E_v$  se proměnit zpět v mechanickou nemůže, protože její nárůst byl spjat i s nárůstem entropie:  $\Delta E_v \leq T\Delta S$ , a entropie samovolně neklesne. V kvantových srážkách to však je možné: při srážce excitované částice se excitační energie může uvolnit a urychlit rozptylující se částice. Fenomenologické veličiny jako teplota  $T$  či entropie  $S$  postrádají svůj makroskopický smysl. Pokud je  $k > 1$ , mluví se o **superelastické srážce** {superelastic}.

Dále použijeme rov. (B.3) a buď rov. (B.6) (pružná srážka), anebo rov. (B.7) (nepružná srážka).

## B.3 Srážka dvou hmotných bodů podél přímky

### B.3.1 Příklad úlohy

Uvažujme kouli  $K$ , která narazí do jiné, rovněž se pohybující koule  $k$ . Koule jsou homogenní, nerotují a jejich hmotné středy (těžiště) se pohybují po téže přímce  $p$  (srážka je přímá a středová, jak později zavedeme). Koule konají pouze posuvný pohyb a můžeme je tedy modelovat hmotnými body.

### B.3.2 Popis v těžišťové soustavě $\mathcal{T}$

V těžišťové soustavě  $\mathcal{T}$  platí pro souřadnici těžiště systému podle definice

$$\vec{\xi}_{\mathcal{T}} = \frac{M\vec{X}_{\mathcal{T}} + m\vec{x}_{\mathcal{T}}}{M+m} = \vec{0} \quad (\text{stále}) . \quad (\text{B.9})$$

Rychlost  $\vec{W}_{t\mathcal{T}}$  těžiště systému v  $\mathcal{T}$  je rovněž nulová:

$$\dot{\vec{\xi}} = \vec{W}_{t\mathcal{T}} = \frac{M\vec{V}_{\mathcal{T}} + m\vec{v}_{\mathcal{T}}}{M+m} = \vec{0} \quad (\text{stále}) , \quad (\text{B.10})$$

a celková hybnost systému také:

$$\vec{P}_{\mathcal{T}} + \vec{p}_{\mathcal{T}} = M\vec{V}_{\mathcal{T}} - m\vec{v}_{\mathcal{T}} = 0 , \quad (\text{B.11})$$

Odtud plyne nepřímá úměra velikosti rychlosti tělesa v  $\mathcal{T}$  a jeho hmotnosti. Při znalosti vzájemné rychlosti  $\vec{W} = \vec{V}_{\mathcal{T}} - \vec{v}_{\mathcal{T}}$  dostaneme snadno rychlosti každého z těles v  $\mathcal{T}$  před srážkou:

$$\vec{V}_{\mathcal{T}} = \frac{m}{M+m}\vec{W} \quad ; \quad \vec{v}_{\mathcal{T}} = -\frac{M}{M+m}\vec{W} . \quad (\text{B.12})$$

Připomeňme, že  $\vec{W}$ ,  $m$  i  $M$  mají v  $\mathcal{L}$  tytéž hodnoty jako v  $\mathcal{T}$ .

### Pružná srážka

Při pružné srážce se zachová úhrnná hybnost  $\vec{P} + \vec{p}$  i úhrnná kinetická energie posuvného pohybu. Rov. (B.3),(B.6) dostanou tvar

$$M\vec{V} + m\vec{v} = \vec{0} = M\vec{V}' + m\vec{v}' \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 = E = \frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}mv'^2 \quad (\text{B.14})$$

a zřejmě jim vyhovuje řešení, kdy si každé z těles po srážce zachová svou velikost rychlosti ( $V = V'$ ,  $v = v'$  a event. se změnil směr vektorů). Zůstaneme-li podél osy  $x$ , jsou jen dvě možnosti:

- Rychlosti i hybnosti každého tělesa zůstanou nezměněny (tělesa se buď netrefila, nebo prošlo jedno skrz druhé):  $\vec{V} = \vec{V}'$ ,  $\vec{v} = \vec{v}'$ ,  $\vec{W} = \vec{W}'$ , a tedy podle rov. (B.12) platí podél osy  $x$

$$V'_x = V_x = \frac{m}{M+m}W_x \quad (\text{B.15})$$

$$v'_x = v_x = -\frac{M}{M+m}W_x \quad (\text{B.16})$$

- Rychlosti i hybnosti každého tělesa změnil znaménko:  $\vec{V}' = -\vec{V}$ ,  $\vec{v}' = -\vec{v}$ ,  $\vec{W} = -\vec{W}'$ , což odpovídá inverzi času  $t \rightarrow -t$ . Podle rov. (B.12) platí podél přímky  $x$

$$V'_x = -V_x = -\frac{m}{M+m}W_x \quad (\text{B.17})$$

$$v'_x = -v_x = \frac{M}{M+m}W_x \quad (\text{B.18})$$

(Znovu připomeňme, že  $\vec{W}$ ,  $\vec{W}'$ ,  $m$  i  $M$  mají v  $\mathcal{L}$  tytéž hodnoty jako v  $\mathcal{T}$ .)

### Nepružná srážka

Při nepružné srážce se vyžaduje zachování úhrnné hybnosti (je v  $\mathcal{T}$  nulová) a minimální úhrnná kinetická energie posuvného pohybu; ta bude minimální (nulová), když obě tělesa zůstanou po srážce v těžišti v klidu:

$$V'_x = 0 \quad (\text{B.19})$$

$$v'_x = 0 \quad (\text{B.20})$$

Poznamenejme, že jakýkoliv systém těles má ve své těžištové soustavě  $\mathcal{T}$  celkovou kinetickou energii posuvného pohybu nejmenší (oproti energiím měřeným v jiných inerciálních vztažných soustavách).

### B.3.3 Popis srážky v laboratorní soustavě $\mathcal{L}$

Pro popis v  $\mathcal{L}$  stačí výsledné rychlosti z  $\mathcal{T}$  zvětšit o rychlost  $\vec{W}_t = (M\vec{V} + m\vec{v})/(M + m)$  těžiště systému (tedy o rychlost  $\mathcal{T}$  vůči  $\mathcal{L}$ ). Následující rovnice jsou platné zcela obecně, nejen v 1D:

$$\vec{V} = \vec{V}_{\mathcal{T}} + \vec{W}_t \quad (\text{B.21})$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{\mathcal{T}} + \vec{W}_t \quad (\text{B.22})$$

$$\vec{V}' = \vec{V}'_{\mathcal{T}} + \vec{W}_t \quad (\text{dokonale pružná}) \quad (\text{B.23})$$

$$\vec{v}' = \vec{v}'_{\mathcal{T}} + \vec{W}_t \quad (\text{dokonale pružná}) \quad (\text{B.24})$$

$$\vec{V}' = \vec{v}' = \vec{W}_t \quad (\text{dokonale nepružná}) \quad (\text{B.25})$$

Jednodušeji to snad zapsat nejde.

V dalším 1D postupu opět nahradíme každý vektor (např.  $\vec{V}$ ) jeho složkou ( $V_x$ ).

### Pružná srážka

Jsou opět dvě možnosti, jak zůstat s pohybem na ose x:

Po dosazení za  $\vec{V}'_{\mathcal{T}}$  z rov. (B.15) a  $\vec{W}_t$  z rov. (B.1) dostaneme triviální řešení

$$V'_x = W_x \frac{m}{M+m} + \frac{MV_x + mv_x}{M+m} = V_x \quad (\text{B.26})$$

$$v'_x = -W_x \frac{M}{M+m} + \frac{MV_x + mv_x}{M+m} = v_x \quad (\text{B.27})$$

zatímco po dosazení za  $\vec{V}'_{\mathcal{T}}$  z rov. (B.15) dostaneme po rozepsání

$$V'_x = -W_x \frac{m}{M+m} + \frac{MV_x + mv_x}{M+m} = \frac{MV_x - mV_x + 2mv_x}{M+m} \quad (\text{B.28})$$

$$v'_x = W_x \frac{M}{M+m} + \frac{MV_x + mv_x}{M+m} = \frac{mv_x - MV_x + 2MV_x}{M+m} \quad (\text{B.29})$$

### Nepružná srážka

Dosazením z rov. (B.19) dostáváme řešení

$$V'_x = v'_x = W_{tx} = \frac{MV_x + mv_x}{M+m} \quad (\text{B.30})$$

Obě tělesa se po srážce pohybují společně rychlostí rovnou původní rychlosti těžiště systému.

