

Minkowského svět

Opakování, interval, invariant

V soustavě S je poloha bodu X určena nečárkovanými souřadnicemi (x, t) . V jiné soustavě S' pohybující se rychlostí $V = Bc$ vůči S je poloha téhož bodu určena čárkovanými souřadnicemi (x', t') . Pokud byly soustavy navzájem synchronizovány, tj. $(0,0)=(0,0)'$, jsou obojí souřadnice spojeny Lorentzovou transformací

$$x' = \gamma (x - B x_0) \quad (1)$$

$$x_0' = \gamma (x_0 - B x) \quad (2)$$

Pokud soustavy synchronizovány nebyly, napravíme to třeba takto: zjistíme, jaké souřadnice (X', T') má počátek $(0,0)$, a dále namísto x' píšeme $x' - X'$ a namísto x_0' píšeme $x_0' - X_0'$.

Dosažením se přesvědčíme, že v obou soustavách má stejnou hodnotu tzv. **interval** I^2 :

$$I^2 = x^2 - x_0^2 = x'^2 - x_0'^2 \quad (3)$$

a říkáme, že interval I^2 je **invariant** vůči Lorentzově transformaci (1;2).

Herrmann Minkowski

Herrmann Minkowski (1908) použil komplexní jednotku i (pro kterou $i^2 = -1$) ke konstrukci komplexního prostoru popisujícího společně prostor i čas.

V tomto **Minkowského prostoročasu** jsou prostorové souřadnice $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ reálné, ale čas je zastoupen imaginární hodnotou

$$x_4 = i x_0 = i ct.$$

Tím se stane, že se zachovává výraz, který lze zapsat jako

$$I^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \sum_{k=1}^4 x_k^2 \quad (4)$$

Ten vypadá analogicky obyčejnému výrazu pro velikost vektoru ve trojrozměrném prostoru; liší se opravdu jen tím, že sčítáme čtyři členy místo tří. Trošku se změní i zápis Lorentzovy transformace. Ve všech čtyřech souřadnicích vypadá speciální Lorentzova transformace takto:

$$x_1' = \gamma x_1 + i B \gamma x_4 \quad (5)$$

$$x_2' = x_2 \quad (6)$$

$$x_3' = x_3 \quad (7)$$

$$x_4' = -i B \gamma x_1 + \gamma x_4 \quad (8)$$

Lorentzova transformace, popisující přechod do pohybující se soustavy, pak v tomto čtyřrozměrném komplexním prostoru představuje **otočení**, při němž se zachovává čtverec vzdálenosti mající tvar intervalu I^2 podle (3).

Náš plán

Další úvahy postupují tímto směrem: *polohovému vektoru* $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ z obvyklého 3D-prostoru odpovídá *čtyřvektor* zahrnující i čas, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Podaří-li se nám formulovat obvyklé pohybové zákony mechaniky tak, abychom v nich užili pouze

- čtyřvektory, o nichž víme, že se transformují Lorentzovými transformacemi, a
- čísla a invarianty, které se Lorentzovými transformacemi nemění,

pak rovnice platné v klidovém systému budou stejně platné i v každé pohybující se soustavě – dostaneme tedy **relativisticky invariantní rovnice**.

Vlastní čas

Pozor musíme dát zejména na čas – veličina t , natolik důležitá v mechanice a invariantní v galileovské mechanice, je nyní nanejvýš prostřednictvím veličiny $x_4 = ict$ pouze čtvrtou složkou čtyřvektoru. Věnujme se mu podrobněji.

Pohybující se hodiny (spjaté se soustavou S') jdou γ -krát pomaleji než tytéž hodiny stojící (v soustavě S): pro jejich údaj platí

$$\Delta t' = \Delta t / \gamma \quad (9)$$

To však naopak znamená, že – na rozdíl od doby Δt – veličina $\Delta t'$ bude vždy táž, ať už je rychlost V hodin jakákoliv; je to tedy invariant, který v případě pomalu se pohybujících nebo stojících hodin přechází na obvyklý čas. Obvykle se nazývá vlastní čas a značí se τ (tau). Je tedy $\tau = \Delta t / \gamma$. Je to ten invariant, který převezme roli času – invariantu známého z mechaniky.

