

Kalkul pro fyziku

Kalkul2.tex

J. Obdržálek — 2. předběžná, neúplná verze, 2007-12-14

Pro pohodlí studentů zde připomínáme hlavní matematické vzorce a úpravy užívané při úvodním výkladu fyziky, občas s mírně odbornější poznámkou značenou $\longleftrightarrow$. Nevadí, když ji v prvním čtení přeskóčíte anebo když jí nebudete rozumět.

$\longleftrightarrow$ Tak např. u shrnutí axiomů pro vektorový prostor si čtenář jistě všimne, jak velice pečlivě jsme volili formulace velmi neúplné, ale stručné a názorné: asi tak nějak bychom to řekli svému věci znalému kolegovi, chtěli-li bychom mu věc stručně připomenout. Pokud těm axiomům totiž čtenář už rozumí (což předpokládáme), pak si je — cítí-li potřebu — snadno přesně doformuluje sám; navíc tím bude mít kontrolu, že věc zná do hloubky. Pokud je však čtenář zatím nezná, pak by asi ani přesnost neocenil: odvedla by jeho pozornost a spíše by mu ztěžovala rychlé pochopení toho, o co ve fyzikální aplikaci jde.

Přesná formulace, podmínky platnosti apod. jsou ovšem podstatné v přednášce z matematické analýzy či z numerické matematiky; pro ně však tento text určen není. Ten je pouhým doplňkem k některým přednáškám z *fyziky*, kde se matematika využívá. Jde tu jednak o připomenutí — tedy o stručné vystižení jádra jistých matematických technik používaných ve fyzice, jednak o ukázkou, jak fyzika matematiky používá.

Zejména pro budoucího učitele fyziky jsou určeny další poznámky: plná jména osob v poznámce pod čarou, etymologie ($\P$), populárnější komentář ($\clubsuit$) apod.

$\P$ *Kalkul* = počet, ze střelat. calculus = vápencový kamínek, kterým se počítalo, z lat. calx, -cis, f. vápenec.

$\clubsuit$ Literatura tohoto typu se zpravidla nazývá „kuchařka“.

U mne (J.O.) můžete tento text používat při přednáškách i při písémkách z fyziky coby „tahák“. A také upřímně uvítám Vaše podněty, co mám doplnit do další verze.

Obsah

1	Binomická věta	2
2	Komplexní čísla a goniometrické funkce	3
2.1	Zavedení	3
2.2	Zápisy komplexních čísel	4
3	Derivace	6
3.1	Zavedení	6
3.2	Význam v aplikacích	7
3.3	„Slovník“ pro derivace	7
3.4	„Gramatika“ pro derivace	7
3.5	Vyšší derivace	8
3.6	Taylorův rozvoj	8
3.7	Funkce více proměnných	8
3.8	Operátor nabla, ∇	9
3.9	Derivace složené funkce více proměnných	9
4	Infinitezimální počet a fyzikální realita	10
4.1	Motivace	10
4.2	Rozdíl v přístupu fyziky a matematické analýzy	10
4.3	Praktické použití	12

Příklad 1.1: Ukažte souvislost klasického vzorce pro kinetickou energii $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ se známým relativistickým vzorcem $E = mc^2$. „Relativistická“ hmotnost m souvisí s „klidovou“ m_0 vztahem $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, kde $\beta = v/c$.

Řešení: Zřejmě

$$E = m_0 c^2 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0 c^2 (1 + (-\beta^2))^{-\frac{1}{2}}$$

a použijeme binomickou větu pro $n = -1/2$, $x = -\beta^2$:

$$\begin{aligned} E &= m_0 c^2 \left(1 - \frac{1}{2}(-\beta^2) + \frac{\frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2}}{1 \cdot 2} (-\beta^2)^2 + \frac{\frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{-5}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} (-\beta^2)^3 + \dots \right) \\ &= m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 v^2 \beta^2 + \frac{5}{16} m_0 v^2 \beta^4 \dots \end{aligned} \quad (2)$$

V klasickém přiblížení je $v \ll c$, takže $\beta \rightarrow 0$, $m_0 \doteq m$ a označíme-li $E_0 = m_0 c^2$, platí zřejmě opravdu $E \doteq E_0 + E_k$. „Klidová“ energie E_0 představuje člen sice obrovský, ale konstantní, neměící se v průběhu děje a neovlivňující tedy nijak mechanický pohyb v klasické fyzice. (Můžeme ho pokládat za vnitřní energii částice.) **(Konec řešení)**

Příklad 1.2: Odvoďte vzorec pro $(a+b)^n$.

Řešení: Zřejmě platí $(a+b)^n = a^n (1 + \frac{b}{a})^n$, takže

$$(a+b)^n = a^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{b}{a}\right)^k = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n}{1} \cdot \frac{(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \frac{n}{1} \cdot \frac{(n-1)}{2} \cdot \frac{(n-2)}{3} a^{n-3} b^3 \dots \quad (3)$$

(Konec řešení)

2 Komplexní čísla a goniometrické funkce

2.1 Zavedení

K reálným číslům přidáme imaginární jednotku¹ i , algebraicky je rozšíříme $(+, -, *, /)$ a vzápětí „zúžíme“ relací $i^2 + 1 = 0$. Čísla typu $z = a + ib$ nazýváme komplexními. Pro jejich sčítání i násobení platí stejné zákony (komutativní, asociativní, distributivní) jako pro reálná čísla.

↔ **Přecisněji:** Těleso $\mathbb{R}$ reálných čísel rozšíříme o algebraický prvek i (aby $1 + i^2 = 0$) na nadtěleso $\mathbb{C}$ komplexních čísel. **Stručněji:** Těleso $\mathbb{C}$ komplexních čísel je algebraicky uzavřeným algebraickým rozšířením tělesa $\mathbb{R}$ reálných čísel. **Jinak:** Komplexní čísla zobrazujeme jako body v *Gaussově*² rovině; reálnou, resp. imaginární část udává souřadnice x , resp. y .

♣ Relaci $x^2 + 1 = 0$ ovšem vyhovuje nejenom $x = i$, ale také $x = -i$.

♣ Někdy se píše $i = \sqrt{-1}$; my však raději nebudeme zavádět (víceznačnou) odmocninu komplexního čísla. Proto např. řešení rovnice $x^2 = i$ budeme psát jako $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, ale neužijeme zápis $\sqrt{i} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

Číslo $\bar{z} = a - ib$ je *komplexně sdružené* k číslu $z = a + ib$. Součet $z + \bar{z}$ a součin $z\bar{z}$ jsou reálné, rozdíl $z - \bar{z}$ ryze imaginární. *Velikost* komplexního čísla (též *absolutní hodnota*) je

$$|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (4)$$

¹Elektrotechnici značí imaginární jednotku „j“ a symbol i ponechávají pro elektrický proud.

²Karl Friedrich Gauss, 1777-1855, něm. astronom, matematik a fyzik

Tzv. základní věta algebry říká, že v oboru komplexních čísel má každý polynom n -tého stupně právě n kořenů (se započtením event. násobnosti kořenů).

↔ S pojmem blízkým násobnosti kořene se setkáte např. v kvantové mechanice pod názvem „stupeň degenerace (hladiny energie)“, když několik různých stavů, tvořících tuto hladinu, má stejnou energii. Hladina je např. čtyřikrát degenerovaná, jestliže vhodná **porucha** (tj. malá změna) tuto hladinu rozštěpí na čtyři různé hladiny, ale nikdy ne na víc. Polynomiální rovnice $x^4 = 0$ má kořen $x = 0$, a to čtyřnásobný: $x_{1234} = 0$, protože porušená rovnice (ovšem téhož stupně) $x^4 - \alpha = 0$ má pro libovolně malé $\alpha > 0$ čtyři různé kořeny $(\pm \sqrt[4]{\alpha}, \pm i \sqrt[4]{\alpha})$. Ne každá porucha se nám ovšem hodí; porucha typu $(1 - \alpha)x^4 = 0$ degeneraci „nesnímá“, protože symetrii úlohy nenaruší (a dokonce ani nezmění kořeny). Porucha vedoucí k rovnici $x^4 - \alpha x^2 = 0$ sejme degeneraci jen částečně, symetrie zůstane částečně zachována a rovnice bude mít jeden dvojnásobný kořen $x_{12} = 0$ a dva jednoduché kořeny $x_3 = \sqrt{\alpha}$ a $x_4 = -\sqrt{\alpha}$.

¶ *imaginární* = zdánlivý, obrazný, z lat. imāgō, -inis f. = obraz, vidina; ¶ *komplexní* = složený, z lat. com- = s-; plectō, -ere, plexī, plexus = plésti, tedy číslo „spletené“ dohromady ze dvou částí; ¶ *algebra* ze střlat. algebra z arab. al-džabr = řada čísel; ¶ *komutativní* = záměnný z lat. com- = s-; mūtō, -āre, -āvī, -ātum = zaměňovati; ¶ *asociativní* = sdružovatelný z lat. ad- = k; sociō, -āre, -āvī, -ātum = pojiti, sdružovati; ¶ *distributivní* = rozdělitelný, z lat. dis- = roz-; tribuō, -ere, -uī, -ūtum = dělit; ¶ *reálný* = skutečný, věcný ze střlat. realis z lat. rēs, reī, f. = věc.