## B.4 Aplikace

### B.4.1 Pružná srážka stejných těles

Narazí-li pružné těleso rychlostí  $V_x$  do stejného stojícího tělesa ( $v = 0$ ), pak se buď minou, anebo si „vymění rychlosti“:  $V'_x = 0$ ,  $v'_x = V_x$ . Jde-li v kvantové mechanice o tytéž (tedy nerozlišitelné) částice, pak jde o jediný případ, nikoli o dva.

### B.4.2 Kolmý odraz míčku od pevné zdi

Pevnou zeď lze pokládat za nekonečně velkou a těžkou kouli, formálně  $V_x = 0$ ,  $M \gg m$ ,  $W = -v_x$ . Vzorce z rov. (B.28), (B.29) dávají pak podle očekávání  $V'_x \rightarrow 0$  a  $v'_x \rightarrow -v_x$ ; míček jen změní znaménko rychlosti, velikost zůstane stejná.

### B.4.3 Kolmý odraz pingpongového míčku od pátky

Pevně vedenou pátku lze podobně jako v předchozím případě nahradit pohybující se nekonečně těžkou koulí, jen tentokrát  $V_x > 0$ ,  $M \gg m$ ,  $W = V_x - v_x$ . Vzorce z rov. (B.28), (B.29) dávají tentokrát  $V'_x \rightarrow V_x$  a  $v'_x \rightarrow -v_x + 2V_x$ .

K původní velikosti rychlosti míčku se přičte dvojnásobek rychlosti pátky.

### B.4.4 Necentrální srážka

Pokud se tělesa pohybovala v  $\mathcal{T}$  k sobě po přímce  $p$  (procházející těžištěm  $T$  systému), mohou se po necentrální srážce rozletět stejnými rychlostmi jako dříve, ale po libovolné jiné přímce  $p'$ , rovněž procházející  $T$ , a neporuší tím žádný ze zákonů zachování.

### B.4.5 Gravitační prak

Tzv. **gravitační prak** {gravitational slingshot} umožňuje raketě prolétající kolem planety přijmout část její pohybové energie ke svému urychlení ve směru pohybu planety. Je to zřejmé následující úvahy:

Ekliptiku pokládejme během srážky za inerciální laboratorní soustavu  $\mathcal{L}$ . Planeta obíhá kolem Slunce posuvnou rychlostí  $\vec{W}_t$  a má hmotnost  $M$ , proti níž je hmotnost rakety  $m$  zanedbatelná:  $M \gg m$ . Pokládejme proto soustavu spojenou s planetou po dobu „srážky“ (průletu rakety v okolí planety) za rovněž inerciální těžišťovou soustavu  $\mathcal{T}$ . Raketa přilétá k planetě s rychlostí vůči ekliptice ( $\mathcal{L}$ ) rovnou  $\vec{v}$ , ovšem vůči planetě  $\mathcal{T}$  rovnou  $\vec{v}_{\mathcal{T}} = \vec{v} - \vec{W}_t$  a odlétá rychlostí v  $\mathcal{T}$  stejně velkou, jakou přiletěla  $|\vec{v}'_{\mathcal{T}}| = |\vec{v}_{\mathcal{T}}|$ , ale jiným směrem. Vůči  $\mathcal{L}$  má ovšem rychlost  $\vec{v}' = \vec{v}'_{\mathcal{T}} + \vec{W}_t$ , a ta má jinou velikost (i směr), než původní  $\vec{v}$ .

## B.5 Co ovlivňuje srážku

Problematika srážek je rozsáhlý a dosud živý obor, třebaže se studuje už 400 let; zde jsme naznačili a vyřešili jen nejjednodušší úlohy. Pro případné další studium připomínáme faktory, které je nutno uvážit při řešení úloh z reálné praxe.

### B.5.1 Geometrie srážky těles

Předpokládejme, že se tělesa srazí tak, že se dotknou v jediném bodě. Obě tělesa pak mají v tomto bodě společnou tečnou rovinu  $\rho$  a k ní kolmou normálu  $\nu$ . Podle nich klasifikujeme srážky:

**středová (centrická)** srážka nastane, leží-li těžiště obou těles na vektorové přímce nárazových sil. Pokud tomu tak není, jde o srážku **výstřednou (excentrickou)**;

**přímá** srážka nastane, je-li vzájemná rychlost  $\vec{W}$  těles kolmá k  $\rho$  (a tedy rovnoběžná s  $\nu$ ). Pokud tomu tak není, jde o srážku **šikmou**.

