

Kapitola 7

Základy teorie relativity

7.1 Motivace

7.1.1 Co je a co není teorie relativity

Speciální teorie relativity (STR) mění velmi podstatně naše pojmání prostoru a času. Zejména v oblasti velmi vysokých rychlostí (srovnatelných s rychlostí světla) se totiž při měření ukazuje, že prostor a čas nejsou nezávislé pojmy, ale souvisejí spolu natolik úzce, že je výstižnější pojímat je spolu jako nový pojem *prostorčas* a studovat jeho vlastnosti. STR tuto souvislost vystihuje a popisuje. Přejít od jedné inerciální vztažné soustavy ke druhé podle STR již není dán Galileiho transformací, ale transformací Lorentzovou; ta je symetričtější v souřadnicích (časové a prostorové) než Galileiho.

Ostatní představy klasické mechaniky však zůstávají v STR v platnosti v tom smyslu, že platí beze změny, používáme-li během práce pouze jedinou vztažnou soustavu. 2. Newtonův zákon (zákon síly) např. platí ve znění „Časová změna hybnosti hmotného bodu je rovna výsledné síle na něj působící“.

STR je plně kompatibilní (slučitelná) s teorií elektromagnetického pole. Transformační vlastnosti tohoto pole (Lorentzova transformace) vyhovují představě sjednoceného prostor času, nikoli však představě prostoru samostatného, na čase nezávislého (Galileiho transformace). Klasická nerelativistická mechanika zahrnující Galileiho transformaci tedy s teorií elektromagnetického pole kompatibilní *není*.

Tři pohybové zákony Newtonovy, tedy základ klasické mechaniky, mohou však být – při pečlivé formulaci – převzaty do STR beze změny.

7.1.2 Výchozí situace: konec 19. století

Na podkladě zejména Faradayových pokusů a jejich matematického zpracování Maxwellem byla vytvořena teorie elektromagnetismu (teorie elektromagnetického pole), která sjednotila do té doby samostatné obory – elektřinu, magnetismus a optiku.

7.1.3 Princip stálé rychlosti světelné

7.2 Klasické pojetí času a prostoru

7.2.1 Vztažná soustava; hodiny, měřicí tyče

Předpokládejme, že máme k dispozici libovolný počet standardů: pro čas hodiny (např. periodické děje se stejnou periodou T), pro délku tyče (např. o délce vhodného násobku vlnové délky světla emitovaného při vybraném přechodu v atomu cesia). Těmi můžeme měřit přírůstky časového či prostorového údaje. Vytvoříme z nich (alespoň myšleně) pevnou konstrukci, tj. hodiny a tyče budou navzájem v klidu, „mřížové body“ tyčí spolu s nejbližšími hodinami nám realizují **vztažnou soustavu** S . Zatím libovolně zvolíme jednak její počátek souřadnic, jednak její počátek času (společný pro všechny hodiny v S). Jak uvidíme, tato libovůle zpravidla nevadí. Pokud však sledujeme dvě soustavy, zjednoduší se nám popis, pokud provedeme jejich **synchronizaci**: když hodiny v počátku soustavy S ukazují čas $t = 0$, pak v tomtéž místě zvolíme počátek $\mathbf{r}' = \mathbf{0}$ soustavy S' . (Prakticky:

byla-li tomuto bodu v $\mathcal{S}'$ dříve přiřazena hodnota $\mathbf{r}'_0$, pak tuto hodnotu odečteme od každého prostorového údaje v $\mathcal{S}'$.) Dále, pokud hodiny z $\mathcal{S}'$ v tomto místě při setkání ukazují čas $t' = 0$, je tím vše hotovo; pokud ukazují nenulový čas t'_0 , pak tuto hodnotu budeme odečítat od údaje všech hodin tvořících soustavu $\mathcal{S}'$. Soustavy $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}'$ tím byly synchronizovány – splynuly v nich počátky $(0; 0)$ a $(0; 0)'$, označíme-li čárkou za závorkou údaj měřený v $\mathcal{S}'$.

7.2.2 Událost

U důležité události zaznamenáváme *místo a čas*, kdy k ní došlo: v každém dotazníku např. zapisujeme den a místo svého narození. V následujících partiích bude termín *událost* zúžen právě jen na určení prostorového a časového údaje, tj. dvojice $(\mathbf{r}; t)$, kde a kdy dotyčný jev (výbuch supernovy, rozsvícení žárovíčky, setkání dvou pohybujících se bodů) nastal.

