

Kapitola 2

1D pohyb: příklady

2.1 Matematický aparát

2.1.1 Homogenní rovnice

Pohybová rovnice bývá v jednodušších případech *homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty*, tedy

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} = 0, \quad (2.1)$$

kde a_k jsou konstanty (obecně komplexní), N je řád diferenciální rovnice (v Newtonově zákoně $N = 2$) a $x(t)$ je neznámá funkce času – zpravidla souřadnice popisující pohyb částice.

Řešení rov. 2.1 hledáme ve tvaru

$$x(t) = e^{\lambda t}. \quad (2.2)$$

Dosazením do rov. 2.1 dostaneme

$$\left(\sum_{k=0}^N a_k \lambda^k \right) e^{\lambda t} = 0, \quad (2.3)$$

a protože $e^{\lambda t} \neq 0$, dostáváme *charakteristickou rovnici*

$$\sum_{k=0}^N a_k \lambda^k = 0, \quad (2.4)$$

která má obecně N kořenů λ_m , vedoucích na N různých řešení $e^{\lambda_m t}$. Obecné řešení této rovnice je jejich lineární kombinace

$$\sum_{m=0}^N C_m e^{\lambda_m t} = 0, \quad (2.5)$$

kde (komplexní) konstanty C_m zvolíme tak, aby vyhovovaly *počátečním podmínkám* rov. 2.1 (obvykle podmínkám na x a všechny vyšší derivace v čase $t = 0$).

Pokud některé kořeny splývají (K -násobný kořen), není K funkcí $e^{\lambda_k t}$ lineárně nezávislých a neměli bychom N nezávislých řešení. V takovém případě hledáme řešení ve tvaru

$$x(t) = P(t) e^{\lambda t}, \quad (2.6)$$

kde $P(t)$ je polynom, jehož stupeň je roven $K - 1$.

2.1.2 Nehomogenní rovnice

Pokud lineární diferenciální rovnice není homogenní, tj. pokud má tvar

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} = F(t), \quad (2.7)$$

pak vyřešíme nejprve v celé obecnosti rovnici homogenní, a poté uhadneme libovolným způsobem jedno řešení rov. 2.7 (tzv. partikulární řešení). Obecné řešení nehomogenní rovnice je pak součet tohoto partikulárního řešení a obecného řešení nehomogenní rovnice.

2.2 Pohybová rovnice – 2. Newtonův zákon

Budeme řešit pohybovou rovnici pro 1 HB o hmotnosti $m > 0$, nepodrobený vazbám, na který působí výsledná vnější síla F . Pohybová rovnice má tvar

$$m\mathbf{a} \equiv m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \equiv m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}. \quad (2.8)$$

V jednorozměrných případech, kterými se budeme zabývat, má pohybová rovnice tvar

$$m\ddot{x} = F. \quad (2.9)$$

Tuto rovnici budeme v dalším řešit pro různé konkrétní tvary síly $F(x, t)$. Řešení uvažujeme pro $t \geq 0$, přičemž pro $t = 0$ máme zadány (reálné) počáteční podmínky:

$$\text{počáteční poloha } x_{(t=0)} = x_0 \quad (2.10)$$

$$\text{počáteční rychlost } v_{(t=0)} = v_0. \quad (2.11)$$

2.3 Konkrétní úlohy

2.3.1 Nulová síla

Pokud na HB nepůsobí žádná výsledná síla (tedy pokud je výslednice všech vnějších sil v příslušném směru nulová), má pohybové rovnice tvar

$$m\ddot{x} = 0. \quad (2.12)$$

Tuto rovnici dvakrát integrujeme, čímž dostaneme řešení

$$\ddot{x} = 0 \quad (2.13)$$

$$\dot{x} = v_0 \quad (2.14)$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t \quad (2.15)$$

odpovídající rovnoměrnému přímočarému pohybu (samozřejmě podél zvolené osy x) s rychlostí v_0 a počáteční polohou $x_{(t=0)} = x_0$.