**vrtná** srážka nastane, pokud tělesa různě rotují kolem normály  $\nu$ .

**tříštivá** srážka nastane, pokud se při ní tělesa mění nebo vznikají nová.

### B.5.2 Povrch těles

Pokud tělesa rotují nebo pokud srážka není přímá, mají povrchy těles v místě styku nenulovou složku rychlosti v tečné rovině a záleží i na drsnosti povrchu, např. zda se sdílí vlastní moment hybnosti rotujícího tělesa.

### B.5.3 Materiál těles

Jak již bylo řečeno, materiál těles rozhoduje, do jaké míry se kinetická energie  $E_k$  posuvného pohybu systému srážkou promění v jiné formy energie (zejména vnitřní). Podle toho pak probíhá srážka (pružná, nepružná; vzpruživost). Uvedme však, že vzpruživost  $k$  (str. 117) není úplně konstantní – klesá s rostoucí relativní rychlostí  $W$  a naopak pro  $W \rightarrow 0$  roste a blíží se obvykle 1.



# Příloha C

## Normy: veličina, měření, zápis hodnot

2015-04-20

### C.1 Veličina: pojem, hodnota veličiny

**Veličina** je taková *vlastnost jevu* (např. zvuk), *tělesa* (např. tento list papíru) nebo *materiálu* (mosaz daného složení), kterou lze vyjádřit *číslem* a *referencí*. Toto číslo nazýváme často „*číselná hodnota* (dané veličiny)“; referencí bývá nejčastěji *jednotka* (např. milimetr za sekundu, značka  $\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$  nebo  $\text{mm/s}$ ), může to být též např. měřicí<sup>1</sup> postup (tvrdost podle Rockwella C se zátěží 150 kg, značka HRC(150 kg)).

Podle dřívějšího pojetí (VIM 3) se předpokládalo, že pro konkrétní objekt (např. pro tento list papíru) má konkrétní veličina (např. jeho tloušťka  $l_0$ ) jistou zcela *přesnou*, ale *neznámou* hodnotu (např.  $l_0 = 0,119\,827\,654\,376\ldots$  mm). Měříme-li ji, dostaneme vždy nějakou náhodnou hodnotu jinou (např.  $l = 0,116$  mm), nejspíše blízkou, ale vždy zatíženou principiálně neznámou *chybou* (zde je tedy  $\Delta l = 0,003\,827\,654\,376\ldots$  mm).

Současné pojetí (VIM 4) je jiné: předpokládá samotnou *definici hodnoty* veličiny pomocí *intervalu* (např. 0,115 mm až 0,121 mm, tedy  $l_0 = 0,118(3)$  mm) s nenulovou *nejistotou* (zde 0,003 mm), přičemž libovolná hodnota (např.  $l_1 = 0,116\,425\,76$  mm anebo  $l_2 = 0,120\,05$  mm) uvnitř tohoto intervalu může stejně dobře sloužit pro daný účel (hodnota tloušťky papíru).

### C.2 Zápis číselných hodnot veličin

Zápis číselných hodnot doporučuje norma ISO takto:

$$s = 23,386(12) \text{ mm} \quad (\text{doporučuje se}) \quad (\text{C.1})$$

Tento zápis má stejný význam jako dřívější

$$s = 23,386 \text{ mm} \pm 0,012 \text{ mm}, \text{ nebo} \quad (\text{C.2})$$

$$s = (23,386 \pm 0,012) \text{ mm}, \quad (\text{C.3})$$

ale se dvěma výhodami:

- je kratší a přehlednější (odpadají úvodní nuly v nejistotě)
- je věcně správný, zatímco zápis podle rov. (C.3) správný není: znamenal by vlastně jen dvě krajní hodnoty, nikoli celý interval mezi nimi (srv. obvyklý zápis řešení kvadratické rovnice  $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D})/2a$ ).

Rozměrově chybné jsou zápisy bez závorek typu

$$s = 23,386 \pm 0,012 \text{ mm} \quad (\text{chybně}). \quad (\text{C.4})$$

---

<sup>1</sup>Rozlišujte „měřicí“ = určený k měření, od „měřící“ = ten, který právě měří. Podobně odlišujte čtecí, řídící, kropící od čtoucí, řídící, kropící atp.

