

Kapitola 7

Základy teorie relativity

7.1 Motivace

7.1.1 Co je a co není teorie relativity

2009-01-08 — 7-REL-b.tex

Speciální teorie relativity (STR) mění velmi podstatně naše pojmání *prostoru a času*. Zejména v oblasti velmi vysokých rychlostí (srovnatelných se světelnou rychlostí) se totiž při měření ukazuje, že prostor a čas nejsou nezávislé pojmy, ale souvisejí spolu natolik úzce, že je výstižnější pojímat je spolu jako nový pojem *prostorčas* a studovat jeho vlastnosti. STR tuto souvislost vystihuje a popisuje. Přejít od jedné inerciální vztažné soustavy ke druhé podle STR již není dán Galileiho transformací, ale transformací Lorentzovou; ta je symetričtější v souřadnicích (časové a prostorových) než Galileiho.

STR dále spojuje *setrvačnou hmotnost s energií* známým vztahem $E = mc^2$. Gravitační hmotnosti a gravitačním zákonem se však zabývá až obecná teorie relativity (OTR), nikoli STR.

Ostatní představy klasické mechaniky (např. částice, pole, síla) však zůstávají v STR v platnosti, dokonce i v tom smyslu, že při pečlivé formulaci platí tři pohybové zákony Newtonovy, tedy základ klasické mechaniky, používáme-li během práce pouze jedinou vztažnou soustavu. Např. 2. Newtonův zákon (zákon síly) platí ve znění „Časová změna hybnosti hmotného bodu je rovna výsledné síle na něj působící“.

STR je plně kompatibilní (slučitelná) s teorií elektromagnetického pole. Transformační vlastnosti tohoto pole (Lorentzova transformace) totiž vyhovují představě sjednoceného *prostorčasu*, nikoli však představě *prostoru* samostatného, na *čase* nezávislého (Galileiho transformace). Připomeňme, že teorie elektromagnetického pole *není* kompatibilní s klasickou nerelativistickou mechanikou, konkrétně s Galileiho transformací.

7.1.2 Výchozí situace: konec 19. století

Klasická mechanika je už detailně rozpracována nejen ve formě vektorové (newtonovské), ale i ve svých vyšších partiích — v analytické mechanice, jako je Lagrangeův a Hamiltonův formalismus. Zůstává však stále Newtonova představa existence absolutního *prostoru* a absolutního *času*, v němž platí zcela přesně Newtonovy zákony; jemu se (pouze) přibližují vztažné soustavy námi realizované. Ovšem již Galileo Galilei (před Newtonem) věděl, že zákony mechaniky, platící např. ve vztažné soustavě spojené s klidným mořem (a se Zemí) mají stejný tvar i ve vztažné soustavě spojené s lodí, která se vůči moři pohybuje rovnoměrně přímočaře. Je tedy zřejmé, že *mechanickými* pokusy *nelze* zjistit, zda daná vztažná soustava je oním absolutním *prostorem* a *časem*, anebo se vůči němu pohybuje rovnoměrně přímočaře.

Také **teorie elektromagnetického pole** je prakticky hotova. Na podkladě zejména Faradayových pokusů a jejich matematického zpracování Maxwellem se v ní podařilo sjednotit do té doby samostatné obory – elektřinu, magnetismus a optiku. Elektromagnetické pole bylo popisováno jako mechanický stav (vnitřní pnutí) ve speciálním vše prostupujícím prostředí – éteru. Např. elektrická indukce $\mathbf{D}$ – displacement – popisovala podle těchto představ místní posunutí tohoto éteru pod vlivem příslušné síly – elektrické intenzity $\mathbf{E}$. Bylo by logické předpokládat, že éter je v klidu vůči absolutnímu *prostoru*.

