Teorie relativity a Globální poziční systém

Pavel Klepáč a Jan Horský, *Ústav teoretické fyziky a astrofyziky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova Universita, Kotlářská 2, Brno 611 37*

Globální poziční systém (GPS) je systém umělých zemských satelitů, který slouží k navigaci, určování časových a souřadnicových informací. Jak ukazuje tento přehledový článek, bez započtení korekcí plynoucích ze speciální a z obecné teorie relativity bychom vzhledem k současné přesnosti navigačních přístrojů získali neadekvátní a nepřesná data. Tyto jevy zahrnují konstantní rychlost světla, princip ekvivalence, časovou dilataci, relativitu současnosti a gravitační posuv frekvence.

ÚVOD

Ta tam je doba, kdy obecná teorie relativity byla považována za teorii sice fyzikálně obsažnou, matematicky krásnou a logicky průhlednou, nicméně z pohledu aplikace a užitečnosti v každodenním životě ještě poněkud nepraktickou a zbytečně komplikující. V souvislosti s moderními družicovými systémy však teorie relativity vstoupila do laboratoří jako nevyhnutelná součást projektů.

Cílem tohoto přehledového článku je ukázat, že situace, pro jejichž výpočet je nutno vzít v úvahu speciálně i obecně relativistické korekce, není třeba hledat pouze mezi vzdálenými a masivními gravitujícími systémy, nýbrž i v oblasti s měřítky zdaleka menšími a nám podstatně bližšími, jako je například družicový systém GPS (Global Position System). Díky neobyčejně přesným údajům v určování poloh, času a rychlostí je GPS v současné době jedním z nejdůležitějších navigačních systémů a zároveň skýtá možnost efektivně ověřovat předpovědi obecné teorie relativity.

Tento příspěvek je organizován následujícím způsobem. Kapitola 2. se zabývá přibližným výrazem pro prostoročasový interval v okolí Země a důsledky na rychlost chodu hodin z něho vyplývajícími. V kapitole 3. je diskutováno jádro a podstata Globálního pozičního systému a jsou zde uvedeny některé technické parametry. V kapitole 4. jsou pak zkoumány některé relativistické korekce nutné k přesnému měření a přenosu dat v GPS. Konečně kapitola 5. podává nástin relativistického experimentu TOPEX/Poseidon a v kapitole 6. lze nalézt stručné zhodnocení a závěr.

GRAVITAČNÍ POLE V OKOLÍ ZEMĚ

V dalším výkladu se omezíme na vzdálenosti od středu Země, jež jsou dostatečně malé, abychom mohli zanedbat vliv ostatních nebeských těles. Pak existuje lokálně inerciální, nerotující a volně padající systém souřadnic, s počátkem umístěným v těžišti Země. Z linearizované teorie gravitace víme, že prostoročasový interval lze v této aproximaci zapsat ve sférických souřadnicích v následujícím tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1+\frac{2V}{c^2}\right)(c\mathrm{d}t)^2 - \left(1-\frac{2V}{c^2}\right)(\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2), \qquad (1)$$

kde V je newtonovský gravitační potenciál Země. Přechod k systému rotujícímu spolu se Zemí je dán transformací $\varphi \to \varphi + \omega t,$, kde ω je úhlová rychlost rotace Země. Komponenta g_{00} transformovaného metrického tenzoru nabývá tvaru

$$g'_{00} = 1 + \frac{2V}{c^2} - \left(\frac{\omega r \sin\theta}{c}\right)^2 \equiv 1 + \frac{2\Phi}{c^2}, \qquad (2)$$

kde Φ je efektivní potenciál v rotujícím systému, zahrnující newtonovskou a dostředivou potenciální energii.

Povrch Země je v tomto přístupu modelován rotačně symetrickým elipsoidem, přičemž konkrétní závislost V na r a θ závisí na požadovaném stupni přesnosti. V nejhrubším přiblížení je V dáno potenciálem sféricky symetrického zdroje $V = -\kappa M/r$, kde M je hmotnost Země a κ je Newtonova gravitační konstanta. Tato aproximace se týká případů, kdy je možno zanedbat kvadrupólový moment Země. Pokud jej zanedbat nelze, ve druhém přiblížení je V aproximován vztahem

$$V = -\frac{\kappa M}{r}\left[1 - J_2\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 P_2(\cos\theta)\right], \qquad (3)$$

v němž r_0 je poloměr Země na rovníku, J_0 je kvadrupólový moment Země a P_2 je Legendreův polynom druhého řádu.

