

# Kalkul pro fyziku – 1.díl

1-Kalkul-a.tex

J. Obdržálek – předběžná verze, 2008-10-02

Pro pohodlí studentů zde shrnujeme hlavní matematické vzorce a úpravy užívané při úvodním výkladu fyziky. Předpokládáme součinnost čtenářovu; občas uvedeme namísto obecného vzorce konkrétní příklad (např. u binomické věty) s vírou, že čtenář ihned pochopí, o co jde. Text je občas doplněn poznámkami petitem, aby se netrhal souvislý děj.

Ad binomická věta a  $(1+x)^9$  na následující straně: Asi tak nějak bychom to řekli svému věci znalému kolegovi, chtěli-li bychom mu věc stručně připomenout. Pokud věci totiž čtenář už rozumí (což předpokládáme), pak si je – cítí-li potřebu – snadno přesně doformuluje sám; navíc tím bude mít kontrolu, že věc zná do hloubky. Čtenář méně zkušený je zase zpravidla konkrétním příkladem rychleji orientován správným směrem pro pochopení věci než obecným vzorcem.

Občas jsou uvedeny poznámky mírně odbornější značené  $\longleftrightarrow$ . Nevadí, když ji v prvním čtení přeskočíte anebo když jí nebudete rozumět.

$\longleftrightarrow$  Těleso  $C$  komplexních čísel (vzniklé rozšířením tělesa reálných čísel o prvek „ $i$ “, pro nějž je  $i^2 = -1$ ), nelze dále rozšířit hledáním řešení rovnice  $x^2 = i$ , protože takové  $x$  již leží v  $C$ . Lze však vytvořit asociativní, ale nekomutativní těleso  $Q$  s bází čtyř prvků a s algebrou kvaternionů:  $q = a + b i + c j + d k$ , kde  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ , a dále  $i j = k$ ;  $j i = -k$ , další vzorce získáme cyklickou permutací prvků  $i, j, k$ . Bylo zavedeno Hamiltonem pro popis rotace tuhého tělesa, pro nás je však nyní názornější jeho maticová reprezentace.

Přesná formulace, podmínky platnosti apod. jsou ovšem podstatné v přednášce z matematické analýzy či z numerické matematiky; pro ně však tento text určen není. Ten je pouhým doplňkem k některým přednáškám z *fyziky*, kde se matematika využívá. Jde tu jednak o připomenutí – tedy o stručné vystižení jádra jistých matematických technik používaných ve fyzice, jednak o ukázkou, jak fyzika matematiky používá.

Zejména pro budoucího učitele fyziky jsou určeny další poznámky: plná jména osob v poznámce pod čarou<sup>1</sup>, etymologie ( $\P$ ), populárnější komentář ( $\clubsuit$ ) apod.

$\P$  *Kalkul* = počet, ze střílat. calculus = vápencový kamínek, kterým se počítalo, z lat. calx, -cis, f. vápenec.

$\clubsuit$  Literatura tohoto typu se zpravidla nazývá „kuchařka“.

U mne (J.O.) můžete tento text používat při přednáškách i při písémkách z fyziky coby „tahák“. A také upřímně uvítám Vaše podněty, co mám doplnit do další verze.

## Obsah

|          |                                               |          |
|----------|-----------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Binomická věta</b>                         | <b>2</b> |
| <b>2</b> | <b>Komplexní čísla a goniometrické funkce</b> | <b>3</b> |
| 2.1      | Zavedení . . . . .                            | 3        |
| 2.2      | Zápisy komplexních čísel . . . . .            | 3        |
| <b>3</b> | <b>Derivace</b>                               | <b>5</b> |
| 3.1      | Zavedení . . . . .                            | 5        |
| 3.2      | Význam v aplikacích . . . . .                 | 6        |
| 3.3      | „Slovník“ pro derivace . . . . .              | 6        |
| 3.4      | „Gramatika“ pro derivace . . . . .            | 6        |
| 3.5      | Vyšší derivace . . . . .                      | 7        |

<sup>1</sup>Kvaternionový počet vytvořil sir William Rowan Hamilton, 1805-1865, irský matematik a fyzik

# 1 Binomická věta

Binomická věta rozvádí  $n$ -tou mocninu binomu  $(1+x)$  v řadu, konvergující pro

- a) komplexní  $|x| < 1$  a libovolné reálné  $n$ ;  
b) přirozené  $n$  a libovolné komplexní  $x$  (suma pak má jen  $n+1$  nenulových sčítanců).