Omezíme se na jevy, které lze dostatečně přesně lokalizovat prostorově i časově. Počátek vztažné soustavy $(0, 0)$ je v tomto smyslu také „událost“: odsud začínáme měřit prostor i čas.

K plné informaci je ovšem potřeba zadat vztažnou soustavu, v níž polohu a okamžik určujeme: pasažér ve vlaku z Moskvy bude určovat události polohou vůči svému místu v rychlíku a časem vůči ČR o 2 hodiny posunutým.

Synchronizace počátků systémů $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}'$ znamená, že údaje $(0; 0)$ a $(0; 0)'$ popisují tutéž událost.

7.2.3 Současnost a soumítnost

Dvě události $(\mathbf{r}_A; t_A)$ a $(\mathbf{r}_B; t_B)$ měřené v některé vztažné soustavě nazveme **současné**, jestliže $t_A = t_B$, resp. **soumítné**, jestliže $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B$.

Uvědomme si, že soumítnost je i v klasické mechanice relativní, tj. závisí na volbě vztažné soustavy. Jestliže si pasažér v jídelním voze u stolku objedná kávu, dostane ji, vypije a poté zaplatí, pak objednání a zaplacení nejsou současné (ani z hlediska vlaku, ani Země). Jsou soumítné z hlediska vlaku (u téhož stolku), nikoli však z hlediska Země (vlak zatím projel několika městy). Soumítné v *obou* vztažných soustavách by byly buď tehdy, kdyby se soustavy vůči sobě nepohybovaly (což nás momentálně tolik nezajímá) nebo kdyby byly současné – tj. vlak by se nestačil mezi oběma událostmi vůči Zemi posunout. (V teorii relativity bude platit o soumítnosti přesně totéž: dvě události v jedné soustavě soumítné, ale nesoučasné, nejsou soumítné vůči jiné soustavě, pohybující se vůči první.)

Naproti tomu současnost je v klasické mechanice absolutní: jestliže nastane požár současně na začátku i konci vlaku, pak nastal současně jak vůči vlaku, tak i vůči Zemi. (Jak uvidíme, v teorii relativity tomu tak nebude. Současnost, stejně jako soumítnost, bude v teorii relativity relativní.)

7.2.4 Galileova transformace

Uvažujme inerciální kartézskou soustavu $\mathcal{S}$ s prostorovými souřadnicemi $\mathbf{r}$ a s časovou souřadnicí t a jinou inerciální kartézskou soustavu $\mathcal{S}'$ s prostorovými souřadnicemi $\mathbf{r}'$ a s časovou souřadnicí t' . Je-li zadána událost U v $\mathcal{S}$ jako $(\mathbf{r}, t)$, jakými $(\mathbf{r}', t')$ bude zadána v $\mathcal{S}'$? Převod nám určuje **Galileova transformace**.

Jsou-li obě soustavy identické, pak přirozeně platí (po složkách)

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}')_i &= (\mathbf{r})_i \\ t' &= t. \end{aligned}$$

Jestliže obě soustavy mají sobě odpovídající osy rovnoběžné, nepohybují-li se vůči sobě a jestliže jisté události U_0 se souřadnicemi $(\mathbf{r}_0, t_0)$ v $\mathcal{S}$ odpovídají souřadnice $(\mathbf{r}'_0, t'_0)$ v $\mathcal{S}'$, pak má transformace $(\mathbf{r}, t)$ na $(\mathbf{r}', t')$ tvar

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0)_i &= (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)_i \\ t' - t'_0 &= (t - t_0). \end{aligned}$$

Pokud se soustava $\mathcal{S}'$ vůči $\mathcal{S}$ posouvá rychlostí $\mathbf{V}$, pak má tuto rychlost vůči $\mathcal{S}$ každý bod, který v $\mathcal{S}'$ stojí. Platí tedy

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0)_i &= (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)_i - \mathbf{V}(t - t_0) \\ t' - t'_0 &= (t - t_0). \end{aligned}$$

Ověřte si, že si obojí souřadnice události U_0 odpovídají. Dále ověřte, že libovolný bod stojící v $\mathcal{S}'$, tj. mající $\mathbf{r}' = \text{konst}$ pro libovolné t' , má v $\mathcal{S}$ souřadnici $\mathbf{r}$ závislou na t lineárním vztahem, z něhož plyne rychlost pohybu $\mathbf{V}$.