Zemský geoid definujeme jako plochu, na níž je efektivní potenciál Φ, daný rovnicí (2), roven konstantní hodnotě[1], kterou budeme značit jako Φ_0.

[1] Přesněji řečeno, jedná se o tzv. referenční elipsoid.

Hodnotu Φ_0 lze určit numericky jednoduše například na rovníku, kde je $\theta = \pi/2$.

Protože potenciál V klesá v nekonečnu k nule, lze říci, že souřadnicový čas t figurující v (1) je vlastním časem pozorovatele umístěného v nekonečnu.Výraz pro časovou dilataci vyplývající z (2), aplikovaný na pozorovatele v nekonečnu a druhého pozorovatele situovaného na zemském geoidu, nabývá přibližného tvaru

$$\mathrm{d}\tau = \left(1 + \frac{\Phi_0}{c^2}\right)\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Například se započítáním kvadrupólového momentu Země je relativní zpoždění hodin na povrchu geoidu oproti hodinám v nekonečnu asi $7{\cdot}10^{-10}$. Tento efekt je asi 10^4 krát větší než relativní frekvenční stabilita césiových hodin používaných v GPS. To svědčí o nutnosti započtení zmíněné relativistické korekce.

Ukazuje se, že je výhodnější i fyzikálně názornější přeškálovat souřadnicový čas t v metrickém elementu (1) pomocí vztahu (4), tak, že transformovaný čas (který opět označujeme z důvodů technické jednoduchosti t) ukazuje v daném okamžiku údaj hodin v klidovém lokálně - inerciálním systému zemského geoidu. Z matematického hlediska se jedná o přirozenou fixaci kalibrační volnosti. Metrický element (1) tak nabývá přibližného tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 + \frac{2(V-\Phi_0)}{c^2}\right)(c\mathrm{d}t)^2 - \\ -\left(1 - \frac{2V}{c^2}\right)(\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2). \tag{5}$$

Metrika (5) ukazuje, že všechny hodiny na geoidu jdou stejně. Fyzikální interpretace je následující: Uvažujme dvě místa na severní polokouli s různými zeměpisnými šířkami. Díky zploštělosti Země způsobené rotací bude místo s větší zeměpisnou šířkou blíže ke středu Země. Hodiny v tomto místě budou podrobeny většímu rudému posunu, ale naopak menšímu Dopplerovu posunu. Na zemském geoidu se tyto vlivy vzájemně přesně vyruší.

Na závěr této kapitoly uvedeme přibližný vztah pro časovou dilataci pro případ zemského gravitačního pole. Tehdy platí, že

$$\int \mathrm{d}t = \int \left(1 - \frac{V-\Phi_0}{c^2} + \frac{\nu^2}{2c^2}\right)\mathrm{d}\tau. \tag{6}$$

kde $d\tau$ značí interval vlastního času.

GLOBÁLNÍ POZIČNÍ SYSTÉM

Globální poziční systém sestává ze tří hlavních sektorů: satelitního, uživatelského a kontrolního. Satelitní sektor je tvořen 24 družicemi, z nichž každá je vybavena vysoce přesnými atomovými hodinami a s nimi spojeného vysílání časových signálů. Šest rovin ve vzájemné inklinaci 55 stupňů tvoří orbitové roviny vždy pro čtyři satelity. Ty jsou navíc rozmístěny tak, že v libovolný časový okamžik jsou alespoň čtyři z nich viditelné z kteréhokoli místa na Zeměkouli. Družice orbitují ve výšce 20 200 km nad zemským povrchem.

Kontrolní sektor tvoří množství pozemských kontrolních stanic, jež nepřetržitě monitorují informace získané ze satelitů. Ty jsou pak dále detailně analyzovány.

Konečně uživatelský sektor sestává ze všech uživatelů, kteří využívají příjmu signálů k určení jejich polohy, času a rychlosti s níž se pohybují. Vlastní četné aplikace GPS jsou heslovitě uvedeny v kapitole 6.