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k, \quad \text{např.} \quad (1+x)^9 = 1 + \frac{9}{1}x + \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 \dots \quad (1)$$

$\longleftrightarrow$  Pro necelá  $n$  lze definovat  $n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$ . Viz však též př. 1.1 s  $n = -\frac{1}{2}$ .

¶ *binom* = dvojčlen; z fr. binôme t.v., a to z bi- lat. = dvoj-;  $\nu\delta\mu\omicron\varsigma$  ò, ř. = řád, člen.

Výsledkem je zřejmě mocninná řada se všemi typickými vlastnostmi: zejména v okolí počátku  $x=0$  můžeme očekávat rychlou konvergenci.

Binomické koeficienty znáte z Pascalova trojúhelníku:

|     |                |                |                |     |     |                  |                |  |  |
|-----|----------------|----------------|----------------|-----|-----|------------------|----------------|--|--|
| 0   |                |                |                |     | 1   |                  |                |  |  |
| 1   |                |                |                | 1   | 1   |                  |                |  |  |
| 2   |                |                | 1              | 2   | 1   |                  |                |  |  |
| 3   |                | 1              | 3              | 3   | 1   |                  |                |  |  |
| 4   |                | 1              | 4              | 6   | 3   | 1                |                |  |  |
| ... |                |                |                |     |     |                  |                |  |  |
| $n$ | $\binom{n}{0}$ | $\binom{n}{1}$ | $\binom{n}{2}$ | ... | ... | $\binom{n}{n-1}$ | $\binom{n}{n}$ |  |  |

**Příklad 1.1:** Ukažte souvislost klasického vzorce pro kinetickou energii  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$  se známým relativistickým vzorcem  $E = mc^2$ . „Relativistická“ hmotnost  $m$  souvisí s „klidovou“  $m_0$  vztahem  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ , kde  $\beta = v/c$ .

**Řešení:** Zřejmě

$$E = m_0 c^2 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0 c^2 (1 + (-\beta^2))^{-\frac{1}{2}}$$

a použijeme binomickou větu pro  $n = -\frac{1}{2}$ ,  $x = -\beta^2$ :

$$\begin{aligned} E &= m_0 c^2 \left( 1 - \frac{1}{2}(-\beta^2) + \frac{\frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2}}{1 \cdot 2} (-\beta^2)^2 + \frac{\frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{-5}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} (-\beta^2)^3 + \dots \right) \\ &= m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 v^2 \beta^2 + \frac{5}{16} m_0 v^2 \beta^4 \dots \end{aligned} \quad (2)$$

V klasickém přiblížení je  $v \ll c$ , takže  $\beta \rightarrow 0$ ,  $m_0 \doteq m$  a označíme-li  $E_0 = m_0 c^2$ , platí zřejmě opravdu  $E \doteq E_0 + E_k$ . „Klidová“ energie  $E_0$  představuje člen sice obrovský, ale konstantní, neměnicí se v průběhu děje a neovlivňující tedy nijak mechanický pohyb v klasické fyzice. (Můžeme ho pokládat za vnitřní energii částice.) **(Konec řešení)**

**Příklad 1.2:** Odvoďte vzorec pro  $(a+b)^n$ .

**Řešení:** Zřejmě platí  $(a+b)^n = a^n (1 + \frac{b}{a})^n$ , takže

$$(a+b)^n = a^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{b}{a}\right)^k; \quad \text{pro přirozené } n \text{ platí} \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \quad (3)$$

**(Konec řešení)**

## 2 Komplexní čísla a goniometrické funkce

### 2.1 Zavedení

K reálným číslům přidáme imaginární jednotku  $i$ , algebraicky je rozšíříme  $(+, -, *, /)$  a vzápětí „zúžíme“ relací  $i^2 + 1 = 0$ . Čísla typu  $z = a + ib$  nazýváme komplexními. Pro jejich sčítání i násobení platí stejné zákony (komutativní, asociativní, distributivní) jako pro reálná čísla.