2.2 Zápisy komplexních čísel

Zápis

$$z = a + ib \quad (5)$$

se nazývá *kartézský*³. Má názorný význam bodu v Gaussově rovině a je vhodný pro algebraické zpracování.

Jiný užívaný tvar je *goniometrický*:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (6)$$

kde $r = |z|$ je velikost komplexního čísla a φ jeho *argument*; ten se zpravidla uvažuje mod 2π v intervalu $(-\pi, \pi)$ anebo $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Vztah

$$\exp(i\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (7)$$

se nazývá Moivrova⁴ věta; lze ho ověřit např. rozvojem v mocninnou řadu. Z něho plyne tvar *exponenciální*, totiž

$$z = r \exp i\varphi, \quad (8)$$

opět $r = |z|$. Ten je zvláště výhodný pro násobení, mocnění a některé funkce; platí totiž zřejmě

$$\lg z = \lg r + i\varphi \quad (+ i2k\pi \text{ pro libovolné celé } k). \quad (9)$$

To je vhodné pro výpočet komplexní mocniny komplexního čísla:

$$(a + ib)^{(c+id)} = (r e^{i\varphi})^{(c+id)} = r^c e^{ic\varphi} r^{id} e^{-\varphi d} = (r^c e^{-\varphi d}) e^{i(c\varphi + d \ln r)}.$$

Příklad 2.1: Určete i^i .

Řešení: V exponenciálním zápisu je $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Je tedy $r = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $c = 0$ a $d = 1$, takže

$$i^i = (1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}})^i = (e^{i\frac{\pi}{2}})^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \doteq 0,20788 \dots \quad \textbf{(Konec řešení)}$$

³ *Cartesius* je polatinštělý tvar jména Descartes (René Descartes, fr. filosof a matematik, 1596-1650).

⁴ Abraham de Moivre, 1667-1754, fr. matematik

Příklad 2.2: Odvoďte součtové vzorce pro $\cos(a \pm b)$ a $\sin(a \pm b)$ a vzorce pro součty a součiny trigonometrických funkcí.

Řešení: Vzhledem k tomu, že $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$, dostaneme dosazením z rov. (7)

$$\cos(a \pm b) + i \sin(a \pm b) = e^{i(a \pm b)} = e^{ia} \cdot e^{\pm ib} = (\cos a + i \sin a)(\cos b \pm i \sin b). \quad (10)$$

Odtud roznásobením a porovnáním reálných a imaginárních částí snadno součtové vzorce

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \quad (11)$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b, \quad (12)$$

z nichž plyne (pro Fourierovy integrály)

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \quad (13)$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(-\cos(a+b) + \cos(a-b)) \quad (14)$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \quad (15)$$

a pro studium stojatých vln ($a = \frac{c+d}{2}$, $b = \frac{c-d}{2}$)

$$\sin c + \sin d = 2 \sin \frac{c+d}{2} \cos \frac{c-d}{2} \quad (16)$$

$$\sin c - \sin d = 2 \cos \frac{c+d}{2} \sin \frac{c-d}{2} \quad (17)$$

$$\cos c + \cos d = 2 \cos \frac{c+d}{2} \cos \frac{c-d}{2} \quad (18)$$

$$\cos c - \cos d = -2 \sin \frac{c+d}{2} \sin \frac{c-d}{2}. \quad \textbf{(Konec řešení)} \quad (19)$$

Příklad 2.3: Ukažte souvislost mezi funkcemi násobného úhlu a tzv. trigonometrickými polynomy (tj. polynomy ve funkcích $\sin$ a $\cos$).

Řešení: Například

$$\cos 3a + i \sin 3a = e^{3ia} = (e^{ia})^3 = (\cos a + i \sin a)^3 \quad (20)$$

Roznásobením, užitím relace $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ a porovnáním reálných a imaginárních částí dostaneme snadno

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a \quad ; \quad \sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a \quad (21)$$

Pro jiný exponent si jistě poradíte sami (případně s užitím binomické věty). **(Konec řešení)**

Zápisy goniometrický i exponenciální jsou jednoznačné pro $z \neq 0$. V případě $z = 0$ může být zvolen argument φ libovolně.

Komplexní čísla se bohatě využívají např. v elektrotechnice při popisu obvodů se střídavým proudem. V lineárních obvodech jsou všechny hodnoty napětí $u(t)$ i proudů $i(t)$ harmonickými funkcemi, tedy typu $u = u_0(\cos \omega t + \varphi_u)$, $i = i_0(\cos \omega t + \varphi_i)$ s různými fázovými konstantami φ_u , φ_i a tedy obecně se vzájemným fázovým posuvem. Pro pevné ω

zavedeme jako zobecnění reálného (ohmického) odporu komplexní impedanci, popisující pak chování rezistorů, kondenzátorů a cívek v libovolných kombinacích; s veličinou $u(t)$ pracujeme jako s komplexní veličinou u v exponenciálním zápisu. Tím se zřejmě výrazně zjednodušuje vyjádření veškerých lineárních rovnic a vztahů.

Komplexní čísla jsou ovšem vhodná i všude jinde při popisu harmonických kmitů a vln. Při lineárních jevech pak stačí uvažovat jako měřenou veličinu např. reálnou část příslušné komplexní veličiny. Pro výpočet nelineárních veličin (např. energie) je nutno nejprve přejít k reálným částem a pak případně pro tyto veličiny odvodit jednoduchá, jednoúčelová pravidla.

Stejně jako z reálných čísel můžeme i z komplexních čísel konstruovat např. vektory, matice apod. Mluvíme pak o komplexních vektorech atd.

V kvantové teorii je stav systému popsán zpravidla⁵ tzv. vlnovou funkcí ψ , která je obecně komplexní a není přímo měřitelná. Komplexní sdružení se zpravidla značí hvězdičkou: ψ^* . Měřitelné veličiny získáváme středováním, např. pro elektron popsaný funkcí $\psi(x)$ je pravděpodobnost výskytu na intervalu $\langle a, b \rangle$ rovna $\int_a^b \psi^*(x)\psi(x)dx$.

3 Derivace

3.1 Zavedení

Uvažujme dvě fyzikální veličiny, např. polohu x na lince v peci a teplotu $f(x)$ v této poloze. Teplota bude jistě na poloze záviset. Často nás zajímá vliv *změny* polohy na změnu teploty. Tato potřeba vedla historicky k zavedení derivace. Označme příslušné přírůstky (diference) symbolem Δ . Při nárůstu⁶ x o Δx (posunutí) nechť vzroste teplota o Δf . Derivace je pak limitou

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \equiv \frac{df}{dx}. \quad (22)$$

Ve stejném významu se užívají i zápisy

$$f'(x) \equiv \frac{d}{dx}f(x) \equiv df/dx. \quad (23)$$

Derivaci *podle času* značíme ve fyzice často tečkou nad proměnnou: $d\mathbf{r}/dt \equiv \dot{\mathbf{r}}$.

Výraz df se nazývá (totální) *diferenciál* funkce f .

↔ Kdyby f byla lineární, pak by bylo $\Delta x = dx$ přesně i bez limity. V tom smyslu se říká, že df je lineární část přírůstku (neboli difference) Δf . Danému bodu x_0 a diferenciálu dx odpovídá diferenciál $df = f'(x_0).dx$ přesně a v matematice pro libovolné dx .

V tomto kontextu se ve fyzikálních úvahách často mluví o *konečném* přírůstku Δx , na rozdíl od *infinitesimálního* nebo *nekonečně malého* přírůstku dx . Ale o tom až v Kap. 4.

Pojmy derivace i limity (s kvantifikátory, ε , δ , ...) proberete detailně v úvodním kurzu matematické analýzy.

¶ *derivace* = odvození metaf. z lat. dērivātiō, -ōnis f. odvodnění z de- = od, rīvus, -ī m. = potok; ¶ *limita* = hranice, mez z lat. līmes, -itis m. = mez (mezi poli); ¶ d, Δ, δ z lat. differentia, -ae f. = rozdíl, různost z dis- = roz-; ferō, ferre, tulī, lātum = nésti.

⁵Stav může být popsán i (komplexním) stavovým vektorem. Nejobecnější popis dává tzv. matice hustoty; samozřejmě je také komplexní.

⁶Samozřejmě může být Δx nebo Δf záporné; v tom případě fakticky nepůjde o nárůst, ale o pokles. Čtenáře zvyklého na algebraický součet, zahrnující i odčítání, to jistě nezmát.

3.2 Význam v aplikacích

Vyjádříme-li funkci $y(x)$ křivkou (grafem v souřadnicích x, y), pak derivace $y'(x) = \operatorname{tg} \alpha$ v bodě (x, y) je *směrnicí tečny* křivky v tomto bodě. Graf je nutno ovšem vynášet tak, aby jednotky SI veličin x, y byly zobrazeny na osách stejně velkými úseky.

Je-li nezávisle proměnnou čas t , je $\dot{f} \equiv \frac{df}{dt}$ *rychlost*: je-li s dráha, je $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$ rychlost pohybu; je-li T teplota, je $\dot{T} = \frac{dT}{dt}$ rychlost zahřívání apod.