Mají-li soustavy $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ navzájem otočené osy, bude (obecně) velikost každé ze složek ve směrech x' , y' , z' záviset na všech složkách x , y , z , a to lineárně, pomocí směrových kosinů K_{ik} mezi osou x'_i a x_k . Galileova transformace získá tvar

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0)_i &= K_{ik}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)_k - \mathbf{V}_i(t - t_0) \\ t' - t'_0 &= (t - t_0), \end{aligned}$$

Matice směrových kosinů K_{ik} je unitární, tj. $K_{ik}K_{im} = \delta_{km}$. Všimněme si, že lineární kombinace pomocí unitární matice má geometrickou interpretaci otočení.

Inverzní transformaci k ní můžeme samozřejmě najít (triviálním) vyřešením soustavy těchto dvou lineárních rovnic vůči neznámým x a t , tedy

$$\begin{aligned} x &= x' + Vt' \\ t &= t' \end{aligned}$$

Můžeme ji však najít i „fyzikálněji“, a toto si hluboce rozvažte: z principu relativity plyne, že transformace musí mít stejný tvar (tj. být opět Galileovou transformací), jen zaměníme t za t' , dále x za x' a vzájemnou rychlost V za $-V$.

7.2.5 Měření dob a délek

Pozorujme letící meteor, který někdy někde začal svítit (událost U_A) a poté jinde zhasl (U_Z). Zajímá nás jednak *vzdálenost*, tedy dráha $|\mathbf{r}_Z - \mathbf{r}_A|$, jakou meteorit urazil, jednak *doba* $t_Z - t_A$, jak dlouho svítil. Protože však hodnoty prostorových i časových údajů závisejí na volbě vztažné soustavy, zajímá nás také, do jaké míry na této volbě závisejí vzdálenost a doba zkoumaného děje, tj. prostorová a časová vzdálenost mezi dvěma událostmi. S meteoritem můžeme spojit inerciální soustavu $\mathcal{S}'$, inerciální soustavu spojenou se Zemí označíme $\mathcal{S}$. Pro zjednodušení zápisů předpokládejme přímočarý let po ose x .

Letí-li meteorit po dobu $\Delta T = t_Z - t_A$ vůči Zemi, pak ve své vlastní inerciální soustavě (v níž stojí v klidu) letí dobu $\Delta T' = t'_Z - t'_A$: z transformačních rovnic plyne $\Delta T = \Delta T'$. V klasické mechanice tedy **doba děje** nezávisí na volbě vztažné soustavy.

Snadno však nahlédneme, že na volbě vztažné soustavy závisí podstatně **prostorová vzdálenost** mezi dvěma událostmi (délka). Meteorit v soustavě $\mathcal{S}'$ spojené s ním samým ovšem stojí v klidu a dráha, po které svítí, je tedy nulová. V soustavě $\mathcal{S}$ spojené se Zemí urazí meteorit nennulovou dráhu Δx , v případě rovnoměrného pohybu $\Delta x = v\Delta T$.

Z toho také plyne samozřejmě „poučení“: chceme-li změřit délku předmětu, pak se tento předmět buď nesmí pohybovat (a jeho kraje pak můžeme měřit kdykoli), anebo – pokud se pohybuje – musíme změřit oba jeho kraje současně, tedy v tentýž okamžik. (V teorii relativity se ukáže, že současnost měření ve dvou vzdálených bodech je relativní!)

Délka předmětu měřená ve dvou vztažných soustavách navzájem pootočených vyjde stejně. To je matematicky vyjádřeno unitárností matice směrových kosinů K . (Jednotlivé čtverce vzdáleností pod odmocninou budou obecně různé, ale jejich součet bude vždy stejný.)

7.2.6 Skládání rychlostí

Při rovnoměrném přímočarém pohybu není rozdíl mezi průměrnou a okamžitou rychlostí: v obou případech je rychlost dána vztahem $v = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$.