↔ **Precisněji:** Těleso  $\mathbb{R}$  reálných čísel rozšíříme o algebraický prvek  $i$  (aby  $1 + i^2 = 0$ ) na nadtěleso  $\mathbb{C}$  komplexních čísel. **Stručněji:** Těleso  $\mathbb{C}$  komplexních čísel je algebraicky uzavřeným algebraickým rozšířením tělesa  $\mathbb{R}$  reálných čísel. **Jinak:** Komplexní čísla zobrazujeme jako body v *Gaussově*<sup>3</sup> rovině; reálnou, resp. imaginární část udává souřadnice  $x$ , resp.  $y$ .

♣ Relaci  $x^2 + 1 = 0$  ovšem vyhovuje nejenom  $x = i$ , ale také  $x = -i$ .

♣ Někdy se píše  $i = \sqrt{-1}$ ; my však raději nebudeme zavádět (víceznačnou) odmocninu komplexního čísla. Proto např. řešení rovnice  $x^2 = i$  budeme psát jako  $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ , ale neužijeme zápis  $\sqrt{i} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ .

Číslo  $\bar{z} = a - ib$  je *komplexně sdružené* k číslu  $z = a + ib$ . Součet  $z + \bar{z}$  a součin  $z\bar{z}$  jsou reálné, rozdíl  $z - \bar{z}$  ryze imaginární. *Velikost* komplexního čísla (též *absolutní hodnota*) je

$$|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (4)$$

Tzv. základní věta algebry říká, že v oboru komplexních čísel má každý polynom  $n$ -tého stupně právě  $n$  kořenů (se započtením event. násobnosti kořenů).

↔ S pojmem blízkým násobnosti kořene se setkáte např. v kvantové mechanice pod názvem „stupeň degenerace (hladiny energie)“, když několik různých stavů, tvořících tuto hladinu, má stejnou energii. Hladina je např. čtyřikrát degenerovaná, jestliže vhodná **porucha** (tj. malá změna) tuto hladinu rozštěpí na čtyři různé hladiny, ale nikdy ne na víc. Polynomiální rovnice  $x^4 = 0$  má kořen  $x = 0$ , a to čtyřnásobný:  $x_{1234} = 0$ , protože porušená rovnice téhož stupně  $x^4 - \alpha = 0$  má čtyři různé kořeny  $(\pm \sqrt[4]{\alpha}, \pm i \sqrt[4]{\alpha})$  pro libovolně malé  $\alpha > 0$ . Ne každá porucha se nám ovšem hodí; porucha typu  $(1 - \alpha)x^4 = 0$  degeneraci *nesníží*, protože symetrii úlohy nenaruší (a dokonce ani nezmění kořeny). Porucha vedoucí k rovnici  $x^4 - \alpha x^2 = 0$  *sejme degeneraci* jen *částečně*, symetrie zůstane částečně zachována a rovnice bude mít jeden dvojnásobný kořen  $x_{12} = 0$  a dva jednoduché kořeny  $x_3 = \sqrt{\alpha}$  a  $x_4 = -\sqrt{\alpha}$ .

¶ *imaginární* = zdánlivý, obrazný, z lat. imāgō, -inis f. = obraz, vidina; ¶ *komplexní* = složený, z lat. com- = s-; plectō, -ere, plexī, plexus = plésti, tedy číslo „spletené“ dohromady ze dvou částí; ¶ *algebra* ze střlat. algebra z arab. al-džabr = řada čísel; ¶ *komutativní* = záměnný z lat. com- = s-; mūtō, -āre, -āvī, -ātum = zaměňovati; ¶ *asociativní* = sdružovatelný z lat. ad- = k; sociō, -āre, -āvī, -ātum = pojiti, sdružovati; ¶ *distributivní* = rozdělitelný, z lat. dis- = roz-; tribuō, -ere, -uī, -ūtum = dělit; ¶ *reálný* = skutečný, věcný ze střlat. realis z lat. rēs, reī, f. = věc.