### C.3 Popis os grafu, nadpis sloupce tabulky

Pro veličinu  $Q$  značí  $[Q]$  její rozměr a  $\{Q\}$  její číselnou hodnotu (jednotku lze též udat jako index u složené závorky). Správné označení v nadpisu číselných hodnot v tabulce či na ose grafu je např.

$$s/\text{mm}, \quad v/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1}), \quad v/(\text{m/s}), \quad \frac{v}{\text{m/s}}.$$

Je také správné, ale méně praktické, psát

$$\{s\}_{\text{mm}}, \quad \{v\}_{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}, \quad \{v\}_{\text{m/s}}.$$

Dříve občas užívaný zápis typu  $s[\text{mm}]$  je nesprávný a navíc nelogický (platí naopak  $[s] = \text{mm}$ ).

### C.4 Měření – základní pojmy

Význam měření pro fyziku coby exaktní vědu jsme zmínili už na str.9. Měření spojitých veličin nikdy není (a z principu ani nemůže být) absolutně přesné. Dvě naměřené hodnoty téže veličiny, ať už po sobě či současně dvěma měřicími přístroji, nedají proto absolutně stejný výsledek — už proto, že každý měřicí přístroj má jen konečnou přesnost a zobrazovací možnost.

Předpokládejme nejjednodušší případ, že jde o opakované měření jediné veličiny, s nejistotou typu A (tj. získanou z opakovaných měření). Nechť je naměřeno stejnou metodou (tedy i se stejnou vahou)  $n$  veličin  $\{x_i\}_{i=1}^n$ .

**Nejistotou** měření  $u$  se rozumí parametr charakterizující rozsah hodnot, tedy interval od  $x - u$  do  $x + u$  okolo výsledku měření  $x$ ; tento interval můžeme důvodně přiřadit hodnotě měřené veličiny.

**Výběrový průměr**  $\bar{x}$  je definován vztahem

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (\text{C.5})$$

**Standardní nejistota**  $u = s_{\bar{x}}$  je v tom případě rovna výběrové směrodatné odchylce výběrového průměru, tedy

$$u = s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (\text{C.6})$$

Výsledek zapíšeme ve tvaru  $\bar{x} \pm u$ ; zápis v číselných hodnotách provedeme jako v rov. (C.1). Pravděpodobnost  $P$ , že odchylka skutečné hodnoty od udávané nepřekročí  $u$ , závisí na typu rozdělení. Pro normální (Gaussovo) je to 68,3 %, pro rovnoměrné 57,7 %, pro trojúhelníkové 65 %. Pravděpodobnost, že odchylka nepřekročí  $2u$ , je pro normální rozdělení 95,5 %, pro rovnoměrné 100 %, pro trojúhelníkové 96,6 %.

**Rozšířená nejistota**  $U = k_U \cdot u$  se zavádí tam, kde se vyžaduje vysoká spolehlivost. Koeficient rozšíření intervalu pokrytí (stručně koeficient pokrytí)  $k_U$  se stanovuje zpravidla konvenčně (předpisem normy apod.). Zpravidla bývá od **2 (nejčastěji)** do 3, anebo se určí výpočtem pro známý typ rozdělení.

Pro velký počet ( $n > 30$ ) opakovaných měření vycházejí pro různá  $P$  různé hodnoty  $k$ :

$$k_{0,9} = 1,645 \quad \text{pro } P = 90\%, \quad (\text{C.7})$$

$$k_{0,95} = 1,96 \quad \text{pro } P = 95\%, \quad (\text{C.8})$$

$$k_{0,99} = 2,576 \quad \text{pro } P = 99\%. \quad (\text{C.9})$$

Pro malá  $n$  předepisuje norma ISO vztah  $U = 2k_n u$ , kde  $k_n$  pro  $n = 2$  až 9 je rovno

$$k_2 = 7,0; \quad k_3 = 2,3; \quad k_4 = 1,7; \quad k_5 = 1,4; \quad k_6 = 1,3; \quad k_7 = 1,3; \quad k_8 = k_9 = 1,2.$$

Zde byly pro jednoduchost zanedbány chyby typu B (tedy ty, které se nevypočítávají, ale jsou známy odjinud, jiným způsobem); s nimi se mění vztah pro rozšířenou nejistotu  $U$  na vztah

$$U = 2\sqrt{k_n^2 u_A^2 + u_B^2} \quad \text{a výsledek zapíšeme} \quad (\text{C.10})$$

$$x = \bar{x} \pm U \quad \text{nebo raději se závorkou jako výše, viz rov. (C.1).} \quad (\text{C.11})$$