Ukázalo se však, že rovnice popisující elektromagnetické pole (Maxwellovy rovnice) nejsou invariantní vůči Galileově transformaci. Plynou z nich totiž vlnové rovnice, které stanovují, že světelná

rychlost¹ má – rozumí se v absolutním prostoru a čase – jistou konkrétní hodnotu

$$c_0 = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458 \text{ m/s.}$$

Protože podle Galileiho transformace se rychlosti při přechodu mezi vztažnými soustavami sčítají, dává to možnost z „kandidátů na absolutní prostor“ vyloučit ty vztažné soustavy, v nichž by měla naměřená hodnota světelné rychlosti hodnotu jinou. Otázka nalezení soustavy, vůči níž je éter v klidu, se stala aktuální.

7.2 Klasické pojetí času a prostoru

7.2.1 Vztažná soustava; hodiny, měřící tyče

²Ze standardů — stejných hodin a stejných tyčí — si představíme vytvořeu pevnou konstrukci. Tyče jsou navzájem v klidu a spolu s hodinami v „mřížových bodech“ tyčí nám realizují **vztažnou soustavu** $\mathcal{S}$. Zajistíme také **synchronizaci hodin**, tj. že různé hodiny v různých místech stanoví pro dvě současné události týž časový údaj (tj. společný počátek času pro všechny hodiny v $\mathcal{S}$). Dále zvolíme, víceméně libovolně, počátek souřadnic v $\mathcal{S}$.

7.2.2 Událost

U důležité události zaznamenáváme *místo* a *čas*, kdy k ní došlo: v každém dotazníku např. zapisujeme den a místo svého narození. V STR bývá termín *událost* zúžen právě jen na určení prostorového a časového údaje, tj. dvojice $[\mathbf{r}; t]$, kde a kdy dotyčný jev (výbuch supernovy, rozsvícení žárovky, setkání dvou pohybujících se bodů) nastal (tedy bez ohledu na to, **co** se vlastně stalo). Takovou událostí je např. i počátek vztažné soustavy $[0, 0]$: odsud začínáme měřit prostor i čas.

K plné informaci je ovšem potřeba zadat vztažnou soustavu, v níž polohu a okamžik určujeme: pasažér ve vlaku z Moskvy bude určovat události polohou vůči svému místu v rychlíku a časem vůči ČR o 2 hodiny posunutým. Údaje $\mathbf{r}'$, t' vztažené k jiné soustavě $\mathcal{S}'$ odlišíme též čárkou u závorky: $[\mathbf{r}'; t']'$, např. $[0, 0]'$.

Odpověď k 7.6.1: $[3; 3\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}]$.

7.2.3 Synchronizace vztažných soustav

Při sledování dvou soustav se nám zjednoduší popis, budeme-li je **synchronizovat navzájem**: počátku $[0, 0]$ soustavy $\mathcal{S}$ přiřadíme i počátek $[0, 0]'$ soustavy $\mathcal{S}'$. Prakticky: pokud počátku $[0, 0]$ odpovídala v $\mathcal{S}'$ dříve hodnota $[\mathbf{r}'_0, t']'$, pak tuto hodnotu odečteme od každého údaje v $\mathcal{S}'$.

7.2.4 Současnost a soumítnost; relativní a absolutní

Řekneme, že dvě události A, B se souřadnicemi $[\mathbf{r}_A; t_A]$ a $[\mathbf{r}_B; t_B]$ měřenými v téže vztažné soustavě $\mathcal{S}$ jsou v této soustavě **současné**, jestliže $t_A = t_B$, resp. **soumítné**, jestliže $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B$.

V logice budeme místo slova „současné“, nemá-li bezprostřední vztah k času, raději užívat slovo „zároveň“.

Veličinu nazýváme **absolutní**, resp. **relativní**, jestliže její hodnota **nezávisí**, resp. **závisí** na volbě vztažné soustavy použité pro popis a měření veličiny.

Současnost je v klasické mechanice absolutní: jestliže nastane výbuch současně na začátku i konci vlaku, pak nastal současně jak vůči vlaku, tak i vůči Zemi.