2.3.2 Konstantní síla

Konstantní síla F_0 působící na HB mu uděluje konstantní zrychlení $a = F/m$. Pohybová rovnice

$$m\ddot{x} = F_0 \quad (2.16)$$

má rovněž zřejmé řešení (s toutéž interpretací x_0 a v_0)

$$\ddot{x} = \frac{F_0}{m} \quad (2.17)$$

$$\dot{x} = v_0 + \frac{F_0}{m} t \quad (2.18)$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \frac{F_0}{m} t^2. \quad (2.19)$$

Znáмым příkladem je volný pád z výšky $z = h$. Počáteční rychlost je nulová ($v_0 = 0$), působící síla je $F_0 = -mg$ při obvyklé orientaci osy z vzhůru, takže řešení je

$$z(t) = h - \frac{1}{2} g t^2. \quad (2.20)$$

2.3.3 Harmonický oscilátor (netlumený)

Nejjednodušší závislostí je lineární funkce $F(x)$. Ta popisuje, jak uvidíme, harmonický oscilátor.

Ve fyzice nazýváme harmonickým oscilátorem hmotný bod mající jistou rovnovážnou polohu x_0 a podrobený síle, která ho při vychýlení vrací do této polohy, přičemž velikost síly je úměrná výchylce od rovnovážné polohy; koeficientem úměrnosti je pružnost $k > 0$. Zvolíme-li pro jednoduchost počátek právě v bodě x_0 , má síla tvar

$$F(x) = -kx, \quad (2.21)$$

a pohybová rovnice zní

$$m\ddot{x} = -kx. \quad (2.22)$$

Zapíšeme ji v obvyklém anulovaném tvaru

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (2.23)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (2.24)$$

Protože platí $m > 0$ i $k > 0$, můžeme zavést

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} > 0. \quad (2.25)$$

Obvyklým postupem hledáme řešení ve tvaru $e^{\lambda t}$, čímž dostaneme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \quad (2.26)$$

s řešením

$$\lambda = \pm i\omega_0 \quad (2.27)$$

Obecné řešení je ovšem reálná funkce; můžeme ji zapsat kterýmkoli z dále uvedených tvarů (vždy se dvěma konstantami volitelnými podle počátečních podmínek). Poloha (= okamžitá výchylka) je

$$x = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi_1) \quad (x_m, \varphi_1) \quad (2.28)$$

$$= x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \quad (x_m, \varphi_2) \quad (2.29)$$

$$= x_m \sin(\omega_0(t - t_1)) \quad (x_m, t_1) \quad (2.30)$$

$$= x_m \cos(\omega_0(t - t_2)) \quad (x_m, t_2) \quad (2.31)$$

$$= A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (A, B) \quad (2.32)$$

$$= \dots$$

$$= \Re C_{\pm} e^{\pm i\omega_0 t} \quad (\text{komplexní } C_{\pm} = C_{1\pm} + i C_{2\pm}) \quad (2.33)$$

V posledním případě se velmi často nepíše symbol reálné části $\Re$ a rozumí se jaksí automaticky, případně se připsuje „+ c.c.“, čímž se rozumí součet s komplexně sdruženým výrazem (slušelo by se doplnit $\frac{1}{2}$). Toto není problém při lineárních operacích; pozor je však potřeba dát tehdy, kdy potřebujeme např. druhou mocninu polohy či rychlosti pro výpočet energie.

Z časové závislosti polohy určíme snadno všechny ostatní fyzikální veličiny, např. podle rov. 2.29

$$\text{rychlost } v = -x_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_2) \quad (2.34)$$

$$\text{zrychlení } a = -x_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2) = -\omega_0^2 x \quad (2.35)$$

$$(2.36)$$

Užívají se následující termíny (např. pro rov. 2.29):

$$\text{fáze} \quad \omega_0 t + \varphi_2 \quad (2.37)$$

$$\text{počáteční fáze} \quad \varphi_2 \quad (2.38)$$

$$\text{úhlová frekvence} \quad \omega_0 \quad (2.39)$$

$$\text{frekvence} \quad f = \omega_0 / 2\pi \quad (2.40)$$

$$\text{perioda} \quad T = 1/f \quad (2.41)$$

Synonyma: kruhová = úhlová; kmitočet = frekvence; doba kmitu = perioda. Někdy se místo „počáteční fáze“ užívá označení „fázová konstanta“. Není to moc vhodné, protože nejde o konstantu ve fyzikálním smyslu.

Připomeňme, že síla $F = -kx$ má potenciál:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + U_0 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + U_0 \quad (2.42)$$

s libovolně zvolenou konstantou U_0 , protože platí $\mathbf{F} = -\mathbf{grad} U$ (zde tedy $F = -dU/dx$). Odtud plyne, že se při pohybu harmonického oscilátoru zachovává celková mechanická energie.