Snadno zjistíme, že mezi rychlostí $\mathbf{v}$ naměřenou v $\mathcal{S}$ a rychlostí $\mathbf{v}'$ naměřenou v $\mathcal{S}'$ pohybující se rychlostí $\mathbf{V}$ vůči $\mathcal{S}$ platí jednoduchý vztah. Rychlosti se sčítají jako vektory: $\mathbf{v}' + \mathbf{V} = \mathbf{v}$, takže platí

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V} \quad \text{Galileiovo skládání rychlostí.}$$

Odtud ihned plyne, že neexistuje žádná konečná rychlost, která by byla absolutní v tom smyslu, že by měla stejnou hodnotu bez ohledu na volbu vztažné soustavy. Jedině rychlost nekonečná v jedné vztažné soustavě je nekonečná v libovolné vztažné soustavě. Tomto poněkud podezřelému tvrzení můžeme však dát přijatelnější tvar. Nekonečnou rychlostí bychom se mohli dostat od události $U_A = (\mathbf{r}_A; t_A)$ k události $U_Z = (\mathbf{r}_Z; t_Z)$ tehdy, kdybychom nennulovou vzdálenost $|\mathbf{r}_Z - \mathbf{r}_A|$ překonali během nulové doby, tedy pokud by platilo $t_Z = t_A$ a obě události byly současné. Potřeba *nekonečné* rychlosti ke spojení události U_A a U_Z je tedy totéž co *současnost* těchto událostí. Absolutnost nekonečné rychlosti v galileovské mechanice tedy znamená absolutnost současnosti. To je srozumitelný – a velmi důležitý – důsledek Galileiovy transformace.

Tímto končíme rekapitulaci klasické kinematiky.

7.3 Princip konstantní rychlosti světla

Z Maxwellovy teorie plyne, že světlo (jakožto forma elektromagnetického záření) by se mělo v absolutním prostoru a čase (kde platí Maxwellovy rovnice) šířit rychlostí

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 299\,792\,458 \text{ m/s}.$$

V inerciálních soustavách pohybujících se vůči absolutnímu prostoru by tedy mělo mít světlo rychlost jinou, podle teorému o vektorovém skládání rychlostí. Ale přesná měření (např. Michelsonův-Morleyův pokus) naměřila c stejné v různých inerciálních soustavách; např. Země obíhá kolem Slunce s postupnou rychlostí 30 km/s, takže by v různých ročních obdobích mělo mít světlo mimozemských zdrojů mít rychlosti odlišné, podle ročního období nazvájem až o 60 km/s. Nic takového však nebylo pozorováno. (Přesnost měření přitom dostatečně převyšovala přesnost potřebnou pro zjištění odchylek.)

Pokusy ověřily, že rychlost světla ve vakuu c je ve všech inerciálních soustavách stejná. Tato rychlost nezávisí na druhu zdroje ani na rychlosti jeho pohybu.

Toto zjištění a Galileiova transformace jsou spolu ve sporu. Proto musíme najít jinou transformaci než Galileiovu, a to tak, aby při převodu souřadnic vycházelo c ve všech soustavách stejné. Taková transformace existuje a nazývá se **Lorentzova**.

Protože chceme ponechat platnost Newtonových zákonů v klasické oblasti, omezíme se na *lineární* transformace mezi prostorovými a časovými souřadnicemi. Pak totiž z nulového zrychlení v jedné inerciální soustavě (tj. fyzikálně: z nulové výsledné síly) plyne nulové zrychlení i v každé jiné inerciální soustavě.

7.4 Lorentzova transformace

7.4.1 Speciální Lorentzova transformace

Uvažujme jistou událost (např. hmotný bod v jistém místě a čase), popsanou ve dvou inerciálních soustavách $\mathcal{S}$ resp. $\mathcal{S}'$. Zatím se omezíme na pohyb v jediném směru; v tomto směru budeme orientovat osy x, x' obou soustav. Rychlost soustavy $\mathcal{S}'$ vůči $\mathcal{S}$ budeme značit V . Prostorčasové souřadnice události označíme (x, t) v $\mathcal{S}$, resp. (x', t') v $\mathcal{S}'$.

Speciální Lorentzova transformace – nejobecnější lineární transformace, která vyhovuje těmto požadavkům a zachovává jistou konstantní rychlost c – má tvar

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-(V^2/c^2)}} (x - Vt) \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1-(V^2/c^2)}} \left(-\frac{V}{c^2}x + t\right). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Všimněme si, že pro $c \rightarrow \infty$ je $V/c \rightarrow 0$ a transformace přechází na Galileiho transformaci.