Signály GPS jsou přijímány pozemskými uživateli na dvou nosných frekvencích: L1 s frekvencí 154 10,23 MHz a L2 s frekvencí 120×10,23 MHz. Césiové atomové hodiny přenášené na palubách jednotlivých satelitů jsou natolik přesné, že jejich maximální nepřesnost během jednoho dne je $5{\cdot}10^{-14}$ s. Nosná frekvence L1 je modulována dvěma typy kódů, nazývanými C/A (Coarse/Acquisition) a P-kód. Uživatelé, kteří přijímají jak L1, tak i L2 nosné frekvence, mohou své údaje korigovat vzhledem k ionosférickému zpoždění. Naproti tomu běžní uživatelé mají přístup pouze k C/A kódu. Proto jsou zde dvě úrovně, které poziční servis poskytuje uživatelům Přesná poziční služba využívající P-kód a dále Standardní poziční služba využívající C/A kód. GPS je zajišťován Ministerstvem obrany Spojených států amerických, které z bezpečnostních důvodů měnilo frekvence signálů, takže přesnost určení polohy pro běžné uživatele (C/A kódů) byla v rozmezí asi 100 m (to se označuje jako tzv. výběrová dostupnost).

S takovou technologií pak není neobvyklá přesnost měření vzdáleností na 5 až 10 cm. Pro mnohem podrobnější pojednání týkající se technických parametrů GPS odkazujeme čtenáře na práce [1, 2].

Že relativistické efekty musí být (a jsou) započteny pro řádné určování poloh a časů, vyplývá například z následujících odhadů. Předpokládejme, že se daný satelit pohybuje s oběžnou rychlostí 4 km/s. Pak se frekvence jeho palubních hodin díky časové dilataci přibližně zpomalí faktorem $\frac{\Delta\omega}{\omega} \cong \frac{\nu^2}{2c^2} \cong 10^{-10}$, což je Dopplerův efekt druhého řádu, 10^4krát větší než shora uvedená relativní frekvenční stabilita césiových hodin používaných na GPS. Krom toho, samotný Dopplerův efekt prvního řádu ve faktoru v/c je zhruba velikosti 10^{-5}. Vliv gravitačního posunu frekvence je dán výrazem $\frac{\Delta\omega}{\omega} \cong \frac{\Delta V}{c^2} \cong 5 \times 10^{-10}$. A navíc, protože žádná orbita není ideálně kruhová, rychlost satelitu se mění v závislosti na změně vzdálenosti od Země, což periodicky ovlivňuje

Dopplerův efekt druhého řádu stejně jako gravitační posun frekvence.

Princip určení času a okamžité polohy uživatele je prostý. Nechť pozemský pozorovatel s polohovým vektorem $\mathbf{r}$ registruje v daný časový okamžik t časové signály ze čtyř satelitů. Tyto signály nechť jsou vyslány družicemi v časech t_n, s polohovými vektory $\mathbf{r}_n$, kde n = 1, 2, 3, 4. Pak princip konstantní rychlosti světla implikuje

$$c^2(t - t_n)^2 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^2. \tag{7}$$

Řešením čtyř rovnic (7) pak obdržíme čtyři hledané veličiny (t, $\mathbf{r}$).

RELATIVISTICKÉ KOREKCE

Nyní chceme poukázat na konkrétní relativistické korekce nutné k dosažení požadované přesnosti a správnosti určení časových a prostorových souřadnic událostí na geoidu pomocí GPS technologie. Pro výpočty uvažujeme pozorovatele nacházejícího se v lokálně inerciální (nerotující) soustavě spojené s těžištěm Země.

Družicové orbity. V dalším předpokládáme, že družice se pohybují po keplerovské trajektorii. Takovouto aproximaci si můžeme dovolit za předpokladu, že družice je dostatečně vzdálená od Země. Důsledkem takového přiblížení je pak skutečnost, že lze zanedbat kvadrupólový moment Země. Na tomto stupni tedy vystačíme s dobře známou nebeskou mechanikou. Pohybové rovnice družice lze pak řešit explicitně, přičemž obecný výsledek, vyjádřený pomocí velikosti hlavní poloosy a a excentricity e, je

$$r = a(1 - e\cos\phi). \tag{8}$$

kde r je (radiální) vzdálenost družice od počátku lokálně inerciální soustavy spjaté se Zemí a ϕ tzv. úhel excentrické anomálie. Tento úhel je řešením rovnice [3]

$$\phi - e\sin\phi = \sqrt{\frac{\kappa M}{a^3}}(t - t_p) \tag{9}$$

kde t_p je souřadnicový čas okamžiku průchodu perihéliem.