Harmonický oscilátor se ve fyzice vyskytuje velice často, mj. jako první přiblížení pro chování soustavy (reprezentované HB) v blízkém okolí stabilní rovnováhy. Je to zřejmé z matematického hlediska: potenciál v místě x_0 stabilní rovnováhy (zvolíme $x_0 = 0$) musí nabývat minima. Je-li však potenciál v okolí nuly analytický, lze ho rozvinout v Taylorovou mocninnou řadu :

$$U(x) = U_0 + U_1x + U_2x^2 + \mathcal{O}(x^3) \quad (2.43)$$

Z podmínky extrému plyne $U_1 = 0$ (pro minimum navíc $U_2 > 0$), takže při zanedbání členů x^3 a vyšších dostáváme právě potenciál harmonického oscilátoru (rov. 2.42). Nelze-li členy $\mathcal{O}(x^3)$ zanedbat (např. vyjde-li $U_2 = 0$), jde o *anharmonický oscilátor*.

2.3.4 Harmonický oscilátor s předpětím

Uvažujme sílu nikoli $F(x) = -kx$, ale poněkud obecněji, $F(x) = -kx + F_0$ (tj. např. na nehmotné pružině visí závaží a působí na něj i zemská tíže). Síla má tedy tvar

$$F(x) = -kx + F_0, \quad (2.44)$$

a pohybová rovnice (nehomogenní) zní

$$m\ddot{x} + kx = F_0. \quad (2.45)$$

Její řešení je opět triviální. Jde o typ rov. 2.7 a její partikulární řešení je zřejmě např.

$$kx = F_0, \text{ tedy } x = \frac{F_0}{k}. \quad (2.46)$$

Pružina se tedy protáhne dolů navíc o délku $d = \frac{mg}{k}$ a kolem nové polohy HB harmonicky kmitá s toutéž frekvencí, rychlostí atd. jako dříve, bez předpětí. Obecné řešení je (např.)

$$x - x_0 = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_2), \quad (2.47)$$

kde nová rovnovážná poloha je $x_0 = \frac{F_0}{k}$.

V řešení tedy nepřibyl žádný zajímavější jev. V dalším proto opět uvažujeme pro jednoduchost jen harmonický oscilátor bez předpětí.

2.3.5 Tlumený harmonický oscilátor

Chceme uvažovat realističtější situaci, kdy je pohyb harmonického oscilátoru nějak tlumen. Seznámili jsme se s třemi jednoduchými modely tlumení:

1. Suché tření (mezi pevnými tělesy; závislé na normálovém tlaku, málo závislé na rychlosti);
2. Odpor tekutého prostředí (kapalina či plyn) při malých rychlostech, kdy se uplatní hlavně vazkost prostředí; odpor prostředí je úměrný rychlosti pohybu HB;
3. Odpor tekutého prostředí při velkých rychlostech, kdy se uplatní hlavně „rozhrnování“ prostředí; odpor je úměrný energii rozhrnované tekutiny, tedy čtverci rychlosti pohybu HB.

Budeme se zabývat případem 2, který je velmi častý v praxi (např. kmitání tlumené vzduchem, ale i kmitání, kdy se po sobě pohybují pevná tělesa, jejichž styčná plocha je pro snížení odporu namazána). Navíc má praktickou výhodu, že vede na lineární rovnici, kterou umíme vyřešit do všech podrobností.

Síla tření F_{tr} směřuje proti rychlosti pohybu. Výsledná síla má proto tvar

$$F(x) = F_{\text{pruž}} + F_{\text{tr}} = -kx - hv, \quad (2.48)$$

a pohybová rovnice zní

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = 0. \quad (2.49)$$

Stejně jako dříve zavedeme $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ a dále součinitel tlumení vztahem $\delta = h/2m$; jeho převrácená hodnota se nazývá časová konstanta: $\tau = 1/\delta$. Pohybová rovnice dostane tvar

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.50)$$

Řešíme ji opět stejně: hledáme řešení ve tvaru $x = e^{\lambda t}$. Charakteristická rovnice zní

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (2.51)$$

Je to kvadratická rovnice s diskriminantem $D = 4(\delta^2 - \omega_0^2)$ a řešení zřejmě závisí na tom, která z veličin δ a ω_0 je větší. Podle toho můžeme rozlišit tři případy:

tlumené harmonické kmity: $\delta < \omega_0$;

aperiodický pohyb: $\delta > \omega_0$;

mezní aperiodický pohyb: $\delta = \omega_0$.