### 2.2 Záписy komplexních čísel

Zápis

$$z = a + ib \quad (5)$$

se nazývá *kartézský*<sup>4</sup>. Má názorný význam bodu v Gaussově rovině a je vhodný pro algebraické zpracování.

Jiný užívaný tvar je *goniometrický*:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (6)$$

<sup>2</sup>Elektrotechnici značí imaginární jednotku „j“ a značku „i“ ponechávají pro elektrický proud.

<sup>3</sup>Karl Friedrich Gauss, 1777-1855, něm. astronom, matematik a fyzik

<sup>4</sup>*Cartesius* je polatinštělý tvar jména Descartes (René Descartes, fr. filosof a matematik, 1596-1650).

kde  $r = |z|$  je velikost komplexního čísla a  $\varphi$  jeho *argument*; ten se zpravidla uvažuje mod  $2\pi$  v intervalu  $[-\pi, \pi[$  anebo  $[0, 2\pi[$ .

Vztah

$$\exp(i\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (7)$$

se nazývá Moivrova<sup>5</sup> věta; lze ho ověřit např. rozvojem v mocninnou řadu. Z něho plyne tvar *exponenciální*, totiž

$$z = r \exp i\varphi, \quad (8)$$

opět  $r = |z|$ . Ten je zvláště výhodný pro násobení, mocnění a některé funkce; je z něj mj. zřejmé, že

$$\lg z = \lg r + i\varphi \quad (+ i2k\pi \text{ pro libovolné celé } k). \quad (9)$$

To je vhodné pro výpočet komplexní mocniny komplexního čísla:

$$(a + ib)^{(c+id)} = (r e^{i\varphi})^{(c+id)} = r^c e^{ic\varphi} r^{id} e^{-\varphi d} = (r^c e^{-\varphi d}) e^{i(c\varphi+d\ln r)}.$$

**Příklad 2.1:** Určete  $i^i$ .

**Řešení:** V exponenciálním zápisu je  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ . Je tedy  $r = 1$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $c = 0$  a  $d = 1$ , takže

$$i^i = (1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}})^i = (e^{i\frac{\pi}{2} \cdot i}) = e^{-\frac{\pi}{2}} \doteq 0,20788 \dots \quad \textbf{(Konec řešení)}$$

**Příklad 2.2:** Odvoďte součtové vzorce pro  $\cos(a \pm b)$  a  $\sin(a \pm b)$  a vzorce pro součty a součiny trigonometrických funkcí.

**Řešení:** Vzhledem k tomu, že  $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ , dostaneme dosazením z rov. (7)

$$\cos(a \pm b) + i \sin(a \pm b) = e^{i(a \pm b)} = e^{ia} \cdot e^{\pm ib} = (\cos a + i \sin a)(\cos b \pm i \sin b). \quad (10)$$

Odtud roznásobením a porovnáním reálných a imaginárních částí snadno součtové vzorce

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \quad (11)$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b, \quad (12)$$

z nichž plyne (pro Fourierovy integrály)

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \quad (13)$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(-\cos(a+b) + \cos(a-b)) \quad (14)$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \quad (15)$$

a pro studium stojatých vln ( $a = \frac{c+d}{2}$ ,  $b = \frac{c-d}{2}$ )

$$\sin c + \sin d = 2 \sin \frac{c+d}{2} \cos \frac{c-d}{2} \quad (16)$$

$$\sin c - \sin d = 2 \cos \frac{c+d}{2} \sin \frac{c-d}{2} \quad (17)$$

$$\cos c + \cos d = 2 \cos \frac{c+d}{2} \cos \frac{c-d}{2} \quad (18)$$

$$\cos c - \cos d = -2 \sin \frac{c+d}{2} \sin \frac{c-d}{2}. \quad \textbf{(Konec řešení)} \quad (19)$$

---

<sup>5</sup>Abraham de Moivre, 1667-1754, fr. matematik

**Příklad 2.3:** Ukažte souvislost mezi funkcemi násobného úhlu a tzv. trigonometrickými polynomy (tj. polynomy ve funkcích  $\sin$  a  $\cos$ ).