♣ S tím souvisejí i různá čtení derivace: $d\mathbf{p}/dt$ „časová změna hybnosti“, „přírůstek hybnosti za jednotku času“. Např. rychlost pohybu ds/dt se často čte jako „dráha za jednotku času“. Rozumí se tím, že *kdyby* byla rychlost pohybu stálá, *pak by* dráha uražená za jednotku času (tj. za sekundu) byla číselně rovna této rychlosti.

3.3 „Slovník“ pro derivace

$(\text{konst})' = 0$	$(\exp x)' = \exp x$	$(\operatorname{arctg} x)' = (1 + x^2)^{-1}$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arcsin x)' = (1 - x^2)^{-1/2}$
$(\ln x)' = 1/x$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\arccos x)' = -(1 - x^2)^{-1/2}$

3.4 „Gramatika“ pro derivace

3.4.1 Derivace součtu a součinu

Jsou-li a, b, c konstanty a f, g, h funkce, platí

$$(af + bg - ch)' = af' + bg' - ch' \quad (24)$$

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh' \quad (25)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \text{pro } g \neq 0. \quad (26)$$

3.4.2 Derivace složené funkce

Je-li $f = f(x)$, $x = \xi(t)$ a značíme-li $F(t) = f(\xi(t))$, platí

$$\frac{dF}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{d\xi}{dt} \quad \text{čili} \quad \dot{F} = f' \dot{\xi} \quad (27)$$

Velmi často se ve fyzice nerozlišuje F od f , protože popisují *fyzikálně* tutéž veličinu. Pak se ovšem nerozlišuje ani x od ξ a píše se např.

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt},$$

jako by se „krátlo diferencíálem dx “. To může hloubavého studenta zmást; taková interpretace také zradí u funkcí více proměnných. Především to však právem rozhoří matematika. Z jeho hlediska jsou totiž F a f zcela různé funkce $F(t)$ a $f(x)$, a taky x je nezávisle proměnná, zatímco ξ je funkce $\xi(t)$ nezávisle proměnné t .

Příklad: Nechť teplota τ podél linky v peci roste pro $0 < x < 1$ lineárně, podle vztahu $\tau(x) = \tau_0 + x(\tau_1 - \tau_0)$. Teploměr projíždí linku zrychleně, pro $0 < t < 1$ je $\xi(t) = t^2$. Údaj $T(t)$ teploměru roste tedy kvadraticky s časem: $T(t) = \tau_0 + t^2(\tau_1 - \tau_0)$. Fyzik zdůrazňuje, že obojí T i τ znamenají totéž, totiž teplotu v peci. Matematik zdůrazňuje, že $T(t)$ a $\tau(x)$ jsou zcela různé funkce různých proměnných. Pravdu mají samozřejmě oba.

♣ Rozmyslete si, co plyne z fyzikální interpretace derivace složené funkce: údaj teploměru se mění ($\frac{dT}{dt} \neq 0$) opravdu jen tehdy, když se podél linky mění teplota ($\frac{d\tau}{dx} \neq 0$) a přitom se teploměr pohybuje ($\frac{d\xi}{dt} \neq 0$).

3.4.3 Derivace inverzní funkce

Derivace inverzní funkce je rovna převrácené hodnotě derivace funkce původní:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}. \quad (28)$$

Při geometrické interpretaci porovnáváme původní graf funkce s grafem překlopeným kolem osy x .

↔ Přesněji: Je-li $y = y(x)$ v okolí $U(x_0)$ bodu x_0 monotonní a má-li nenulovou derivaci, pak existuje inverzní funkce $x = x(y)$, tj. pro $X \in U$ platí $x(y(X)) = X$, a její derivace je rovna uvedenému výrazu. Symboly x , y mají na obou stranách rov. (28) trochu jiný význam, podobně jako výše u kap. 3.4.2.

3.5 Vyšší derivace

Derivovanou funkci můžeme opět derivovat: $(f')' \equiv f'' \equiv f^{(2)}$, neboli

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) \equiv \frac{d^2 f}{dx^2}$$

a čteme „dé druhé f podle dé x na druhou“. Podobně tvoříme i vyšší derivace.

Zápis druhé derivace dx^2 zde znamená $(dx)^2$; nikoli tedy $d(x^2)$, což je první derivace podle výrazu x^2 a vyskytuje se příležitostně v analytické mechanice.

Vyšší derivace podle času značíme analogicky více tečkami: $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\mathbf{r}}, \frac{d^3 \mathbf{r}}{dt^3} \equiv \dddot{\mathbf{r}}$.

3.6 Taylorův rozvoj

Často můžeme zkoumanou funkci f rozvinout v okolí nějakého bodu x v mocninnou řadu podle parametru h , tj. vzdálenosti od bodu x :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \dots = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)} + \mathcal{O}(h^N). \quad (29)$$

↔ Taylorova řada konverguje k $f(x)$, pokud zbytek $\mathcal{O}(h^N) \rightarrow 0$ (kriteria např. Cauchy, Lagrange). Takovým funkcím se říká analytické (v bodě x). Neanalytická je např. funkce $f(x) = x^{5/3}$ v bodě $x = 0$; pro všechna ostatní $x \neq 0$ je však f analytická. Funkce $f(x) = e^{-1/x^2}$, $f(0) = 0$ má $f^{(n)} = 0$ pro všechna přirozená n , přesto není identicky nulová. Z hlediska teorie funkcí komplexní proměnné má v počátku ($x = 0$) podstatnou singularitu.

Tato řada je „nejlepší aproximací“ funkce $f(x)$ polynomem $P(x)$ v nejtěsnějším okolí bodu x : $n+1$ člen řady popisuje n -tou derivaci. Přidáme-li k dosavadnímu součtu

3.7 Funkce více proměnných

3.7.1 Parciální derivace

V případě funkce více proměnných se zavádí **parciální** derivace s označením

$$\frac{\partial f(x, y, \dots, z)}{\partial x} \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{y, \dots, z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, \dots, z) - f(x)}{\Delta x} \quad (30)$$

a čte se „parciální dé f podle dé x při konstantním $y, \dots, z$ “. Konstantností se rozumí to, že v procesu limity neměníme $y, \dots, z$. Výsledek sám — parciální derivace — je ovšem opět funkcí všech proměnných $x, y, \dots, z$. Tradičně se užívá symbol ∂ namísto d .

♣ Přesně vzato, proměnné dole u závorky jen připomínají, ve kterých proměnných (kromě těch, podle kterých derivujeme) má být vyjádřena derivovaná funkce, když už užíváme téhož písmene f pro uvažovanou fyzikální veličinu bez ohledu na to, ve kterých proměnných je vyjádřena (viz 3.4.2). Proměnné, podle níž se derivuje, mezi nimi nebývají uvedeny.

3.8 Operátor nabla, ∇

Ukazuje se výhodné zavést stručné označení ∇ , případně **grad** (gradient) pro často se vyskytující konstrukci

$$\begin{aligned}\nabla F(x, y, z) \equiv \mathbf{grad} F(x, y, z) &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \\ &= \mathbf{a}(x, y, z)\end{aligned}\quad (31)$$

Symbol ∇ se nazývá nabla, a je to tedy vektorový operátor (předpis vytvářející ze skalární funkce $F(x, y, z)$ vektorovou funkci $\mathbf{a}(x, y, z)$).

Protože je vektorem, můžeme s ním vytvářet i součiny typické pro vektor: skalární a vektorový. Pokud přitom zároveň nabla působí na veličinu, s níž ho tento součin váže, užívá se pro něj speciálních jmen, totiž **div** (divergence), resp. **rot** (rotace):

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \equiv \text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \gamma(x, y, z) \quad (32)$$

$$\nabla \times \mathbf{v} \equiv \mathbf{rot } \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \mathbf{b}(x, y, z). \quad (33)$$

Ve všech ostatních případech zůstává označení **grad**, tedy např. skalární operátor

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (34)$$

¶ Jméno nabla bylo převzato podle staroassyrského hudebního nástroje, lyry tohoto tvaru.

3.9 Derivace složené funkce více proměnných

Nechť je f funkcí více proměnných, např. $f = f(x, y, z)$ a tyto proměnné jsou opět funkcemi dalších proměnných, např. $x = \xi(u, v)$, $y = \eta(u, v)$, $z = \zeta(u, v)$. Pak můžeme zavést složenou funkci $F(u, v) = f(\xi(u, v), \eta(u, v), \zeta(u, v))$ a platí např.

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial v}. \quad (35)$$

Jako v kap. 3.4.2, ani zde se ve fyzice obvykle nerozlišuje F od f , ξ od x atp.