Symetrie těchto rovnic vynikne ještě více, jestliže místo času t zavedeme veličinu $x_0 = ct$ mající rozměr délky (stejně jako x). Při označení $\beta = V/c$ a $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ dostaneme velmi symetrický zápis

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta x_0) \\ x'_0 &= \gamma(x_0 - \beta x). \end{aligned} \quad (7.2)$$

7.4.2 Odvození Lorentzovy transformace

Celý tento odstavec (petit) při prvním čtení přeskočte a zatím věřte, že rov. 7.1 a rov. 7.2 jsou

- správné
- jediné možné.

Předpokládejme pro jednoduchost, že obě soustavy jsou synchronizovány ve svém prostorovém a časovém počátku, tj. že $(0, 0) = (0, 0)'$. Naším cílem je odvození **Lorentzových** transformačních rovnic mezi (x, t) a $(x', t)'$, při nichž se zachovává jistá rychlost – rychlost světla (c). Jak víme, rovnice musejí být lineární a za „obvyklých okolností“ (rychlosti malé vůči c) se musejí redukovat na speciální Galileiovu transformaci.

Galileova transformace měla tvar

$$\begin{aligned} x' &= x - Vt &= \alpha_1 x + \alpha_2 t \\ t' &= t &= \alpha_3 x + \alpha_4 t \end{aligned}$$

se čtyřmi koeficienty $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -V$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 1$.

V nejobecnější lineární transformaci budou spolu spojeny x' a t' s x a t opět čtyřmi koeficienty; ty musí být zvoleny tak, aby splňovaly dále uvedené požadavky, které od nové transformace očekáváme.

1) **Soustava S' má vůči soustavě S rychlost V .**

Pak tedy pro libovolné časy t musí počátek $(0, t)'$ soustavy S' mít souřadnice (Vt, t) v S . Nejobecnější transformace tohoto typu je

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - Vt) \\ t' &= \gamma(\phi x + \psi t); \end{aligned}$$

ještě zbývají neurčené tři koeficienty γ , ϕ , ψ .

Ověřte si, že pro počátek soustavy S' (tj. $x' = 0$ a libovolné t') platí v soustavě S vztah $x = Vt$.

2) **Soustava S má vůči soustavě S' rychlost $-V$.**

Pak zase pro libovolné časy t , t' musí počátek $(0, t)$ odpovídat bod $(-Vt', t')$. Dosazením $x = 0$ a vydělením obou rovnic dostáváme

$$x'/t' = v' = -V/\psi,$$

odkud zřejmě plyne $\psi = 1$. Transformace dostává tvar

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - Vt) \\ t' &= \gamma(\phi x + t) \end{aligned}$$

se zatím neurčenými dvěma koeficienty γ , ϕ .

Ověřte si, že pro počátek soustavy S (tj. $x = 0$ a libovolné t) platí v soustavě S' vztah $x' = -Vt'$.

3) **Má-li bod v soustavě S rychlost c , pak má v S' rovněž rychlost c .**

Vydělíme spolu obě rovnice, levou stranu rozšíříme zlomkem $1/t$ a dosadíme $x'/t' = v' = c$ resp. $x/t = v = c$. Dostaneme

$$c = \frac{c - V}{\phi c + 1},$$

odkud jednoduše plyne $\phi = -V/c^2$. V transformaci

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - Vt) \\ t' &= \gamma(-\frac{V}{c^2}x + t) \end{aligned}$$

zbývá již jen určit γ .

4) **Inverzní transformace k Lorentzově transformaci je rovněž Lorentzova.**

Řešením předchozí soustavy rovnic dostáváme

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\gamma(1-(V^2/c^2))} (x' + Vt') \\ t &= \frac{1}{\gamma(1-(V^2/c^2))} (+\frac{V}{c^2}x' + t'). \end{aligned}$$

Je zřejmé, že tato soustava rovnic je opět Lorentzovou transformací odpovídající rychlosti $-V$ za předpokladu, že platí

$$\gamma = \frac{1}{\gamma(1-(V^2/c^2))}.$$

To je splněno, pokud je $\gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1-(V^2/c^2)}}$. Protože pro $V = 0$ musí přejít transformace v identitu, zvolíme řešení s kladným znaménkem, tj.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(V^2/c^2)}}$$

a dostáváme konečně **speciální Lorentzovu transformaci**

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-(V^2/c^2)}} (x - Vt) \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1-(V^2/c^2)}} (-\frac{V}{c^2}x + t). \end{aligned}$$

Symetrie těchto rovnic vynikne ještě více, jestliže místo času t zavedeme veličinu $x_0 = ct$ mající rozměr délky. Při označení $\beta = V/c$ a $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ dostaneme

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta x_0) \\ x'_0 &= \gamma(-\beta x + x_0). \end{aligned}$$

Ověřte, že speciální Lorentzovy transformace podél téže osy tvoří grupu.