Z pohledu newtonovské mechaniky je gravitační pole polem konzervativním, a v tomto případě se celková energie družice zachovává. Platí

$$\frac{1}{2}\nu^2 - \frac{\kappa M}{r} = -\frac{\kappa M}{2a} \tag{10}$$

Dosazením do vzorce (6) pomocí (10) pak obdržíme uplynulý souřadnicový čas na družicových hodinách

$$t = \int \left[1 + \frac{3\kappa M}{2ac^2} + \frac{\Phi_0}{c^2} - \frac{2\kappa M}{c^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)\right] \mathrm{d}\tau. \tag{11}$$

Druhý a třetí člen v (11) je konstantní a jejich úhrnný příspěvek do integrálu činí asi $-4{\cdot}10^{-10}$. Fyzikální význam spočívá v tom, že frekvence satelitních hodin je posunuta díky gravitačnímu modrému posunu. Aby proto pozemský uživatel přijímal frekvenci 10,23 MHz, je vlastní frekvence palubních družicových hodin nastavena na $(1\text{-}4{\cdot}10^{-10})\times 10{,}23$ MHz. Tato úprava je provedena na Zemi před samotným vypuštěním satelitu na oběžnou dráhu.

Korekce na excentricitu. Výpočet korekce odpovídající posledním dvěma členům ve výrazu pro uplynulý souřadnicový čas (11) s použitím vzorce (9) je instruktivní. Z (9) derivací obdržíme

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{\kappa M}{a^3}}\frac{1}{1 - e\cos\phi},$$

to nám umožňuje snadno integrovat poslední dva členy v (11). S využitím relativistické korekce, v níž s dostatečnou přesností platí $ds \cong cdt$, dostáváme

$$\begin{aligned} \Delta t_{exc} &= \int \frac{2\kappa M}{c^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)\frac{\mathrm{d}s}{c} \cong \frac{2\kappa M}{c^2}\int\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{2\kappa e M}{ac^2}\int\frac{\cos\phi}{1 - e\cos\phi}\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{\kappa M a}}{c^2}e\sin\phi, \end{aligned} \tag{12}$$

kde integrační konstanta bez újmy na obecnosti nebyla uvažována. Fyzikální význam této opravy je v započtení gravitačního frekvenčního posunu a Dopplerova efektu druhého řádu, jež se mění díky přítomnosti excentricity. V současné době je korekce daná rovnicí (12) prováděna zásadně na přijímačích pozemských uživatelů, i když zde není podstatná překážka pro zakomponování této korekce do palubního vybavení satelitů. Důvodem je již zaběhlý a tradiční systém, bylo by příliš nákladné a zbytečně komplikované jej měnit.

Dopplerův jev. Obíhající družicové hodiny jsou upraveny tak, aby ukazovaly souřadnicový čas, zatímco pozemští příjemci mají upravené přijímače vzhledem ke korekci na excentricitu. Dalším efektem, jehož je nutno započítat, je Dopplerův jev prvního řádu (longitudinální).

Nechť je vyslán elektromagnetický signál s frekvencí ω_0 ze satelitu pohybujícího se na oběžné dráze o poloměru r rychlostí $\mathbf{v}_i$ a nechť se dále příjemce signálu pohybuje na geoidu s rychlostí $\mathbf{v}_R$. Protože gravitační pole v okolí Země považujeme za statické, existuje zde časupodobné Killingovo vektorové pole ξ, jež je úměrné 4-rychlosti u daného pozorovatele. Z elementárních vlastností Killingových vektorů též vyplývá ([4]), že skalární součin ξ s vlnovým 4-vektorem elektromagnetického signálu k je konstatní podél trajektorie tohoto signálu (tj. podél nulové geodetiky). Frekvence je daná jako skalární součin $k \cdot u$. Rozepsáním definičního vztahu pro frekvenci v lokální souřadné soustavě spjaté s těžištěm Země následně obdržíme relaci mezi frekvencí ω_R signálu přijatého pozemským pozorovatelem a frekvencí ω_0, s níž byl signál emitován