**Řešení:** Například

$$\cos 3a + i \sin 3a = e^{3ia} = (e^{ia})^3 = (\cos a + i \sin a)^3 \quad (20)$$

Roznásobením, užitím relace  $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$  a porovnáním reálných a imaginárních částí dostaneme snadno

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a \quad ; \quad \sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a \quad (21)$$

Pro jiný exponent si jistě poradíte sami (případně s užitím binomické věty). **(Konec řešení)**

Zápisy goniometrický i exponenciální jsou jednoznačné při volbě intervalu  $\mathcal{J}$  délky  $2\pi$  pro  $\varphi$  a pro  $z \neq 0$ . V případě  $z = 0$  může být zvolen argument  $\varphi$  libovolně.

Komplexní čísla se bohatě využívají např. v elektrotechnice při popisu obvodů se střídavým proudem. V lineárních obvodech jsou všechny hodnoty napětí  $u(t)$  i proudů  $i(t)$  *harmonickými funkcemi*, tedy funkcemi typu  $u = u_0(\cos \omega t + \varphi_u)$ ,  $i = i_0(\cos \omega t + \varphi_i)$  s různými fázovými konstantami  $\varphi_u$ ,  $\varphi_i$ ; rozdíl fází se nazývá zpravidla *fázový posuv*. Pro pevné  $\omega$  zavedeme jako zobecnění reálného (ohmického) odporu *komplexní impedanci*, popisující pak chování rezistorů, kondenzátorů a cívek v libovolných kombinacích; s veličinou  $u(t)$  pracujeme jako s komplexní veličinou  $u$  v exponenciálním zápisu. Tím se výrazně zjednodušuje vyjádření veškerých lineárních rovnic a vztahů. Veličiny tohoto typu se nazývají v elektrotechnice *fázory*.

Komplexní čísla jsou ovšem vhodná i všude jinde při popisu harmonických kmitů a vln. Při lineárních jevech pak stačí uvažovat jako měřenou veličinu např. reálnou část příslušné komplexní veličiny. Pro výpočet nelineárních veličin (např. energie) je nutno nejprve přejít k reálným částem a pak případně pro tyto veličiny odvodit speciální pravidla.

Stejně jako z reálných čísel můžeme i z komplexních čísel konstruovat např. vektory, matice apod. Mluvíme pak o komplexních vektorech atd.

↔ V kvantové teorii je stav systému popsán zpravidla<sup>6</sup> tzv. vlnovou funkcí  $\psi$ , která je obecně komplexní a není přímo měřitelná. Komplexní sdružení se zpravidla značí hvězdičkou:  $\psi^*$ . Měřitelné veličiny získáváme středováním, např. pro elektron popsáný funkcí  $\psi(x)$  je pravděpodobnost výskytu na intervalu  $[a, b]$  rovna  $\int_a^b \psi^*(x)\psi(x) dx$ .

## 3 Derivace

### 3.1 Zavedení

Uvažujme dvě fyzikální veličiny, např. polohu  $x$  na lince v peci a teplotu  $f(x)$  v této poloze; ta bude jistě na poloze záviset. Zajímá nás vliv *změny* polohy na *změnu* teploty. Studium závislosti změn vede k zavedení derivace. Značme změny (přírůstky, difference) značkou  $\Delta$ . Při nárůstu<sup>7</sup>  $x$  o  $\Delta x$  (posunutí) nechť vzroste teplota o  $\Delta f$ . Derivace je pak limitou

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \equiv \frac{df}{dx}. \quad (22)$$

<sup>6</sup>Stav může být popsán i (komplexním) stavovým vektorem. Nejobecnější popis dává tzv. matice hustoty; samozřejmě je také komplexní.