V mechanice závisí velmi často funkce více proměnných (prostorových) na jediné proměnné – na čase t . Uvažujme např. teplotu $\tau = \tau(x, y, z, t)$ a $x = \xi(t)$, $y = \eta(t)$, $z = \zeta(t)$. Pak můžeme zavést složenou funkci $T(t) = \tau(\xi(t), \eta(t), \zeta(t), t)$ a platí

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial \tau}{\partial z} \frac{d\zeta}{dt} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad (36)$$

Jako v kap. 3.4.2, ani zde se ve fyzice obvykle nerozlišuje T od τ , ξ od x atd. a píše se

$$\begin{aligned}\dot{T} \equiv \frac{dT}{dt} &= \underbrace{\frac{\partial T}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial T}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial T}{\partial z}\dot{z}} + \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \text{neboli} \\ \frac{dT}{dt} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} T + \frac{\partial T}{\partial t}.\end{aligned}\quad (37)$$

Levá strana rov. (37), tedy člen $\frac{dT}{dt}$, se nazývá zpravidla *úplná* neboli *totální derivace*. První člen pravé strany se nazývá často *konvekční* neboli *proudová derivace*. Poslední člen, $\frac{\partial T}{\partial t}$, se pak nazývá *lokální* neboli *místní derivace*.

Je dobré uvědomit si i fyzikální interpretaci jednotlivých derivací, mj. protože z ní vyplynou i jejich jména. Nechť např. funkce $T(x, y, z, t)$ určuje teplotu v různých místech terénu. Poloha $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$ teploměru v terénu je dána trojicí funkcí $x = \xi(t)$, $y = \eta(t)$, $z = \zeta(t)$. Údaj T teploměru se s časem mění. Jeho změna (úplná derivace $\frac{dT}{dt}$) je podle rov. (37) rovna

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} T + \frac{\partial T}{\partial t} \quad (38)$$

a je dána jednak tím, že se v daném místě v průběhu dne teplota mění (místní derivace $\frac{\partial T}{\partial t}$), jednak tím, že se teploměr pohybuje ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$), přičemž v různých bodech terénu je různá teplota ($\mathbf{grad} T \neq \mathbf{0}$), a ještě je nutno, aby se teploměr nepohyboval kolmo ke gradientu (nárůstu) teploty, jinak by skalární součin $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} T$ byl nulový.

¶ lat. *gradiens* = kráčející

4 Infinitesimální počet a fyzikální realita

4.1 Motivace

Člověk jinak uvažuje pro sebe (primitivněji, schematicky, z jistých „stavebních prototypů“), a jinak pak nahlas sdělí ostatním, na co přišel („učesaně“, nejkratší cestou k cíli). Stejně je tomu i s fyzikálními úvahami, vedoucími nakonec k formulaci fyzikálních zákonů vyjádřených rovnicemi. Pokusíme se tu popsat právě ty výchozí primitivní, schematické úvahy – nejen jejich výsledky v definitivní úpravě.

Funkční vztahy mezi fyzikálními veličinami jsou velmi často dány diferenciálními a integrálními rovnicemi. Odvozujeme-li však tyto rovnice z fyzikálních představ, neuvažujeme obvykle v kategoriích derivací. Postupujeme nejčastěji tak, že uvažujeme malé přírůstky zvané v tomto kontextu *infinitesimální* (např. malý kousek hmoty; malé posunutí; malý přírůstek času a jemu odpovídající změny všech veličin, které během něj nastanou). Vyvozujeme, jak tyto přírůstky spolu souvisejí a srovnáváme je navzájem. Jejich poměry po následném limitním přechodu vedou k derivacím a k diferenciálním rovnicím, popisujícím matematicky daný fyzikální jev. Limitní přechod sám je však pro fyzika již zpravidla nezajímavý, je jen technickým dokončením, často se ani nezdůrazňuje (rozbor a výpočet této limity může ovšem být obtížný i zajímavý na cvičení z matematické analýzy).

4.2 Rozdíl v přístupu fyziky a matematické analýzy

V základních partiích fyziky jde z hlediska fyziky často o teleologický přístup: hledám řešení, o němž vím předem, že existuje a že je jediné; přitom i třída myslitelných řešení bývá značně omezená. Pokud by použitý aparát matematiky nevedl k řešení či připouštěl řešení víc, pak

- matematická formulace (úlohy, okrajových a počátečních podmínek, působících vlivů) byla natolik zjednodušená, že připouští i situaci fyzikálně nereálnou, tj. v přírodě se nevyskytující: např. časový průběh síly, který by byl dán v okolí času $t = 0$ vztahem

$$F(t) = F_0 \sin\left(\frac{1}{t}\right). \quad (39)$$

↔ I v takovém případě bývá zajímavé někdy později zjistit, odkud se „nefyzikální“ řešení vzalo a jestli mu přece jen nelze nějaký ten význam dát.

- anebo je ona „neřešitelnost“ principiální, např. pokus o použití totálního diferenciálu na plochu v bodě, kde má plocha hrot (třeba vrchol jehlanu). Pak buď použitý fyzikální model nebyl v dané situaci vhodný (je příliš hrubý nebo se vyskytují další, neuvažované jevy), anebo je nedostatek v naší (fyzikální) úvaze, jak ilustrujeme dále:

— Elektrická intenzita na hrotu nabitě jehly vyjde nekonečně velká a nemající směr. To signalizuje jednak, že na ostřejší jehle bude opravdu elektrické pole silnější než na tupé, jednak že skutečná jehla nikdy není na špičce bodová (např. už kvůli rozměrům atomů), jednak že při skutečném pokusu může docházet k novým jevům (sršení, elektrický průraz).

— Při studiu šíření světla v dvojosém krystalu podél optické osy zjistíme, že při výpočtu dvojnásobné limity *závisí* výsledek na pořadí dílčích limit. Bereme to jako upozornění na singulární tvar vlnoplochy, která sama sebe protíná v bodě. Chová se podobně jako dvojplocha tvořená rotací křivky podle své sečny, která má průsečíku B se sečnou v každém rovinném řezu dvě tečny a křivky v tomto řezu přecházejí z „vnější“ slupky dvojplochy do „vnitřní“ a naopak.

V řadě případů je to nejen praktická stránka měření, co omezuje přesnost při stanovení definované veličiny. I fyzikální veličina sama má pro každý objekt jistou rozumnou dolní hranici přesnosti: u vzdálenosti dvou měst asi platí ono tesařské „centimetr žádná míra“, hmotnost člověka udaná v mikrogramech navozuje otázku, co vlastně ještě k živému, dýčajícímu člověku patří. Pak ovšem i závislosti, se kterými se v tomto kontextu setkáme, budou „jednodušší“ než ty, se kterými se sejdete při studiu obecných funkcí v matematické analýze. Vzhledem k jejich fyzikálnímu zavedení bude zpravidla postačující popis funkcemi hladkými (tj. spojitými a majícími derivaci) všude, až na jisté dané plochy – hranice těchto objektů. Podobně často nemusíme zkoumat jinak obtížné otázky existence řešení rovnice; z fyzikální podstaty problému zpravidla vyplývá existence řešení, případně i jeho jednoznačnost.

↔ Uvažte také, že — striktně vzato — limitní přechod nezbytný v matematické analýze pro derivaci vyžaduje údaj o měřené veličině v tak malých rozměrech, kde její původní definice ztrácí smysl. Pro měření rychlosti dx/dt těžko určíme polohu vlaku s přesností $dx = 1$ mm, přesnost v mikrometrech vyvolává pochybnosti, co vlastně k vlaku patří a co ne, a přesnost vyšší, než je poloměr jádra atomu, nebudeme rozebírat. A to jsou pro $\Delta x \rightarrow 0$ jen první krůčky!

Z toho hlediska lze snadněji interpretovat přístup alternativní analýzy s polomnožinami a nekonečně malými a velkými veličinami různých řádů.

Naproti tomu v jednotlivých zdůvodněných případech budeme používat i funkce dosti komplikované. Např. poloha klasické částice vykonávající Brownův pohyb je výstižně popsána spojitou funkcí nemající derivaci v žádném bodě. Kvantovou částici popíšeme zase komplexní vlnovou funkcí nebo nekonečněrozměrným stavovým vektorem. Pro popis diskrétního prostředí nebo pro veličiny mající charakter spektrálního rozkladu může být vhodná δ -funkce z kap. 9 nemající jednoduchou analogii mezi např. lebesgueovsky integrovatelnými funkcemi. Jevy mající náhodný charakter (šum, nepolarizované světlo, elektrickou intenzitu tepelného záření černého tělesa) lze úspěšně popsat také jen poměrně složitými strukturami.

4.3 Praktické použití

V matematice se diferenciálem df popisuje chování nikoli funkce $f(x)$, ale její tečny, tečné nadroviny apod. Ve fyzice si však infinitezimální přírůstek df představujeme jako

- přírůstek skutečné funkce, konečný, ale
- natolik malý, aby šlo v rámci požadované přesnosti zanedbat rozdíl mezi ním a matematickým diferenciálem, a přitom
- natolik velký, aby šlo podržet užitý fyzikální model a nebylo nutno např. přecházet do atomární a subatomární fyziky.