Naproti tomu soumítnost dvou událostí je i v klasické mechanice relativní, tj. závisí na volbě vztažné soustavy užitě při popisu. Jestliže si pasažér v jídelním voze u stolku objedná kávu (A) a po chvíli ji zaplatí (B), pak objednání a zaplacení nejsou současné (ani z hlediska vlaku, ani Země). Události A, B jsou soumítné z hlediska vlaku (u téhož stolku), nikoli však z hlediska Země (vlak

¹Termín zní „světelná rychlost“ (luminal speed) neboli „rychlost světla ve vakuu“ (speed of light in vacuum) podle společné normy ISO/IEC 80000-6. Norma předepisuje značku c_0 a ponechává c pro rychlost světla i v jiném prostředí než ve vakuu. Protože zde se prakticky všude zabýváme jedinečnou rychlostí světla ve vakuu, dovolíme si pro stručnost užívat jednodušší značku c namísto c_0 .

²Celý tento odstavec jen připomíná známou věc; na definici je příliš vágní.

zatím projel dlouhý úsek). Soumísné v *obou* vztažných soustavách by A, B byly buď tehdy, kdyby se soustavy vůči sobě nepohybovaly (kdyby vlak stál) nebo kdyby A, B byly současné — tj. kdyby se vlak nestačil mezi oběma událostmi A, B vůči Zemi posunout.

I v teorii relativity bude soumísnost relativní: dvě události v jedné soustavě soumísné, ale nesoučasné, nebudou soumísné vůči jiné soustavě, pohybující se vůči první. Relativní se však stane i současnost: dvě události v jedné soustavě současné, ale nesoumísné, nebudou současné vůči jiné soustavě, pohybující se vůči první. Bude to tedy – paradoxně – symetričtější. A také bude pravda, že dvě události A, B zároveň současné i soumísné v jedné soustavě $\mathcal{S}$ jsou současné a soumísné i v každé jiné soustavě $\mathcal{S}'$.

7.2.5 Galileova transformace

Uvažujme dvě inerciální vztažné soustavy: událost U necht' má v $\mathcal{S}$ souřadnice $[\mathbf{r}, t]$, v $\mathcal{S}'$ souřadnice $[\mathbf{r}', t']$. Přejít od hodnot $\mathbf{r}, t$ k $\mathbf{r}', t'$ nám určuje **Galileova transformace**. Proberme situace od nejjednodušší k nejobecnější.

Jsou-li obě soustavy identické, pak přirozeně platí

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &= \mathbf{r} \\ t' &= t.\end{aligned}$$

resp. po souřadnicích

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_i &= \mathbf{r}_i \\ t' &= t.\end{aligned}$$

Jestliže obě soustavy mají jen posunuté počátky, tj. mají sobě odpovídající osy rovnoběžné, nepohybují-li se vůči sobě a jestliže jisté události U_0 se souřadnicemi $[\mathbf{r}_0, t_0]$ v $\mathcal{S}$ odpovídají souřadnice $[\mathbf{r}'_0, t'_0]$ v $\mathcal{S}'$, pak má transformace $[\mathbf{r}, t]$ na $[\mathbf{r}', t']$ tvar

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0)_i &= (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)_i \\ t' - t'_0 &= (t - t_0).\end{aligned}$$

Pokud se soustava $\mathcal{S}'$ vůči $\mathcal{S}$ posouvá rychlostí $\mathbf{V}$, pak má tuto rychlost vůči $\mathcal{S}$ každý bod, který v $\mathcal{S}'$ stojí. Platí tedy

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0)_i &= (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)_i - \mathbf{V}(t - t_0) \\ t' - t'_0 &= (t - t_0).\end{aligned}$$

Ověřte si, že si obojí souřadnice události U_0 odpovídají. Dále ověřte, že libovolný bod stojící v $\mathcal{S}'$, tj. mající $\mathbf{r}' = \text{konst}$ pro libovolné t' , má v $\mathcal{S}$ souřadnici $\mathbf{r}$ závislou na t lineárním vztahem, z něhož plyne rychlost pohybu $\mathbf{V}$.