<sup>7</sup>Samozřejmě může být  $\Delta x$  nebo  $\Delta f$  záporné; v tom případě fakticky nepůjde o nárůst, ale o pokles. Čtenáře zvyklého na algebraický součet, zahrnující i odčítání, to jistě nezmate.

Ve stejném významu se užívají i zápisy

$$f'(x) \equiv \frac{d}{dx}f(x) \equiv df/dx. \quad (23)$$

Derivaci podle *času* značíme ve fyzice často tečkou nad proměnnou:  $d\mathbf{r}/dt \equiv \dot{\mathbf{r}}$ .

Výraz  $df$  se nazývá (totální) *diferenciál* funkce  $f$ ; konečná změna  $\Delta f$  je *diference*.

$\longleftrightarrow$  Kdyby  $f$  byla lineární, pak by bylo  $\Delta f = df$  přesně i pro konečné  $dx$ . V tom smyslu se říká, že  $df$  je lineární část přírůstku  $\Delta f$ . Danému bodu  $x_0$  a diferenciálu  $dx$  odpovídá pak diferenciál  $df = f'(x_0) dx$  přesně a pro libovolné  $dx$ .

Ve fyzikálních úvahách se často mluví o *konečném* přírůstku  $\Delta x$ , na rozdíl od *infinitesimálního* nebo *nekonečně malého* přírůstku  $dx$ . Ale o tom až v Kap. ??.

Pojmy derivace i limity (s kvantifikátory,  $\varepsilon$ ,  $\delta$ , ...) proberete detailně v úvodním kurzu matematické analýzy.

¶ *derivace* = odvození metaf. z lat. dērivātiō, -ōnis f. odvodnění z de- = od, rīvus, -ī m. = potok; ¶ *limita* = hranice, mez z lat. limes, -itis m. = mez (mezi poli); ¶  $d$ ,  $\Delta$ ,  $\delta$  z lat. differentia, -æ f. = rozdíl, různost z dis- = roz-; ferō, ferre, tulī, lātum = nésti.

## 3.2 Význam v aplikacích

Vyjádříme-li funkci  $y(x)$  křivkou (grafem v souřadnicích  $x$ ,  $y$ ), pak derivace  $y'(x) = \operatorname{tg} \alpha$  v bodě  $(x, y)$  je *směrnicí tečny* křivky v tomto bodě. Graf je nutno ovšem vynášet tak, aby jednotky SI veličin  $x$ ,  $y$  byly zobrazeny na osách stejně velkými úseky.

Je-li nezávisle proměnnou čas  $t$ , je  $\dot{f} \equiv \frac{df}{dt}$  *rychlost*: je-li  $s$  dráha, je  $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$  rychlost pohybu; je-li  $T$  teplota, je  $\dot{T} = \frac{dT}{dt}$  rychlost zahřívání apod.

♣ S tím souvisejí i různá běžná čtení derivace:  $d\mathbf{p}/dt$  „časová změna hybnosti“, „přírůstek hybnosti za jednotku času“. Např. rychlost pohybu  $ds/dt$  se často čte jako „dráha za jednotku času“. Rozumí se tím, že *kdyby* byla rychlost pohybu stálá, *pak by* dráha uražená za jednotku času (tj. za sekundu) byla číselně rovna této rychlosti.

## 3.3 „Slovník“ pro derivace

$$\begin{array}{lll} (\text{konst})' = 0 & (\exp x)' = \exp x & (\arctan x)' = (1 + x^2)^{-1} \\ (x^n)' = nx^{n-1} & (\cos x)' = -\sin x & (\arcsin x)' = (1 - x^2)^{-1/2} \\ (\ln |x|)' = 1/x & (\sin x)' = \cos x & (\arccos x)' = -(1 - x^2)^{-1/2} \end{array}$$

♣ Norma předepisuje pro tangentu značku  $\tan$ , nikoli  $\operatorname{tg}$ ,  $\operatorname{tang}$  apod.