4.3.1 Fyzikální úvaha

Při fyzikální úvaze předpokládáme, že objekt je v infinitezimálním rozmezí zcela homogenní: obláček⁷ dV plynu o infinitezimálním objemu dV a infinitezimální hmotnosti dm má polohu plně určenou jediným polohovým vektorem $\mathbf{r}$, má hustotu $\rho(\mathbf{r}) = dm/dV$, má jistou teplotu T , tlak p apod. Přitom tedy

- žádná z veličin ρ , T , p již nezávisí na konkrétní velikosti dV — tj. nezměnila by se, kdybychom sledovali třeba jen desetinu oblasti dV obláčku;
- kdyby však např. takto kleslo dV na desetinu, pak by se na desetinu zmenšilo i dm . Všechny spolu související infinitezimální veličiny jsou si tedy v tomto smyslu přímo úměrné;
- *nepřipouštíme*, že díky konečnosti obláčku bychom mohli brát jeho polohu $\mathbf{r}$ s rozptylem řádově $\sqrt[3]{dV}$ a že by se tedy v rámci dV mohl měnit tlak, hustota, teplota atd. Tyto všechny změny se mohou objevit až v novém, sousedním obláčku.

Uvažme dále „sousední“ obláček dV^* . Ten je ovšem také homogenní, ale všechny uvedené hodnoty v něm budou změněné o jistý infinitezimální přírůstek (je-li záporný, znamená to samozřejmě úbytek). Má tedy polohu $\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + d\mathbf{r}$, hustotu $\rho^* = \rho + d\rho$, teplotu $T^* = T + dT$, je v něm tlak $p^* = p + dp$ apod. Posunutí $d\mathbf{r}$ je *nová* infinitezimální veličina: je *nezávislá* na dV , ale přitom na $d\mathbf{r}$ závisí přírůstky $d\rho$, dT , dp (a to opět lineárně). Zpravidla nepotřebujeme porovnávat, zda má nový sousední obláček objem dV' stejný jako původní, tedy dV , protože, jak bylo zřejmé, na konkrétní velikosti dV , resp. dV^* žádná z veličin ρ , T , p , resp. ρ^* , T^* , p^* nezávisela.

↔ Něco jiného nastane při studiu deformace kontinua. Tam právě záleží na časové změně velikosti i tvaru jistého infinitezimálního „obláčku“. Proto pro jeho rozměry zavedeme prostě nové proměnné, viz příklad 4.3.3. Infinitezimální hranol umístěný v bodě $\mathbf{r}$ má infinitezimální hrany ξ , η , ζ , které se za dobu dt deformací změni na $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$. Fakticky jde o dvojí infinitezimální změnu.

4.3.2 Matematické zpracování

Při následném matematickém zpracování během dalších úprav

- vypadnou členy, které neobsahují infinitezimální veličiny („prosté členy“)

⁷Často se ani nerozlišuje označení objektu – obláčku V od jeho vlastnosti – fyzikální veličiny objemu V . Je to pochopitelně nesprávné, ale jen málokdy by to mohlo vést k chybě.

- zůstanou (některé) členy, obsahující právě jeden infinitezimální člen („infinitezimální veličiny prvního řádu“)
- mohou zůstat i členy obsahující součiny více infinitezimálních výrazů („infinitezimální veličiny vyšších řádů“), ale ty při následné limitě vypadnou. Můžeme je proto vynechávat již během práce.

Celá situace připomíná aproximace funkcí pomocí mocninných rozvoje (zde jsou to rozvoje v mocninách infinitezimálních přírůstků dt , dx , dp , dm atp.). Infinitezimální veličiny vyšších řádů můžeme proto zpravidla zanedbávat už v úvodních fyzikálních úvahách: bereme $(1 + d\varphi)^3 = 1 + 3d\varphi$ apod. V každém případě je zanedbáme před sestavením diferenciální rovnice.

↔ Vzpomeňte si na to při čtení textu po řešení následujícího příkladu.

Samozřejmě se může vzácně stát, že vypadnou nejen prosté členy, ale i všechny infinitezimální veličiny prvního řádu. Pak budeme muset výpočet opakovat a podržet i členy nejbližšího vyššího řádu.

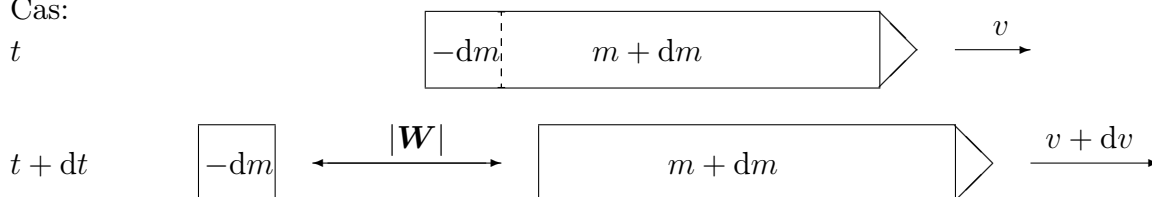
4.3.3 Ilustrace

Příklad 4.3.1: Odvoďte pohybovou rovnici pro těleso s proměnnou hmotou, např. pro pohyb rakety.

Fyzikální formulace Uvažujme pro jednoduchost jen pohyb podél osy x ; symbol v bude tedy znamenat x -ovou složku vektoru $\mathbf{v}$ atp. Velikost vektoru budeme značit např. $|\mathbf{W}|$.

V jistém okamžiku t má raketa rychlost v a hmotnost m . V raketě hoří palivo s okysličovadlem „rychlostí hoření“ q kg/s a mění se tím v plyny (samozřejmě téže hmotnosti), které proudí od rakety rychlostí o velikosti $W \equiv |\mathbf{W}|$. Systém (tvořený raketou) má na

Čas:



začátku hybnost $p = mv$. Podle Newtonova zákona síly platí $F = ma = dp/dt$. Protože ve směru pohybu nepůsobí žádné vnější síly, nemění se hybnost systému.

Po infinitezimální době dt se změní čas na $t^* = t + dt$, hmotnost rakety se změní⁸ na $m^* = m + dm = m - qdt$, její rychlost na $v^* = v + dv$ a hybnost na $p^* = m^*v^* = (m - qdt)(v + dv)$. Vedle toho však přibyl obláček spáleného paliva o hmotnosti dm pohybující se rychlostí $v + dv - W$ a mající tedy hybnost $p^{**} = dm \cdot (v + dv - W) = q(v + dv - W)dt$. Protože se hybnost systému (tvořeného nyní zbylou raketou a obláčkem spáleného paliva)

⁸Všimněte si dobře tohoto obratu. Zdálo by se přirozenější rovnou mluvit o úbytku, ale velmi snadno bychom pak udělali chybu ve znaménku: je úbytek kladný, nebo záporný? Proto je lepší všude uvažovat „přírůstek“ a připustit, že může vyjít kladný či záporný.

nezměnila, musí platit

$$\begin{aligned} p = mv &= p^* + p^{**} = (mv - qvdt + mdv - qdtdv) + (qvdt + qdvdt - qWdt) \\ &= mv + mdv - qWdt \end{aligned} \quad (40)$$

$$0 = mdv - qWdt. \quad (41)$$

„Prostý člen“ mv (bez infinitezimálních veličin) se vyrušil, infinitezimální veličiny vyšších řádů se ani nevyskytly a po vydělení dt a úpravě zbývá hledaná rovnice

$$m \frac{dv}{dt} = qW. \quad (42)$$

Výraz na pravé straně – hmotnost krát zrychlení – můžeme podle Newtonova zákona síly $F = ma$ pokládat za *reaktivní sílu*, která urychluje raketu; ta je tedy úměrná výtokové rychlosti W spálených plynů a „rychlosti hoření“ paliva $q = dm/dt$. **(Konec řešení)**

Při tomto postupu nebylo třeba zanedbávat infinitezimální veličiny 2. řádu, protože se žádné nevyskytly. Kdybychom však nejprve určili rychlost obláčku plynu jako $v - W$ a poté rychlost zbytku rakety jako $v + dv$, dostali bychom analogickou rovnici

$$\begin{aligned} p = mv &= p^* + p^{**} = (mv - qvdt + mdv - qdtdv) + (qvdt - qWdt) \\ &= mv + mdv - qWdt - qdvdt. \end{aligned} \quad (43)$$

Opět se vyruší člen mv , zbydou infinitezimální veličiny 1. řádu a navíc člen 2. řádu $-qdvdt$, takže po vydělení dt a úpravě má rovnice nyní tvar

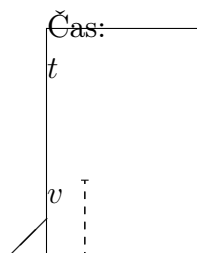
$$m \frac{dv}{dt} = qW + qdv. \quad (44)$$

Nyní provedeme limitní přechod $dv \rightarrow 0$; tím ovšem poslední člen vymizí, takže výsledná rovnice vyjde stejná jako rov. (42). Subtilní úvaha, zda uvažovat vzájemnou rychlost W obláčku vůči raketě před hořením nebo po něm, tedy nemění nic na konečném výsledku.

Příklad 4.3.2: Barometrická formule. Jak se mění v atmosféře tlak vzduchu s nadmořskou výškou? Uvažujme nejjednodušší situaci klidného vzduchu v mechanické rovnováze.

Řešení:

Tlak vzduchu v nadmořské výšce z je vlastně hydrostatickým⁹ tlakem známým z Archimédova¹⁰ a Paskalova¹¹ zákona a je dán tíhou vzduchu nacházejícího se nad úrovní z . V myšleném válci o průřezu s plochou¹² dS nechť je v nadmořské výšce z tlak $p = dF/dS$, kde



⁹Pro puristy: aerostatickým

¹⁰Archimédes ze Syrakus (Sicílie), matematik, fyzik a – v našich pojmech – vynikající technik a aplikátor vědy, 287–212 př.Kr.