Mají-li soustavy $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ navzájem otočené osy, bude (obecně) velikost každé ze složek x', y', z' záviset na všech složkách x, y, z , a to lineárně, pomocí směrových kosinů K_{ik} mezi osou x'_i a x_k . Galileova transformace získá tvar

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0)_i &= K_{ik}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)_k - \mathbf{V}_i(t - t_0) \\ t' - t'_0 &= (t - t_0),\end{aligned}\tag{7.1}$$

Toto je tedy nejobecnější Galileova transformace.

Matice směrových kosinů K_{ik} je unitární, tj. $K_{ik}K_{im} = \delta_{km}$. Všimněme si, že lineární kombinace pomocí unitární matice má názornou geometrickou interpretaci — otočení vztažné soustavy.

Speciální transformace Zjednodušíme si nyní práci tím, že budeme uvažovat situaci pouze v tom směru, ve kterém se koná pohyb. V tom směru budeme orientovat osu x . Obecná transformace má pak tvar

$$\begin{aligned}x' - x'_0 &= x - x_0 - V(t - t_0) \\ t' - t'_0 &= (t - t_0).\end{aligned}$$

resp. při synchronizaci počátků

$$\begin{aligned}x' &= x - Vt \\ t' &= t.\end{aligned}\tag{7.2}$$

Inverzní transformace ke Galileově transformaci rov. 7.2 může být samozřejmě nalezena triviálním vyřešením soustavy těchto dvou lineárních rovnic vůči neznámým x a t , tedy

$$\begin{aligned} x &= x' + Vt' \\ t &= t'. \end{aligned}$$

Můžeme ji však najít i „fyzikálněji“, a toto si hluboce rozvažte: z principu relativity plyne, že tato transformace musí mít stejný tvar, tj. bude opět Galileovou transformací, v níž zaměníme t za t' , dále x za x' a vzájemnou rychlost V za $V' = -V$.

7.2.6 Měření dob a délek

Pozorujme letící meteor, který někdy někde začal svítit (událost A) a poté jinde zhasl (Z). Zajímá nás jednak *vzdálenost*, tedy dráha $|\mathbf{r}_Z - \mathbf{r}_A|$, jakou meteorit urazil, jednak *doba* $t_Z - t_A$, jak dlouho svítil. Protože však hodnoty prostorových i časových údajů závisejí na volbě vztažné soustavy, zajímá nás také, do jaké míry na této volbě závisejí vzdálenost a doba zkoumaného děje, tj. prostorová a časová vzdálenost mezi dvěma událostmi. S meteoritem můžeme spojit inerciální soustavu $\mathcal{S}'$, inerciální soustavu spojenou se Zemí označíme $\mathcal{S}$. Pro zjednodušení zápisů předpokládejme přímočarý let po ose x .

Letí-li meteorit po dobu $\Delta T = t_Z - t_A$ vůči Zemi, pak ve své vlastní inerciální soustavě (v níž stojí v klidu) letí dobu $\Delta T' = t'_Z - t'_A$: z transformačních rovnic plyne $\Delta T = \Delta T'$. V klasické mechanice je tedy **doba děje** absolutní, tj. nezávisí na volbě vztažné soustavy.

Snadno však nahlédneme, že **prostorová vzdálenost** mezi dvěma událostmi (délka) je relativní, tj. na volbě vztažné soustavy závisí. Meteorit v soustavě $\mathcal{S}'$ spojené s ním samým je ovšem v klidu, takže dráha, po které svítí, je nulová. V soustavě $\mathcal{S}$ spojené se Zemí urazí meteorit nenulovou dráhu Δx , v případě rovnoměrného pohybu $\Delta x = v\Delta T$.