$$\omega_R = \omega_0 \left[1 + \frac{2\kappa M}{c^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)\right] \frac{(1 - \mathbf{n}\mathbf{v}_R/c)}{(1 - \mathbf{n}\mathbf{v}_i/c)}, \qquad (13)$$

kde **n** je jednotkový polohový vektor ležící ve směru šíření signálu. Jak již víme, výraz v hranaté závorce rovnice (13) odpovídá excentricitě. Ta je řádu $e\times10^{-10}$. Longitudinální Dopplerův jev je řádu 10^{-5}.

Následující dva efekty jsou pro stávající GPS systém zanedbatelné, korekce vzdáleností jimi determinovaných je menší než asi 5 cm. S novou nastupující generací satelitů tyto jevy budou uváženy a jejich korekce započteny.

Shapirovo zpoždění. Tento efekt se týká korekce způsobené gravitačním polem při průchodu signálu mezi satelitem a uživatelem. Mějme zjednodušený případ, kdy předpokládáme, že se paprsek pohybuje po úsečce délky L, jež spojuje satelit, s polohovým vektorem $\mathbf{r}_1$, s uživatelem, jehož polohový vektor je $\mathbf{r}_2$. Pro uplynulý souřadnicový čas dostáváme z (5) s uvážením, že $ds = 0$, přibližnou rovnici

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{c}\left[1 - \frac{2V}{c^2} + \frac{\Phi_0}{c^2}\right]\mathrm{d}l \qquad (14)$$

kde dl je element délky. Integrací vztahu (14) podél úsečky obdržíme

$$\Delta t_s = \frac{\Phi_0 L}{c^3} + \frac{2\kappa M}{c^3}\ln\left[\frac{r_1 + r_2 + L}{r_1 + r_2 - L}\right]. \qquad (15)$$

Výraz Δt_s v rovnici (15) pro Shapirovo časové zpoždění je rozdíl mezi časem nutným k překonání vzdálenosti L, počítaným podle obecné teorie relativity, a mezi newtonovským časem L/c. Rigoróznější odvození vzorce (15) je nastíněno v [5]. Pro GPS satelitní systém vychází pro velikost Shapirova členu necelé 2 cm.

Vlastní vzdálenost. Kdybychom chtěli být striktní, museli bychom místo souřadných vzdáleností použitých například v (15) započítat vlastní vzdálenosti. V nejjednodušším případě mějme dva body ležící na přímce procházející počátkem souřadné soustavy a r_1 a r_2 nechť jsou jejich radiální souřadnice. Pak pro jejich vlastní vzdálenost l získáváme z (5)

$$l = \int_{r_1}^{r_2}\left(1 + \frac{\kappa M}{c^2 r}\right)\mathrm{d}r = r_2 - r_1 + \frac{\kappa M}{c^2}\ln\frac{r_2}{r_1},$$

což se pro GPS systém liší od klasické vzdálenosti asi o 6 mm.

Kvadrupólový moment Země. Vliv kvadrupólového momentu Země na uplynulý souřadnicový čas (11) získáme dosazením výrazu pro zemský gravitační potenciál (3) a následnou numerickou integrací. Z výsledků vyplývá [1], že vliv započtení kvadrupólového momentu se projeví periodickými změnami ve frekvenci hodin, přičemž perioda těchto variací je rovna poloviční periodě orbitálního času. Odpovídající variace v určení polohy jsou v rozmezí asi 2 cm.

Je samozřejmé, že dopad teorie relativity na uzpůsobení GPS tvoří velkou část celkového technického a fyzikálního zabezpečení měřících přístrojů přenášených na palubách GPS satelitů. Z nerelativistických efektů, které zde nejsou zmíněny, jmenujme alespoň ionosférické a troposférické zpoždění signálu, tlak záření, nejrůznější šumy a jiné.