¹¹Blaise Pascal, francouzský matematik, fyzik, filosof a spisovatel, 1623–1662

dF je síla působící kolmo na plochu dS , způsobená tíží vzduchového sloupce se základnou dS . Přesuňme se o infinitezimální výšku dz výše. Tam bude tlak nižší o tíhu způsobenou válečkem o základně dS a výšce dz , který tedy má objem $dV = dS \cdot dz$, hmotnost $dm = \rho dV$ a váhu $dF = g dm = \rho g dV$.

Příklad 4.3.3: Deformace kontinua, tenzor deformací.

Řešení:

5 Integrál

5.1 Zavedení

5.1.1 Jednoduchý integrál, primitivní funkce

Je-li $F' = f$ na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak f nazýváme derivací funkce F a F nazýváme **primitivní funkcí** k funkci f neboli (neurčitým) integrálem funkce f . Primitivní funkce je určena jednoznačně až na aditivní konstantu, protože funkce $F(x)$ a $F(x) + \text{konst}$ mají touž derivaci. Výraz

$$F(b) - F(a) \equiv [F(x)]_a^b = \int_a^b f(x) dx \quad (45)$$

nazýváme (určitým) integrálem z funkce f od dolní meze $x = a$ do horní meze $x = b$. V praxi většinou počítáme integrál jako primitivní funkci. Funkce $F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi$, tj. funkce horní meze integrálu, je primitivní funkcí k f , tj.

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx} \int_a^x f(\xi) d\xi = f(x)$$

↔ Ve fyzice jde zpravidla o funkce natolik jednoduché, že jsou integrovatelné (a to se stejným výsledkem) podle Newtona, Riemanna, Lebesgua, Perrona, Stieltjesa, ... Zpravidla plně vyhovuje Lebesguův integrál; tam, kde by byly potíže (Diracova δ -funkce, kap. 9), výslovně upozorníme.

♣ Symbol $\int$ je stylizované písmeno S = summa. Symbol diferenciálu dx pochází z Riemannova pojetí integrálu jako limity součtu ploch obdélníků

$$\int f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_k f(x_k) \cdot \Delta x_k$$

o základnách Δx_k (na které je rozdělen interval $\langle a, b \rangle$ a na nichž leží body x_k) a o výškách daných funkčními hodnotami $f(x_k)$.

5.1.2 Integrály ve vícerozměrném prostoru

Integrál v Riemannově pojetí lze názorně rozšířit do vícerozměrného prostoru na integrál dvojný, trojný, ... Jako je $J = \int_{\mathcal{J}} dx$ délka intervalu $\mathcal{J}$, tak $S = \iint_{\mathcal{M}} dx dy$ určuje obsah oblasti $\mathcal{M}$ a $V = \iiint_{\mathcal{V}} dx dy dz$ udává objem V trojrozměrné množiny $\mathcal{V}$.

Užívané značení: $dx dy dz \equiv dV \equiv d^3\mathbf{r}$. Je radno vypsát exponent (zde 3). Je to jednak z důvodů rozměrových: $d\xi$ má stejný rozměr jako ξ , tedy $d^3\mathbf{r}$ se měří v m^3 , nikoli m, jednak na odlišení od vektoru $d\mathbf{r} \equiv \{dx; dy; dz\}$ i od skaláru $dr \equiv |d\mathbf{r}|$ figurujících v křivkovém integrálu (tj. podél dané křivky). Integrál přes uzavřenou křivku se značí kroužkem přes integritko: $\oint$.

¹²Tato plocha by mohla být klidně konečná a nikoli infinitezimální, aniž by to ovlivnilo další postup; neuvažujeme totiž jakoukoliv závislost ve vodorovných směrech x a y . Berme to jako cvičení na situaci s několika nezávislými infinitezimálními veličinami.

Meze integrace se často zkracují, takže např. křivkový integrál z bodu o polohovém vektoru $\mathbf{r}_1$ podél křivky Γ do bodu $\mathbf{r}_2$ se namísto $\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}$ zapisuje zpravidla $\int_{(1)}^{(2)}$, nebo dokonce i bez závorek $\int_1^2$, nehrozí-li nedorozumění. Připomeňme, že pro křivku Γ délky s vedoucí z bodu $\mathbf{r}_1$ do $\mathbf{r}_2$ platí $\int_{\Gamma} d\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, zatímco $\int_{\Gamma} dr = s$.

5.2 Význam v aplikacích

Integrál $\int_a^b f(x)dx$ udává plochu mezi křivkou f a osou x od $x = a$ do $x = b$ (nad osou x kladně, pod ní záporně).

Trojný integrál $\iiint_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{r} \equiv \iiint_{\mathcal{V}} dV = V'$ přes množinu $\mathcal{V}$ určí její trojrozměrný objem V' . Trojný integrál $\iiint_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \equiv \iiint_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) dV = m$ určí hmotnost m tělesa rozloženého v oblasti $\mathcal{V}$ s hustotou ρ .

Mnoho dalších interpretací plyne ze vztahu integrálu a derivace.

5.3 „Slovník“ pro integrály

$$\begin{array}{lll} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} & \text{pro } n \neq -1 & \int \frac{dx}{x^2+1} = \arctg x & \int \sin x dx = -\cos x \\ \int \frac{dx}{x} = \ln \left(\frac{|x|}{x_0} \right) & & \int e^x dx = e^x & \int \cos x dx = \sin x \end{array}$$

U primitivní funkce může být aditivní konstanta; pro stručnost ji zde nevypisujeme. Konstanta x_0 u logaritmu je libovolná, ale má fyzikální rozměr, a to stejný jako x . Jejím zavedením předejdeme rozměrovým nesrovnalostem typu „logaritmus metru“.

5.4 „Gramatika“ pro integrály

Integrál lineární kombinace:

$$\int (\alpha f \pm \beta g) dx = \alpha \int f dx \pm \beta \int g dx \quad (46)$$

Integrace per partes:

$$\int f' g dx = f g - \int f g' dx \quad (47)$$

Integrace substitucí:

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(y) dy \quad (48)$$

Derivace podle parametru:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int f(x, \alpha) dx = \int \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) dx \quad (49)$$

Příklad: Známe integrál $\int e^{\alpha x} dx = \alpha^{-1} e^{\alpha x}$. Derivací obou stran podle α dostáváme

$$\int x e^{\alpha x} dx = -\alpha^{-2} e^{\alpha x} + \alpha^{-1} x e^{\alpha x}.$$

Tak lze opakovanou derivací a nakonec dosazením $\alpha = 1$ snadno spočítat pro libovolnou mocninu n integrály typu $\int x^n e^{-x} dx$, $\int x^n \cos x dx$, $\int x^n \sin x dx$ apod. (Téhož výsledku zde dosáhneme i integrací per partes volbou $f = x$, $f' = 1$, $g = e^x$ apod.)

¶ *integrál* ze střílat. integrālis = celkový < lat. integer = netknutý, neporušený z in- = ne-; tangō, -ere, tetigī, tāctum = dotýkati se; ¶ *primitivní* = prvotní z lat. prīmītīvus t.v. < prīmus = přední, první; ¶ *substituce* z lat. substituō, -ere, -ū, -ūtum = dosadit, ze sub- = pod-; stō, -āre, stetī, stātūrus = státi; ¶ *per partes* = po částech z lat. per partēs t.v., per = přes; pars, -tis f. část.

6 Vektorový prostor se skalárním součinem

6.1 Zavedení

Z geometrie připomeneme některé vlastnosti euklidovského prostoru, které budeme dále potřebovat, případně zobecňovat pro prostory funkcí, zejména pro Fourierovy řady. Čtenář uvedené věci jistě dávno zná, a proto je jen nepřesně, ale stručně připomínáme.

↔ Čtenáři matematicky erudovanému nebude jistě činit problémy v případě potřeby formulovat níže uvedené náznaky přesně. Pro kontrolu jsou přesnější formulace uvedeny hromadně na konci.

Pracujeme jednak s tělesem **S** reálných čísel, které v tomto kontextu nazýváme *skaláry*, jednak s *vektory* **v** jakožto prvky *vektorového prostoru* **V**. Vektorový prostor se skalárním součinem (někdy zvaný unitární prostor) má tyto vlastnosti:

Vektorový součet (součet vektorů)

- 1) Součet vektorů je opět vektor: $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$.
- 2) Sčítání vektorů je komutativní: $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$.
- 3) Sčítání vektorů je asociativní: $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{z} = \mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{z})$.
- 4) Existuje *nulový* vektor **0**, pro nějž vždy $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$.
- 5) Ke každému vektoru **v** existuje *opačný* vektor $-\mathbf{v}$ takový, že $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

Součin skaláru a vektoru

- 6) Součin skaláru γ a vektoru **v** je opět vektor: $\mathbf{w} = \gamma\mathbf{v}$.
- 7) Násobení skaláru a vektoru je asociativní: $\alpha(\beta\mathbf{v}) = (\alpha\beta)\mathbf{v}$.
- 8) Násobením skalárem $\gamma = 1$ se vektor nezmění: $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$.
- 9) Násobení skalárem je distributivní vůči sčítání skalárů: $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$.
- 10) Násobení skalárem je distributivní vůči sčítání vektorů: $\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}$.