Z toho také plyne samozřejmé „poučení“: chceme-li změřit délku předmětu, pak se tento předmět buď nesmí pohybovat (a jeho kraje pak můžeme měřit kdykoli), anebo – pokud se pohybuje – musíme změřit oba jeho kraje současně, tedy v tentýž okamžik. (V teorii relativity se ukáže, že současnost měření ve dvou vzdálených bodech je relativní.)

Délka předmětu měřená ve dvou vztažných soustavách navzájem pootočených vyjde stejně. To je matematicky vyjádřeno unitárností matice směrových kosinů K . (Jednotlivé čtverce rozdílů složek pod odmocninou budou obecně různé, ale jejich součet bude vždy stejný.)

7.2.7 Klasické skládání rychlostí

Při rovnoměrném přímočarém pohybu není rozdíl mezi průměrnou a okamžitou rychlostí: v obou případech je rychlost dána vztahem

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}_Z - \mathbf{r}_A}{t_Z - t_A}.$$

Dosazením snadno zjistíme, že mezi rychlostí $\mathbf{v}$ naměřenou v $\mathcal{S}$ a rychlostí $\mathbf{v}'$ naměřenou v $\mathcal{S}'$ pohybující se rychlostí $\mathbf{V}$ vůči $\mathcal{S}$ platí jednoduchý vztah — rychlosti se sčítají jako vektory:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$$

Odtud ihned plyne, že neexistuje žádná konečná rychlost, která by byla absolutní v tom smyslu, že by měla stejnou hodnotu bez ohledu na volbu vztažné soustavy. Jedině rychlost nekonečná v jedné vztažné soustavě je nekonečná v libovolné vztažné soustavě. Tomto poněkud podezřelému tvrzení můžeme však dát přijatelnější tvar. Nekonečnou rychlostí bychom se mohli dostat od události $A = (\mathbf{r}_A; t_A)$ k události $Z = (\mathbf{r}_Z; t_Z)$ tehdy, kdybychom nenulovou vzdálenost $|\mathbf{r}_Z - \mathbf{r}_A|$ překonali během nulové doby, tedy pokud by platilo $t_Z = t_A$ a obě události byly současné. Potřeba *nekonečné* rychlosti ke spojení událostí A a Z je tedy totéž co *současnost* těchto událostí. Absolutnost nekonečné rychlosti v galileovské mechanice tedy znamená absolutnost současnosti. To je srozumitelný – a velmi důležitý – důsledek Galileiovy transformace.

Tímto končíme rekapitulaci klasické kinematiky.

7.3 Princip konstantní světelné rychlosti

Z Maxwellovy teorie plyne, že světlo (jakožto forma elektromagnetického záření) by se mělo v absolutním prostoru a čase (kde platí Maxwellovy rovnice) šířit rychlostí

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 299\,792\,458 \text{ m/s}.$$

V inerciálních soustavách pohybujících se vůči absolutnímu prostoru by tedy mělo mít světlo rychlost jinou, podle teorému o vektorovém skládání rychlostí. Ale přesná měření (např. Michelsonův-Morleyův pokus) naměřila c stejné v různých inerciálních soustavách; např. Země obíhá kolem Slunce s postupnou rychlostí 30 km/s, takže by v různých ročních obdobích mělo mít světlo mimozemských zdrojů mít rychlosti odlišné, podle ročního období nazvájem až o 60 km/s. Nic takového však nebylo pozorováno.

Přesnost měření dostatečně převyšovala přesnost potřebnou pro zjištění odchylek. Dále, většina pokusů (např. Michelson a Morley) měřila přímo rozdíl mezi rychlostmi v různých směrech; tím se získá výsledek mnohem přesnější než samostatným měřením rychlostí v obou směrech a pak jejich odečtením.