Tlumené harmonické kmity: $\delta < \omega_0$

Zavedeme-li $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, dostaneme ihned obecné řešení např.

$$x(t) = C_+ e^{(-\delta+i\omega)t} + C_- e^{(-\delta-i\omega)t} \quad (2.52)$$

$$= (A \cos \omega t + B \sin \omega t) e^{-\delta t} \quad (2.53)$$

$$= C e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2.54)$$

z něhož je zřejmý tvar pohybu. HB kmitá (teoreticky nekonečněkrát) kolem rovnovážné polohy, přičemž každý další kmit je oproti předchozímu zeslaben ve stálém poměru

$$1 : \beta = 1 : e^{-\delta T} = 1 : e^{-\frac{2\pi\delta}{\omega}}. \quad (2.55)$$

Je zřejmé, že nulové body funkce $x(t)$ jsou od sebe vzdáleny o $\frac{1}{2}T$, kde $T = \frac{2\pi}{\omega}$ je perioda netlumených kmitů. Výpočtem však ověříme, že i maxima a minima této funkce (zjistíme je obvyklým způsobem, tj. anulováním derivace) mají tutéž periodu jako u funkce netlumené, třebaže *neleží* uprostřed mezi nulovými body.

Aperiodický pohyb: $\delta > \omega_0$

Zavedeme-li $\Delta = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$, dostaneme ihned obecné řešení např.

$$x(t) = x_1 \exp^{-(\delta+\Delta)t} + x_2 \exp^{-(\delta-\Delta)t}, \quad (2.56)$$

Protože je zřejmé $\delta > \Delta$, jsou oba exponenty v rov. 2.54 pro $t > 0$ záporné a s rostoucím časem výchylka x klesá exponenciálně k nule.

Snadno ověříme, že počáteční výchylka x_0 je rovna $x_0 = x_1 + x_2$, počáteční rychlost v_0 je rovna $v_0 = -\delta x_0 + \Delta(x_2 - x_1)$.

Okamžitá výchylka má (v závislosti na hodnotách a znaménkách x_1, x_2) nejvýše jeden extrém na intervalu $(0, +\infty)$.

Jsou tedy tři možnosti: HB se z počáteční polohy rovnovážné poloze

- monotonně přibližuje;
- přibližuje, přeběhne ji a pokračuje do nejvzdálenějšího bodu dráhy, odkud se už monotonně vrací do rovnovážné polohy;
- vzdaluje až do nejvzdálenějšího bodu dráhy, odkud se už monotonně vrací do rovnovážné polohy.

Často se vyskytují dva speciální typy počátečních podmínek:

- $x_0 \neq 0, v_0 = 0$: HB odtáhneme mimo rovnovážnou polohu a volně vypustíme;
- $x_0 = 0, v_0 \neq 0$: HB z rovnovážné polohy vychýlíme úderem.

Mezní aperiodický pohyb: $\delta = \omega_0$

V tomto případě má charakteristická rovnice dvojnásobný kořen 0. Řešení má proto poněkud jiný tvar (viz rov. 2.6):

$$x(t) = C_1 e^{-\delta t} + C_2 t e^{-\delta t} = (C_1 + C_2 t) e^{-\delta t} \quad (2.57)$$

Charakter řešení i jeho vlastnosti jsou podobné předchozímu, aperiodickému pohybu; speciálně i zde je nejvýše jeden extrém a tři typy přibližování k rovnovážné poloze.

Z praktického hlediska je zvláště významné, že za stejných okolností (m, k) a při různém tlumení h (resp. δ) vede mezní tlumení k nejrychlejšímu přiblížení rovnovážné poloze.

Přesněji řečeno: Při zadané odchylce ε je při mezním tlumení minimální čas t_ε , pro který je

$$|x(t)| < \varepsilon \text{ pro všechny časy } t > t_\varepsilon \quad (2.58)$$

Společná terminologie

Ve všech třech případech se pro $t \rightarrow \infty$ poloha HB exponenciálně blíží rovnovážné poloze $x_0 = 0$.