Skalární součin (dvou vektorů)

- 11) Skalární součin (dvou vektorů) je skalár: $\gamma = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.
- 12) Skalární součin je komutativní: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$.
- 13) Skalární součin je distributivní: $(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) \cdot \mathbf{z} = \alpha\mathbf{v} \cdot \mathbf{z} + \beta\mathbf{w} \cdot \mathbf{z}$.
- 14) Skalární součin vektoru **v** sama se sebou je vždy nezáporný.

Pro nulový vektor je $\mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = 0$, pro $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ je vždy $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$.

Z geometrie připomeňme, že vektory **u**, **v** nazýváme kolmé, je-li $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

♣ Je skalární součin asociativní? Tato otázka nemá smysl, protože výsledek skalárního součinu (skalár) je jiného typu, než operandy (vektory). Formální zápis $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ ukazuje, že ani pravá, ani levá strana „rovnosti“ nemá smysl. A kdybychom vždy nahradili příslušný skalární součin násobením vektoru a skaláru? Pak by zápis sice měl smysl, ale nebyl by pravdivý. Obecně $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} \neq \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$, např. když **u** a **w** mají různé směry.

♣ Nulový vektor se také nazývá *neutrální* prvek pro sčítání. Pro násobení skalárů je neutrálním prvkem jednička 1, protože $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$ pro každé α . Existuje neutrální prvek pro skalární součin? Neexistuje, protože výsledkem skalárního součinu je skalár, a nikoli vektor.

Říkáme, že vektor **e** je *jednotkový*, má-li jednotkovou velikost: $\sqrt{\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}} = 1$. V geometrii často zavádíme orientovaný směr v prostoru jako příslušný jednotkový vektor.

♣ Zatímco jednotkový prvek v grupě apod. je jediný, jednotkových vektorů je více (leží v každém směru).

¶ Značka **e** je z něm. Einheit, f. = jednotka; ¶ *vektor* z lat. vector = průvodič od vehō, -ere, vēxī, vectum = vézti; ¶ *skalár* z lat. scalæ, -ārum f. žebřík, schody (skaláry lze uspořádat jako schody).

6.2 Ortonormální báze

Uvažujme K navzájem kolmých jednotkových vektorů $\mathbf{e}_k$ ve $\mathbf{V}$ (platí tedy $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk}$). Všechny vektory $\mathbf{v}$ vzniklé z nich lineární kombinací

$$\mathbf{v} = \sum_k \alpha_k \mathbf{e}_k \quad (50)$$

tvoří vektorový podprostor $\mathbf{V}'$ ve $\mathbf{V}$. Každý vektor z $\mathbf{V}'$ je zřejmě jednoznačně určen K -tíci skalárů

$$\{\alpha_k\}_1^K = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K\}. \quad (51)$$

Tato K -tice je *reprezentací* vektoru $\mathbf{v}$ při dané *ortonormální bázi* $\{\mathbf{e}_k\}_1^K$. Z reprezentace vytvoříme původní vektor použitím rov. (50). Potřebujeme-li naopak k zadanému vektoru najít jeho reprezentaci, využijeme ortonormálnosti báze: protože $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk}$, platí

$$\alpha_k = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_k. \quad (52)$$

6.3 Ortogonální báze

Uvažujme nyní navzájem kolmé vektory $\{\mathbf{f}_k\}_1^K$, které ale nejsou jednotkové. Označme jejich velikosti $\nu_k = \sqrt{\mathbf{f}_k \cdot \mathbf{f}_k}$, takže zřejmě platí $\mathbf{f}_j \cdot \mathbf{f}_k = \nu_k \delta_{jk}$. Předchozí úvahu můžeme provést opět, jen s nepatrnou změnou v rov. (52), kde skalární součin vydělíme velikostí příslušného vektoru báze:

$$\mathbf{v} = \sum_k \alpha_k \mathbf{f}_k \quad \text{podle rov. (50)} \quad (53)$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\nu_k} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_k \quad \text{podle rov. (52)}. \quad (54)$$

6.4 Schmidtův ortogonalizační postup

Ortogonalizovat danou bázi $\{\mathbf{f}_k\}_1^n$ znamená nalézt ortogonální bázi $\{\mathbf{g}_k\}_1^n$ takovou, že vektorové prostory vytvořené lineárními kombinacemi vektorů každé z těchto bází jsou stejné. Podle Schmidta ortogonalizujeme takto:

1. $\mathbf{g}_1 = \mathbf{f}_1$
2. $\mathbf{g}_2 = \mathbf{f}_2 + \alpha_1 \mathbf{g}_1$, kde α_1 určíme z požadavku ortogonality po skalárním vynásobením rovnice vektorem $\mathbf{g}_1$, tedy $0 = \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{f}_2 + \alpha_1 \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1$, a odtud $\alpha_1 = \frac{-\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{f}_2}{|\mathbf{g}_1|^2}$.
3. $\mathbf{g}_3 = \mathbf{f}_3 + \alpha_1 \mathbf{g}_1 + \alpha_2 \mathbf{g}_2$, kde α_1, α_2 (jiná než v předchozích krocích) opět určíme postupným skalárním vynásobením $\mathbf{g}_1$ a $\mathbf{g}_2$. Vyjde $\alpha_1 = \frac{-\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{f}_3}{|\mathbf{g}_1|^2}$, resp. $\alpha_2 = \frac{-\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{f}_3}{|\mathbf{g}_2|^2}$.

(Čtenář – matfyzák jistě poté, co si vyzkouší a pochopí tento postup, s potěšením dopíše k -tou řádku.)

6.5 Prostory funkcí

Třírozměrný vektor, jehož reprezentace je např. $\mathbf{u} = (3; -2; 4)$, bychom mohli zobrazit postupným vnesením jeho složek jako jednorozměrnou schodovitou funkci $u(x)$:

$$\begin{array}{ll} 3 & \text{pro } 0 < x < 1 \\ -2 & \text{pro } 1 < x < 2 \\ 4 & \text{pro } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{všude jinde.} \end{array}$$

Jak bude nyní vypadat skalární součin vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v} = (8; 5; -2)$? Výsledek je ovšem

$$\gamma = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3 \cdot 8 + (-2) \cdot 5 + 4 \cdot (-2) = 6 \quad (55)$$

a dostaneme ho i z funkcí $u(x)$, $v(x)$ jako integrál

$$\gamma = \int_0^3 u(x)v(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)v(x) dx. \quad (56)$$

To nás přivádí na myšlenku rozšířit pojem vektorového prostoru i na prostory funkcí s tím, že skaláry budou obvyklá čísla, vektoru $\mathbf{u}$ bude odpovídat funkce $u(x)$ a skalárnímu součinu bude odpovídat určitý integrál součinu obou funkcí:

$$\begin{aligned} \alpha &\sim \text{reálná čísla} \\ \mathbf{u} &\sim u(x) \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &\sim \int_a^b u(x)v(x) dx \quad . \end{aligned}$$

Snadno ověříme, že uvedené přiřazení splňuje požadavky 1) až 14) na vektorový prostor se skalárním součinem.

$\longleftrightarrow$ Zobecňovat lze pochopitelně dále. Integrál může být na libovolném intervalu, i nekonečném, můžeme integrovat s váhou, tj. s jistou předem danou funkcí $\rho(x)$, takže integrál bude obecně Stieltjesova typu (hodí se i pro nespojitou funkci m , kdy neexistuje $\rho = dm/dx$):

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \int_a^b u(x)v(x) \rho(x) dx = \int_a^b u(x)v(x) dm.$$

Můžeme uvažovat i komplexní čísla a funkce, ale pak ve skalárním součinu užijeme komplexně sdruženou funkci $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \int u^* v = \langle u | v \rangle$. Symbolika bra- vektorů $\langle u |$ a ket- vektorů $|v\rangle$ je častá v kvantové mechanice. Ve speciální relativitě zase pracujeme často se semidefinitní metrikou, kdy z $|v| = 0$ neplatí $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

$\longleftrightarrow$ Problémy, které se na štěstí nebudou týkat našich aplikací, mohou být spojeny s *dimenzí* vektorového prostoru, tedy s počtem prvků báze, která by umožnila popsat všechny funkce – vektory z našeho nového prostoru. Zatímco v geometrii jsme pracovali s třírozměrným prostorem a celkem nebylo problému rozšířit jej na deseti nebo obecně K -rozměrný pro jakékoliv přirozené K , u funkcí nebude již počet rozměrů konečný. S tím se vynoří otázky konvergence či divergence, které u konečných sum nebyly.