7.4.3 Obecná Lorentzova transformace

Zobecnění Lorentzovy transformace pro 3D je snadné, zůstaneme-li při tom, že se systémy $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}'$ navzájem pohybují podél společných os x, x' . Pak transformace nemění nic ve směru os y a z , takže rovnice mají tvar

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-(V^2/c^2)}} (x - Vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1-(V^2/c^2)}} \left(-\frac{V}{c^2}x + t\right). \end{aligned}$$

resp. se značením $x_0 = ct, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$

$$\begin{aligned} x'_0 &= \gamma(x_0 - \beta x_1) \\ x'_1 &= \gamma(-\beta x_0 + x_1) \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3. \end{aligned}$$

Výslovně zdůrazněme, že při pohybu podél jedné z os se ostatní dvě „transformují“ identitou, tedy bez jakékoliv změny.

Zatímco speciální Lorentzovy transformace tvoří grupu, skládání obecných Lorentzových transformací je složitější (krychle se převádí na obecný, nepravoúhlý rovnoběžnostěn!) a nevede ke grupě, pokud směry obou pohybů nejsou rovnoběžné.

7.5 Vlastnosti a důsledky speciální Lorentzovy transformace

7.5.1 Transformace rychlostí

Značme

$$\begin{aligned} v' &= x'/t' = \beta'c \\ v &= x/t = \beta c \\ V &= \beta c. \end{aligned}$$

Vydělením rovnic rov. 7.1 pro x', t' dostaneme

$$\begin{aligned} v' &= \frac{v-V}{1-\frac{vV}{c^2}} \quad \text{a inverzní} \\ v &= \frac{v'+V}{1+\frac{v'V}{c^2}} \end{aligned} \tag{7.3}$$

resp.

$$\begin{aligned} \beta' &= \frac{\beta-B}{1-\beta B} \quad \text{a inverzní} \\ \beta &= \frac{\beta'+B}{1+\beta' B}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

To jsou (obecně) lineární lomené funkce vůči proměnným v, β . Rov. 7.3 má vždy právě jeden pevný bod $v = c$ takový, že $v' = v$.

Pokud by bylo $c = \infty$, redukovala by se rov. 7.3 na lineární rovnici a rov. 7.1 by přešla na Galileovu transformaci, kdy se rychlosti skládají prostým (vektorovým) součtem:

$$v' = v - V \quad \text{resp.} \quad v = v' + V;$$

zápis typu rov. 7.4 by neměl smysl.

Protože je ovšem hodnota rychlosti c konečná (rychlost světla), nastane při vzájemné rychlosti $V < c$ (resp. $B < 1$) vztažných soustav pro pohyb bodu libovolnou rychlostí v právě jeden z těchto případů:

- $|v| < c \quad \Rightarrow \quad |v'| < c \quad \text{podsvětelné rychlosti}$
- $|v| = c \quad \Rightarrow \quad |v'| = c \quad \text{světelná rychlost}$
- $|v| > c \quad \Rightarrow \quad |v'| > c \quad \text{nadsvětelné rychlosti.}$

Rychlosti v se tedy rozpadají do tří tříd; příslušnost ke třídě se Lorentzovou transformací nemění. (Bod pomalejší než světlo v jednom vztažném systému $\mathcal{S}$ zůstane pomalejší než světlo i v libovolném jiném vztažném systému $\mathcal{S}'$ apod.) Případ $|v| > c$ zahrnuje i $v = \infty$ (současnost).

7.5.2 Interval jako invariant Lorentzovy transformace

Definujme $\Lambda \equiv x^2 - c^2 t^2$. V 7.4.2) požadujeme, aby z $\Lambda = 0$ plynulo i $\Lambda' = 0$, tedy aby rovnost $\Lambda = 0$ byla invariantní vůči Lorentzově transformaci. Ověřme nakonec, že i sám výraz Λ je invariantem Lorentzovy transformace. (V Galileově transformaci byly invarianty dokonce jak $c^2 t^2$, tak i x^2 samostatně). Platí

$$\Lambda' = x'^2 - c^2 t'^2 = (x^2 - 2\beta xct + \beta^2 c^2 t^2) - \gamma^2 (c^2 t^2 - 2\beta ctx + \beta^2 x^2) = \Lambda,$$

což jsme chtěli dokázat.