Pro puntikáře: „blíží se exponenciálně“ neznamená doslova, že jde o exponenciálu (i součet dvou exponenciál s různými exponenty již není exponenciála), ale že průběh pohybu lze majorizovat exponenciální funkcí.

Popisujeme-li časový průběh popsaný funkcí

$$x = x_m e^{-\delta t} \cos[\omega(t - t_0) + \varphi_0], \quad (2.59)$$

pak veličinu δ nazýváme *součinitel tlumení*, součin tohoto součinitele s periodou nazýváme *logaritmický dekrement* Λ . Pro čistě exponenciální útlum

$$x = x_m e^{-\delta t} \quad (2.60)$$

zavádíme *časovou konstantu* (během které poklesne amplituda na $1/e$ původní hodnoty) τ . Platí tedy

$$\text{počáteční amplituda (pro } t = t_0): \quad x_m \quad (2.61)$$

$$\text{počáteční fáze (pro } t = t_0): \quad \varphi_0 \quad (2.62)$$

$$\text{úhlová frekvence:} \quad \omega \quad (2.63)$$

$$\text{frekvence:} \quad f = \omega/2\pi \quad (2.64)$$

$$\text{perioda:} \quad T = 1/f = 2\pi/\omega \quad (2.65)$$

$$\text{součinitel tlumení:} \quad \delta \quad (2.66)$$

$$\text{logaritmický dekrement:} \quad \Lambda = -\ln \beta = \delta T = 2\pi\delta/\omega \quad (2.67)$$

$$\text{časová konstanta:} \quad \tau = 1/\delta. \quad (2.68)$$

$$(\text{útlum}): \quad \beta = e^{-\delta T} \quad (2.69)$$

Velichina β (značení ani název není předepsán normou) se často prostě nazývá útlum a udává, kolikrát poklesne amplituda za jednu periodu.

2.3.6 Vynucené kmity

Předpokládejme, že na kmitající oscilátor působí vtištěná vnější síla F_{vt} . Budeme se zabývat konkrétní silou tvaru

$$F_{vt}(t) = F_0 \cos \Omega t, \quad (2.70)$$

a to z několika důvodů, zejména

- jde o případ velmi častý a významný v praxi;
- použitím linearit rovnice a Fourierovy transformace můžeme ze získaných výsledků odvodit řešení i pro velice širokou třídu obecných funkcí $F_{vt}(t)$.

Pohybová rovnice má tedy tvar

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t, \text{ resp.} \quad (2.71)$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \cos \Omega t, \quad (2.72)$$

kde jsme zavedli značku a_0 pro F_0/m . Řešení budeme hledat způsobem uvedeným v odst.2.1.2. Řešení příslušné homogenní rovnice, tedy rov. 2.50, známe – jde o jeden ze tří dříve rozebraných případů rov. 2.54, rov. 2.56, rov. 2.57, přičemž všechny alternativy ubývají s rostoucím časem exponenciálně k nule. Nyní budeme hledat jedno řešení (partikulární integrál) rov. 2.71.

Pomůže nám fyzikální představa. Pod vlivem periodické síly tvaru $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ bude zřejmě nakonec HB oscilovat s toutéž (vtištěnou) frekvencí Ω , jen s neznámou amplitudou x_0 a fází φ_0 :

$$x(t) = x_0 \cos(\Omega t + \varphi_0) \text{ pro velká } x, \text{ tj. pro } x \rightarrow \infty. \quad (2.73)$$

Tato funkce se obvykle nazývá řešením v *ustáleném stavu*; řešení vycházející z počátečních podmínek a zahrnující proto i řešení příslušné homogenní rovnice se nazývá řešením v *přechodovém stavu*. Dosadíme proto funkci z rov. 2.73 do rov. 2.72, provedeme všechny derivace a upravíme na tvar

$$F \sin \Omega t + G \cos \Omega t = 0, \quad (2.74)$$

z něhož plynou (díky lineární nezávislosti funkcí $\sin \Omega t$ a $\cos \Omega t$) rovnosti

$$F = 0, \quad (2.75)$$

$$G = 0. \quad (2.76)$$

Dosazování je zcela řemeslné, ovšem zabere dosti místa (a času). Zjednodušíme si proto zápis zkratkami