EXPERIMENT TOPEX

Družice TOPEX/Poseidon je americko-francouzský satelit určený k měření své vzdálenosti od hladiny moře. Na palubě nese šesti- kanálový GPS přijímač schopný určit polohu družice na oběžné dráze. K určení přesné polohy a okalibrování času jsou nutné alespoň čtyři kanály. Přestože k určení polohy potřebuje TOPEX přijímat signály obecně pouze od čtyř GPS satelitů, ve skutečnosti sleduje šest z nich, aby byla zaručena vyšší přesnost údajů.

Ukazuje se, že díky množství přijímacích kanálů poskytuje TOPEX test předpovědi teorie relativity, zejména korekce se započtením excentricity.

Přijímač TOPEX/Poseidon má orbitální periodu necelé dvě hodiny. Během experimentu, který se uskutečnil v roce 1995, testoval TOPEX předpovězený vliv excentricity na jednom z GPS satelitů, jenž měl největší excentricitu. Jak jsme uvedli v předchozí kapitole věnované vlivu excentricity, podle vzorce (12) se excentricita projevuje periodickými variacemi chodu hodin v závislosti na úhlu ϕ. Družice TOPEX/Poseidon za jeden den minula tento satelit celkem jedenáctkrát. Experimentální výsledky jsou ve velmi dobré shodě s relativistickou předpovědí. Tatáž dobrá shoda platí i pro ostatní GPS satelity.

Další možnost srovnání výpočtů vyplývajících z teorie relativity poskytla úprava polohy jednoho z GPS satelitů, kdy se zmenšila velikost hlavní poloosy a tedy zvýšila oběžná rychlost. Pozorovaná změna frekvence je opět v dobrém souladu s relativistickou predikcí.

ZÁVĚREM

V této práci byla zmíněna velmi aktuální a vysoce přesná metoda určování poloh, rychlostí a časů nejrůznějších pozemních i mimopozemních objektů, kterou poskytuje GPS. Užitkovost a aplikace GPS je velmi mnohočetná a při dnešních požadavcích na přesnost determinování poloh a časů krajně důležitá. Těchto služeb se využívá v civilních i vojenských navigačních systémech, při sledování dopravních prostředků, jejich vyhledávání a při záchranných činnostech, v kartografii a při snímání zemského povrchu. Dále se těchto služeb využívá při navigaci kosmických sond v okolí Země a konečně také při ověřování fundamentálních fyzikálních zákonů, měření pulsarů a testech gravitačních teorií. Relativistické předpovědi je nutné konzistentně započítávat a integrovat do měřících metod soudobých navigačních systémů.

V současnosti se rozvíjejí projekty, které by pomocí laserově chlazených hodin měly zpřesnit měření až na fantastickou hodnotu relativní přesnosti 10^{-16}. To umožní započíst a následně měřit i vliv ostatních relativistických efektů, které mohly být doposud pro jejich malou amplitudu zanedbány: vliv kvadrupólového momentu Země, rozdíl mezi souřadnicovými a vlastními vzdálenostmi a Shapirovo zpoždění elektromagnetických signálů.

Význam GPS satelitů po celou dobu jejich existence kontinuálně vzrůstá, a to vedlo americkou vládu ke zrušení „výběrové dostupnosti“. Tímto způsobem GPS přispěl k tomu, že Einsteinova teorie relativity je pro miliony pozemských uživatelů, ať už vědomě či nikoli, nezbytným základem každodenního života.

Poděkování

Tento článek věnujeme Prof. RNDr. Miroslavu Brdičkovi k jeho krásnému životnímu jubileu. Tato práce vznikla za podpory grantu 201/00/0724 a grantu 202/03/P113 Grantové agentury ČR.

Reference

[1] N. Ashby, v *General Relativity and Gravitation: At the turn of the Millenium*, Proceedings of 15-th Int. Conf. Gen. Rel. Grav., Pune, India, June 1997.
[2] N. Ashby, Physics Today, **55**, 41 (2002).
[3] P. Andrle: *Nebeská mechanika*, Academia, Praha 1987. P. Fitzpatrick: *The Principles of Celestial Mechanics*, Academic Press, New York 1970.
[4] Ch. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler: *Gravitation*, Freeman and Co., San Francisco 1973.
[5] R. M. Wald: *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago 1984.