$\longleftrightarrow$ V této nekonečněrozměrné analogii Euklidova prostoru – v Hilbertově prostoru – také např. nelze jednoduše zavést objem. Do nekonečněrozměrné krychle K^1 s jednotkovou hranou lze vnořit krychli K^l , která má hranu libovolné délky l : má-li mít např. hranu délky $l = 2$, pak si uvědomíme, že tělesová úhlopříčka v k -rozměrné jednotkové krychli má délku $\sqrt{k}$. Čtyřrozměrná krychle má tedy úhlopříčku požadované délky $2 = \sqrt{4}$. Stačí proto každou hranu krychle K umístit jako diagonálu do čtyř dimenzí jednotkové krychle K^1 . Dimenze jednotkové krychle sice „vyčerpáváme“ čtyřikrát rychleji než krychle K , ale vzhledem k jejich nekonečnému počtu nás to nijak neomezuje.

7 Fourierovy řady

7.1 Funkce s periodou 2π

Jako ortogonální báze se nám nabízejí goniometrické funkce $\cos kx$ pro $k = 0, 1, 2, \dots$ a $\sin kx$ pro $k = 1, 2, \dots$. Jejich ortogonalita plyne snadno ze součtových vzorců rov. (13) až (15) a z integrálů

	$\int_0^{2\pi} \cos kx dx$	$\int_0^{2\pi} \sin kx dx$
$k = 0$	2π	0
$k \neq 0$ celé	0	0

Potřebné integrály jsou (k, m jsou přirozená čísla)

	$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos mx dx$	$\int_0^{2\pi} \sin kx \sin mx dx$	$\int_0^{2\pi} \cos kx \sin mx dx$
$k = m = 0$	2π	0	0
$k = m \neq 0$	π	π	0
$k \neq m$	0	0	0

Podle rov. (53) vytvoříme konečný „trigonometrický polynom“

$$P_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (57)$$

Pro jeho koeficienty a_k, b_k platí podle rov. (54):

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_n(x) \cos kx dx \quad (58)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_n(x) \sin kx dx \quad (59)$$

Takové „způsobné“ fyzikální funkce $f(x)$, které jsou periodické s periodou 2π a které lze „dostatečně přesně“ nahradit trigonometrickým polynomem $P_n(x)$ (tj. $f(x) \sim \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$), pak bude možno vytvořit *Fourierovou syntézou*:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (60)$$

kde koeficienty a_k, b_k určí *Fourierova analýza* podle rov. (54):

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx \quad (61)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx \quad (62)$$

↔ Integrály je výhodné brát ve smyslu Lebesguově. Je samozřejmě záležitostí hlubokého matematického rozboru zjistit, které funkce jsou „způsobné“ a co znamená „dostatečně přesně“. Ještě se k tomu v poznámce vrátíme.

Praktický důsledek: funkce $f(x)$ s periodou 2π může být též popsána dvojicí posloupností $\{a_n\}_0^{\infty}, \{b_n\}_1^{\infty}$, které tvoří koeficienty ve Fourierově řadě (60).

Zavedením $c_0 = \frac{1}{2}a_0, c_{\pm k} = \frac{1}{2}(a_k \mp i b_k)$ pro přirozená k a užitím e^{ikx} získá Fourierova řada zvláště hezký tvar

$$\dots c_{-2} e^{-2ix} + c_{-1} e^{-ix} + c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{2ix} \dots = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}) \quad (63)$$

↔ Pojem funkce se tím posouvá. Ze vztahu $\mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ plyne, že např. změna funkční hodnoty v konečném počtu bodů funkci v našem smyslu nemění. V místě skoku dodefinujeme funkci střední hodnotou.

↔ Dále vzniká otázka, kdy a jak konverguje řada z rov. (60) a jak bohatá je třída takto vzniklých funkcí (samozřejmě periodických s periodou 2π). Spokojme se v praxi tím, že zahrne všechny funkce na $(0, 2\pi)$ s variací konečnou (tedy na všechny funkce, které jsou rozdílem dvou monotonních funkcí). To jsou např. všechny funkce f , které splňují všechny následující podmínky

- mají na $\langle 0, 2\pi \rangle$ nanejvýš konečný počet skoků a v bodě skoku jsou dodefinovány střední hodnotou limity zprava a zleva
- interval $\langle 0, 2\pi \rangle$ lze rozbít na konečný počet intervalů I_k tak, že na každém z I_k je f monotonní.

U takových funkcí f Fourierova řada z rov. (60) konverguje, a to k funkci f . Např. pro zvuk v akustice je to jistě dostatečně bohatá nabídka.

7.2 Gibbsův jev

7.3 Funkce s obecnou periodou l

Zatím jsme sledovali funkce s periodou 2π . Jednoduché zobecnění rov. (60) a rov. (61) vede k výsledku pro funkce periodické s obecnou periodou l :

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi}{l}x + b_k \sin \frac{2k\pi}{l}x \right), \quad (64)$$

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{2k\pi}{l}x dx \quad (65)$$

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{2k\pi}{l}x dx \quad (66)$$

případně

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k e^{i \frac{2k\pi}{l}x} + c_{-k} e^{-i \frac{2k\pi}{l}x} \right) \quad (67)$$

$$c_k = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) e^{-i \frac{2k\pi}{l}x} dx, \quad k \text{ je celé.} \quad (68)$$

Ověřte si to jednoduchou substitucí.

7.4 Některé Fourierovy řady

$$\begin{aligned} f(x) = x \text{ pro } 0 < x < 2\pi: \quad f(x) &= \pi - 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots\right) \\ f(x) = x \text{ pro } -\pi < x < \pi: \quad f(x) &= 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right) \\ f(x) = |x| \text{ pro } -\pi < x < \pi: \quad f(x) &= \frac{\pi}{2} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right) \\ f(x) = |\sin(x)| \text{ pro } 0 < x < \pi: \quad f(x) &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1.3} + \frac{\cos 4x}{3.5} + \frac{\cos 6x}{5.7} + \dots\right) \\ f(x) = -1 \text{ pro } \pi < x < 0, f(x) = 1 \text{ pro } 0 < x < \pi: \quad f(x) &= \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\right) \\ f(x) = x(\pi + x) \text{ pro } \pi < x < 0, f(x) = x(\pi - x) \text{ pro } 0 < x < \pi: \\ f(x) &= \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots\right) \\ f(x) = -\ln(2 \sin \frac{x}{2}) \text{ pro } 0 < x < \pi: \quad f(x) &= \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \dots \\ f(x) = \ln(2 \cos \frac{x}{2}) \text{ pro } 0 < x < \pi: \quad f(x) &= \frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \dots \end{aligned}$$

Funkci f po částech spojitou lze ve Fourierově řadě integrovat člen po členu.

Jak rychle ubývají členy posloupností $\{a_k\}, \{b_k\}$ pro $k \rightarrow \infty$? Pro funkce mající skoky jako $1/k$, pro funkce spojitě, ale se zlomy (nespojitosť 1. derivace) jako $1/k^2$, pro hladké funkce (se spojitou první derivací) alespoň jako $1/k^3$ atd.

7.5 Praktická aplikace: lidský sluch

Náš sluch provádí v jistém smyslu průběžnou Fourierovu analýzu. Zvuk (vjem) je způsoben chvěním vzduchu¹³, tj. změnami tlaku vzduchu. Cortiho orgán v našem vnitřním uchu provádí Fourierův rozklad tohoto chvění s kratší časovou základnou (řádově 10 ms) a registruje z něj chvění s frekvencemi v rozsahu asi 20 Hz až 20 kHz. V rozkladu $\sum A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k)$ vnímáme různé frekvence f_k jako různé výšky zvuku (tónu) s hlasitostí danou čtvercem amplitudy A_k^2 . Fázové posuvy φ_k neregistrujeme přímo vůbec (odhlédneme-li od nelinearity ucha apod.).

$\longleftrightarrow$ Fáze se projevuje nepřímo tím, že dva kmity s celočíselným poměrem frekvencí a s *pevným fázovým rozdílem* nevnímáme jednotlivě, ale jako jediný tón jisté barvy (dané právě poměrem vyšších harmonických). Jestliže se však fáze kmitů navzájem mění, může ucho oba tóny rozlišit.

Výšku i hlasitost vnímáme zhruba logaritmicky: frekvenci v rozsahu až $2^{10} : 1$, tedy cca 10 oktáv (oktáva = 2:1), amplitudu výkonu dokonce až $10^{14} : 1$, tedy cca 140 dB ($1 \text{ dB} = \frac{1}{10} \text{ B}$, $1 \text{ B} = 10:1$). Níže jsou zobrazeny různé průběhy tlaku podle funkcí $\sum_{k=1}^6 \frac{1}{k^2} \cos(2k\pi f_0 t + a_k \frac{\pi}{6})$. Třebaže mají průběhy značně rozlišné, slyšíme je stejně, jak si můžete pro $f_0 = 220 \text{ Hz}$ ověřit na webové stránce mé přednášky z akustiky.

8 Fourierova transformace

Perioda $l \rightarrow \infty$

9 Diracova δ -funkce

9.1 Motivace 1: hustota bodového náboje

9.2 Základní vlastnosti δ -funkce

9.3 Motivace 2: derivace funkce se skokem

9.4 Motivace 3: ideálně ostrá měřicí sonda

¹³Také vnímáme chvění přenášené přímo naší lebkou (tzv. kostní slyšení). Proto také sami sebe slyšíme jinak, než jak nás slyší ostatní.