## 3.4 „Gramatika“ pro derivace

### 3.4.1 Derivace součtu a součinu

Jsou-li  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  konstanty a  $f$ ,  $g$ ,  $h$  funkce, platí

$$(\alpha f + \beta g - \gamma h)' = \alpha f' + \beta g' - \gamma h' \quad (24)$$

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh' \quad (25)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \text{pro } g \neq 0. \quad (26)$$

### 3.4.2 Derivace složené funkce

Je-li  $f = f(x)$ ,  $x = \xi(t)$  a značíme-li  $F(t) = f(\xi(t))$ , platí

$$\frac{dF}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{d\xi}{dt} \quad \text{čili} \quad \dot{F} = f' \dot{\xi} \quad (27)$$

Velmi často se ve fyzice nerozlišuje  $F$  od  $f$ , protože popisují *fyzikálně* tutéž veličinu. Pak se ovšem nerozlišuje ani  $x$  od  $\xi$  a píše se např.

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt},$$

jako by se „krátilo diferencíálem  $dx$ “. To může hloubavého studenta zmást; taková interpretace také zradí u funkcí více proměnných. Především to však právem rozhoří matematika. Z jeho hlediska jsou totiž  $F$  a  $f$  zcela různé funkce  $F(t)$  a  $f(x)$ , a taky  $x$  je nezávisle proměnná, zatímco  $\xi$  je funkce  $\xi(t)$  nezávisle proměnné  $t$ .

**Příklad:** Značme  $\tau$  teplotu podél linky v peci. Nechť roste pro  $0 < x < 1$  lineárně, podle vztahu  $\tau(x) = \tau_0 + x(\tau_1 - \tau_0)$ . Teploměr projíždí linku zrychleně, pro  $0 < t < 1$  je  $\xi(t) = t^2$ . Údaj  $T(t)$  teploměru roste tedy kvadraticky s časem:  $T(t) = \tau_0 + t^2(\tau_1 - \tau_0)$ . Fyzik zdůrazňuje, že obojí  $T$  i  $\tau$  znamenají totéž, totiž teplotu v peci. Matematik zdůrazňuje, že  $T(t)$  a  $\tau(x)$  jsou zcela různé funkce různých proměnných. Pravdu mají samozřejmě oba.

♣ Rozmyslete si, co plyne z fyzikální interpretace derivace složené funkce: údaj teploměru se mění ( $\frac{dT}{dt} \neq 0$ ) opravdu jen tehdy, když se podél linky mění teplota ( $\frac{d\tau}{dx} \neq 0$ ) a přitom se teploměr pohybuje ( $\frac{d\xi}{dt} \neq 0$ ).

### 3.4.3 Derivace inverzní funkce

Derivace inverzní funkce je rovna převrácené hodnotě derivace funkce původní:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}. \quad (28)$$

Při geometrické interpretaci porovnáváme původní graf funkce s grafem překlopeným kolem osy prvního kvadrantu.

♣ Osy  $x$ ,  $y$  si tedy promění polohu.

↔ Přesněji: Je-li  $y = y(x)$  v okolí  $U(x_0)$  bodu  $x_0$  monotonní a má-li nenulovou derivaci, pak existuje inverzní funkce  $x = x(y)$ , tj. pro  $X \in U$  platí  $x(y(X)) = X$ , a její derivace je rovna uvedenému výrazu. Symboly  $x$ ,  $y$  mají na obou stranách rov. (28) trochu jiný význam, podobně jako výše u kap. 3.4.2.

## 3.5 Vyšší derivace

Derivovanou funkci můžeme opět derivovat:  $(f')' \equiv f'' \equiv f^{(2)}$ , neboli

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dx} \right) \equiv \frac{d^2 f}{dx^2}$$

a čteme „dé druhé  $f$  podle dé  $x$  na druhou“. Podobně tvoříme i vyšší derivace.

Zápis druhé derivace  $\frac{d^2}{dx^2}$  zde znamená  $(dx)^2$ ; nikoli tedy  $d(x^2)$ , což je první derivace podle výrazu  $x^2$  a vyskytuje se příležitostně v analytické mechanice.

Vyšší derivace podle *času* značíme analogicky více tečkami:  $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\mathbf{r}}, \frac{d^3 \mathbf{r}}{dt^3} \equiv \dddot{\mathbf{r}}$ .