$$\sin \Omega t \equiv S \quad (2.77)$$

$$\cos \Omega t \equiv C \quad (2.78)$$

$$\sin \varphi_0 \equiv s \quad (2.79)$$

$$\cos \varphi_0 \equiv c, \quad (2.80)$$

takže do rov. 2.72

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 C \quad (2.81)$$

dosazujeme rov. 2.73 ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos(\Omega t + \varphi_0) = x_0 c C - x_0 s S \\ \dot{x} &= -\Omega x_0 \sin(\Omega t + \varphi_0) = -\Omega x_0 c S - \Omega x_0 s C \\ \ddot{x} &= -\Omega^2 x_0 \cos(\Omega t + \varphi_0) = -\Omega^2 x_0 c C + \Omega^2 x_0 s S \end{aligned}$$

s výsledkem (po vytknutí x_0):

$$-\Omega^2 c C + \Omega^2 s S - 2\delta\Omega c S - 2\delta\Omega s C + \omega_0^2 c C - \omega_0^2 s S = \frac{a_0}{x_0} C \quad (2.82)$$

To je již naše požadovaná rov. 2.74, takže podle následujících rov. 2.75 a rov. 2.76 dostáváme dvě rovnice pro dvě neznámé a_0 a φ_0 (prostřednictvím $s = \sin \varphi_0$ a $c = \cos \varphi_0$):

$$-(\Omega^2 - \omega_0^2)c - 2\delta\Omega s = \frac{a_0}{x_0} \quad (\text{podle } C) \quad (2.83)$$

$$(\Omega^2 - \omega_0^2)s - 2\delta\Omega c = 0 \quad (\text{podle } S) \quad (2.84)$$

Umocněním každé z těchto rovnic na druhou a následným sečtením dostaneme

$$(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2 = \left(\frac{a_0}{x_0}\right)^2, \quad (2.85)$$

takže po konečném dosazení $a_0 = F_0/m$ dostáváme řešení pro amplitudu výchylky

$$x_0 = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}, \quad (2.86)$$

zatímco z rov. 2.84 vydělením c dostaneme pro fázový posuv vztah

$$\tan \varphi_0 = s/c = \frac{2\delta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}. \quad (2.87)$$

Tím je partikulární řešení („ustálený stav“) nalezeno; přičtením řešení homogenní rovnice, tedy podle okolností rov. 2.54, rov. 2.56, nebo rov. 2.57 získáme obecné řešení („přechodové řešení“ v čase t krátce po počátku $t = 0$), přičemž dvě konstanty v řešení homogenní rovnice volíme tak, abychom splnili počáteční podmínky pro výchylku a rychlost HB.

2.3.7 Rezonance výchylky při malém tlumení

Při malém tlumení jde o případ tlumených harmonických kmitů (nikoli o aperiodický pohyb) a řešení je tedy dáno vzorcem

$$x(t) = C \cos(\omega t + \varphi_1) + x_o \cos(\Omega t + \varphi_0), \quad (2.88)$$

v němž zvolíme C , φ_1 tak, abychom splnili počáteční podmínky pro $x_{(t=0)}$ a $v_{(t=0)}$, zatímco amplituda x_0 a fázový posuv φ_0 v ustáleném stavu jsou určeny rov. 2.86 a rov. 2.87:

$$x_0 = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}, \quad (2.89)$$

$$\varphi_0 = \arctan \frac{2\delta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}. \quad (2.90)$$

Jmenovatel výrazu v rov. 2.90 není nebezpečný, protože i pro $\Omega \rightarrow \omega_0$, kdy se jmenovatel blíží nule, má výraz dobrý smysl a $\varphi_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$. V rov. 2.89 je jmenovatel odmocninou ze součtu dvou čtverců; dále $k > 0$ a $m > 0$. Výraz má tedy smysl vždy, kromě jediného případu, když platí $\Omega = \omega_0$ (rezonance výchylky) a současně $\delta = 0$ (nulové tlumení).

Obvykle předpokládáme i $\Omega > 0$. Cvičně uvažte i případ $\Omega = 0$ (tj. stálá, „stejnoseměrná“ síla), kdy výraz v rov. 2.86 diverguje. Rozeberte si podrobně, co a proč znamená divergence výrazu fyzikálně; příslušná úloha je vám známa už z dřívějšího – z kap. 2.3.2.

2.3.8 Energie harmonických kmitů

Výpočet energie

Činitel jakosti

Rezonance energie

2.3.9 Skládání kmitů

Princip superpozice (lineární rovnice).