Čtyřrychlost, čtyřzrychlení

Protože obyčejná rychlost je $v = \Delta x / \Delta t$, zavedeme čtyřrychlost analogicky ze čtyřpolohy pomocí vlastního času:

$$u = (\Delta x / \Delta \tau; \Delta y / \Delta \tau; \Delta z / \Delta \tau; \Delta(ict) / \Delta \tau) = (\gamma v_x; \gamma v_y; \gamma v_z; i\gamma c) .$$

Její velikost podle Pythagorovy věty je $-c^2$. Je tedy záporná, ale nedivte se – jsou tam imaginární čísla, tak to musí přece být něco jiného, než jsme zvyklí.

Čtyřzrychlení $a = \Delta u / \Delta \tau$ je čtyřvektor vždy kolmý na čtyřrychlost: $a \cdot u = 0$. (To se dá dokázat ze skutečnosti, že čtyřrychlost má stále stejnou velikost.) Důležitější než čtyřzrychlení je ale čtyřhybnost.

Čtyřhybnost

Hybnost, kterou jsme znali jako hmotnost $\cdot$ rychlost, bude tedy hmotnost $\cdot$ čtyřrychlost a stane se čtyřhybností p :

$$p = m_0 u = (\gamma m_0 v_x; \gamma m_0 v_y; \gamma m_0 v_z; i\gamma m_0 c)$$

Tento výraz můžeme interpretovat také trochu jinak: rozložíme ho nikoli na $p = m_0 \times \gamma v$, ale $p = \gamma m_0 \times v$. tím, že zavedeme relativistickou hmotnost m pomocí dosavadní („klidové“) hmotnosti m_0 vztahem

$$m = \gamma m_0 ; \quad p = m v$$

Pohybující se částice má tedy automaticky větší setrvačnou hmotnost m než táž částice stojící (m_0). Pro sebe samu se ovšem částice nemění: ona je vůči sobě v klidu, a má tedy pro sebe samu svou klidovou hmotnost.

Čtvrtá složka čtyřhybnosti, $i\gamma m_0 c$, vyjadřuje energii (vydělenou c) podle následující analogie: zákon zachování hybnosti souvisí s izotropií prostoročasu při posunutí prostorových souřadnic, zákon zachování energie zase s izotropií prostoročasu při posunutí časového počátku. Z této analogie vyplývá, že výraz $E = \gamma m_0 c^2 = m c^2$ má význam energie částice mající klidovou hmotnost m_0 (pohybovou hmotnost má tedy $\gamma m_0 = m$) a rychlost v danou faktorem γ .

Snad stojí za ukázkou, že výraz $E = m c^2$ je opravdu ve svém klasickém přiblížení to, co známe jako energie pohybující se částice, tedy $\frac{1}{2} m v^2$. Potřebujeme k tomu jen začátek binomické věty, že totiž

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{(1.2)} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{(1.2.3)} x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(1.2.3.4)} x^4 + \dots$$

Do výrazu dosadíme $x = (-\beta^2)$ a $n = -\frac{1}{2}$, přičemž vezmeme jen první dva členy z rozvoje. Dostaneme

$$E = m c^2 = m_0 c^2 (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} = m_0 c^2 (1 + \frac{1}{2}\beta^2 \dots) = m_0 c^2 + \frac{1}{2}m_0 v^2 \dots$$

První výraz je konstanta – klidová energie částice, která je sice obrovská, ale nemění se po celou dobu života částice; nemusíme ji tedy uvažovat v mechanice. Druhý výraz je známý z klasické mechaniky jako výraz pro kinetickou energii.

Čtyřsila

Zbývá už jen zobecnit sílu na čtyřsílu – a dostaneme relativistické pohybové rovnice (tedy: relativistickou dynamiku), vyjadřující, že

časová změna čtyřhybnosti se rovná čtyřsíle:

$$\Delta p / \Delta \tau = F$$

(Časová změna se míní podle vlastního času – proč?) Tím je popsána dynamika ve speciální teorii relativity.