Interval, tvořený počátkem a světobodem, pro nějž je $\Lambda < 0$, nazýváme časového charakteru, pro $\Lambda > 0$ prostorového charakteru. Světobody, pro nějž je $\Lambda = 0$, tvoří světelný kužel s vrcholem v počátku.

Důležitý důsledek:

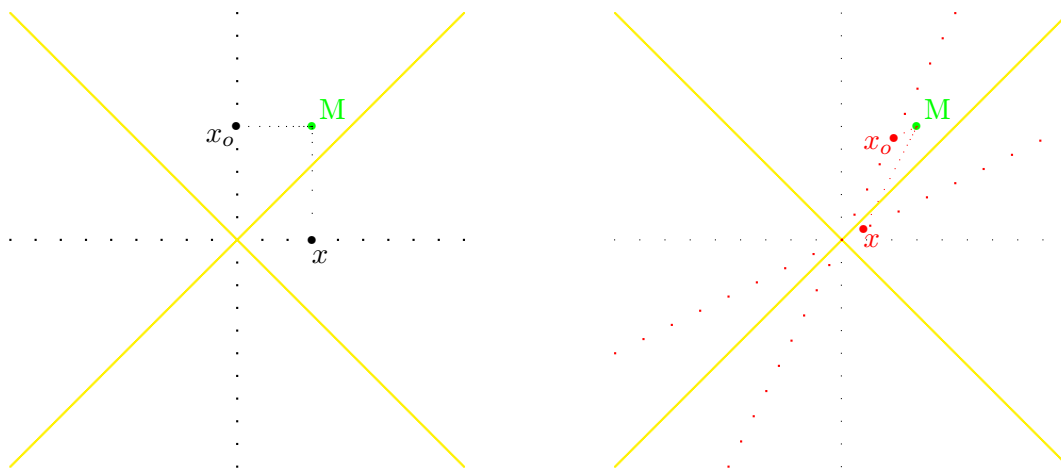
Na rozdíl od Galileovy transformace *není* nyní invariantem ani samotná délka Δl (oba konce tyče měřeny v tentýž čas, $\Delta t = 0$), ani doba, tj. časový interval Δt (začátek i konec děje měřen v totéž místě, $\Delta l = 0$). Viz 7.6.1 a 7.6.2.

7.5.3 Relativita současnosti

Na rozdíl od newtonovské mechaniky je v teorii relativity současnost dvou nesoumírných událostí *relativní*, tj. závislá na volbě vztažné soustavy. Nebereme-li to v úvahu, dostaneme se snadno do sporu, který je podstatou většiny „paradoxů“ teorie relativity.

7.5.4 Grafické znázornění

Vynášíme do grafu na vodorovnou osu polohu (podél osy x) a na svislou osu čas t vynásobený rychlostí světla, tedy veličinu $x_0 = ct$.



7.6 Kontrakce délek, dilatace času

7.6.1 Kontrakce délek

Problém: Tyč má vlastní délku $l_0 = l'$, tj. délku v soustavě S' , v němž tyč stojí. Jakou má tyč délku l v soustavě S , vůči němuž se pohybuje rychlostí V ?

Řešení: Měříme-li délku (ať už pohybující se nebo stojící) tyče, určíme časoprostorové souřadnice obou jejích konců, a to v témže čase z hlediska soustavy, v němž měříme. Nechť tyč, která stojí v soustavě S' (tj. její konce mají souřadnice $x'_1 = 0; x'_2 = l'$ pro všechna t'), letí rychlostí V vůči

$\mathcal{S}$ tak, že jeden její konec (x_1) prolétává počátkem souřadnic soustavy $\mathcal{S}$ právě v okamžiku $t = 0$. Lorentzova transformace dává vztah mezi souřadnicemi obou konců tyče v obou soustavách:

$$\begin{aligned} 0 &= x'_1 = \gamma (x_1 - \beta ct_1) \\ 0 &= t'_1 = \gamma (t_1 - \beta \frac{x_1}{c}) \\ l' &= x'_2 = \gamma (x_2 - \beta ct_2) \\ 0 &= t'_2 = \gamma (t_2 - \beta \frac{x_2}{c}). \end{aligned}$$

Měření provedená v soustavě $\mathcal{S}$ v časech $t_1 = t_2 = 0$ určí tedy $x_1 = 0$, $x_2 = l'/\gamma$. Pozorovatel tedy zjistí, že letící tyč je γ -krát kratší.

Pro pozorovatele na tyči ovšem akty měření obou konců tyče nebudou současné; přední konec bude měřen o $|t'_2|$ dříve.

7.6.2 Dilatace času

Problém: Na hodinách v soustavě $\mathcal{S}'$ uplyne doba t' . Jaká doba uplyne zatím ve „stojící“ soustavě $\mathcal{S}$?

Řešení: Nechť opět hodiny proletěly společným počátkem obou soustav v čase $t = t' = 0$. Až v $\mathcal{S}'$ uplyne doba T' , bude

$$\begin{aligned} 0 &= x' = \gamma(x - \beta cT) \\ T' &= t' = \gamma(T - \beta x/c), \end{aligned}$$

odkud $x = \beta cT$ (hodiny letí rychlostí βc) a $T' = \gamma T(1 - \beta^2)$, čili $T = \gamma T'$. V soustavě $\mathcal{S}$ uplyne doba γ -krát delší.

Mezony μ s poločasem rozpadu $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s vznikající ve vrchních vrstvách atmosféry sekundárně z kosmického záření proletí na povrch země vzdálenost l cca 30 km. Z „pozemského hlediska“ letí tedy nejméně dobu $\tau = l/c \doteq 10^{-4} \doteq 50 * \tau_0$. Za tuto dobu vlastního času by se jejich počet zmenšil rozpadem asi 10^{20} -krát, takže bychom je na Zemi prakticky nemohli registrovat.

7.6.3 Skládání relativistických rychlostí

V odst.7.5.1 byl odvozen obecný vzorec $v' = \frac{v-V}{1-vV/c^2}$, kde

- pro Galileovu transformaci $m = 0$, takže $v' = v - V$
- pro Lorentzovu transformaci $m = \frac{1}{c^2}$, takže $v' = \frac{v-V}{1-\frac{vV}{c^2}}$.

Tento vzorec udává tedy rychlost v' , kterou naměříme v soustavě $\mathcal{S}'$, jestliže jsme v soustavě $\mathcal{S}$ naměřili rychlost v a jestliže se $\mathcal{S}'$ vůči $\mathcal{S}$ pohybuje rychlostí V .

Jak bylo v odst.7.5.1 ukázáno, částice s podsvětelnou rychlostí v jedné soustavě zůstává podsvětelnou i v libovolné jiné soustavě při relativní rychlosti soustav $V < c$; skládáním podsvětelných rychlostí tedy nemůžeme nikdy rychlost světla ani dosáhnout; tím spíše ji nemůžeme překročit.

7.7 Minkowského formalismus, čtyřvektory

Hermann Minkowski (1864 – 1909) navrhl využití komplexních čísel k popisu prostoročasu. Zavedeme-li totiž novou proměnnou $x_4 = ix_0 = ict$, bude se čtveřice (x_i) popisující událost chovat jako vektor ve čtyřrozměrném prostoru s obvyklými pravidly: skalární součin γ vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ je roven $\gamma = \sum_k a_k b_k$ (resp. prostě $a_k b_k$ podle Einsteinovy sumační konvence). Formálně se zachovává euklidovská metrika; rozdíl je v tom, že díky imaginární jednotce v proměnné x_4 může být čtverec $I^2 = \sum_k a_k a_k$ velikosti vektoru kladný, nulový i záporný a že může být roven nule i pro nenulový vektor a_k . Proto mluvíme o *euklidovské pseudometrice*.

7.7.1 Čtyřvektory a trochu filosofie

$Q = QV$; využitelnost klas. mechaniky pomocí invariance i ve spec. relativitě

7.7.2 Matice Lorentzovy transformace**7.7.3 Čtyřvektor rychlosti****7.7.4 Čtyřvektor hybnosti****7.7.5 Čtyřvektor zrychlení****7.7.6 Čtyřvektor síly****7.7.7 Pohybová rovnice při speciální Lorentzově transformaci****7.7.8 Pohybová rovnice při obecné Lorentzově transformaci****7.8 Další důsledky teorie relativity**