*Pokusy ověřily, že rychlost světla ve vakuu je ve všech inerciálních soustavách stejná.
Tato rychlost nezávisí na druhu zdroje ani na rychlosti jeho pohybu.*

7.4 Lorentzova transformace

Princip konstantní světelné rychlosti a Galileiova transformace jsou spolu ve sporu. Ten vyřešíme nalezením jiné transformace než Galileiovy, a to takové, aby při převodu souřadnic vycházela rychlost c ve všech soustavách stejná. Protože však chceme ponechat platnost Newtonových zákonů v klasické oblasti, musíme se omezit na *lineární* transformace mezi prostorovými a časovými souřadnicemi. Jedině tak totiž rovnoměrný přímočarý pohyb v jedné soustavě zůstane rovnoměrným přímočarým pohybem i v soustavě druhé.

Fyzikálně řečeno: z nepřítomnosti výsledné síly (nulového zrychlení) v jedné inerciální soustavě plyne nepřítomnost výsledné síly i v každé jiné inerciální soustavě.

Taková transformace existuje; nazývá se podle svého objevitele **Lorentzova**.

7.4.1 Speciální Lorentzova transformace

Uvažujme jistou událost (např. výskyt hmotného bodu v jistém místě a čase), popsanou ve dvou inerciálních soustavách $\mathcal{S}$ resp. $\mathcal{S}'$. Zatím se omezíme na pohyb v jediném směru; v tomto směru budeme orientovat osy x, x' obou soustav. Rychlost soustavy $\mathcal{S}'$ vůči $\mathcal{S}$ budeme značit V . Prostor-časové souřadnice události označíme $[x, t]$ v $\mathcal{S}$, resp. $[x', t']$ v $\mathcal{S}'$.

Speciální Lorentzova transformace – nejobecnější lineární transformace, která vyhovuje těmto požadavkům a zachovává jistou konstantní rychlost c – má tvar

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-(V^2/c^2)}} (x - Vt) \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1-(V^2/c^2)}} \left(-\frac{V}{c^2}x + t\right). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Všimněme si, že pro $c \rightarrow \infty$ je $V/c \rightarrow 0$ a transformace přechází na Galileiho transformaci.

Symetrie těchto rovnic vynikne ještě více, jestliže místo času t zavedeme veličinu $x_0 = ct$ mající rozměr délky (stejně jako x). Při označení $\beta = V/c$ a $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ dostaneme velmi symetrický zápis

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta x_0) \\ x'_0 &= \gamma(x_0 - \beta x). \end{aligned} \quad (7.4)$$

7.4.2 Odvození Lorentzovy transformace

Celý tento odstavec (petit) při prvním čtení přeskočte a zatím věřte, že rov. 7.3 a rov. 7.4 jsou

- správné
- jediné možné.

Předpokládejme pro jednoduchost, že obě soustavy jsou synchronizovány ve svém prostorovém a časovém počátku, tj. že $(0, 0) = (0, 0)'$. Naším cílem je odvození **Lorentzových** transformačních rovnic mezi (x, t) a $(x', t)'$, při nichž se zachovává jistá rychlost – světelná rychlost (c). Jak víme, rovnice musejí být lineární a za „obvyklých okolností“ (rychlosti malé vůči c) se musejí redukovat na speciální Galileiovu transformaci.

Galileiova transformace měla tvar

$$\begin{aligned} x' &= x - Vt &= \alpha_1 x + \alpha_2 t \\ t' &= t &= \alpha_3 x + \alpha_4 t \end{aligned}$$

se čtyřmi koeficienty $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -V$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 1$.

V nejobecnější lineární transformaci budou spolu spojeny x' a t' s x a t opět čtyřmi koeficienty; ty musí být zvoleny tak, aby splňovaly dále uvedené požadavky, které od nové transformace očekáváme.

1) **Soustava $\mathcal{S}'$ má vůči soustavě $\mathcal{S}$ rychlost V .**

Pak tedy pro libovolné časy t musí počátek $(0, t)'$ soustavy $\mathcal{S}'$ mít souřadnice (Vt, t) v $\mathcal{S}$. Nejobecnější transformace tohoto typu je

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - Vt) \\ t' &= \gamma(\phi x + \psi t); \end{aligned}$$

ještě zbývají neurčené tři koeficienty γ , ϕ , ψ .

Ověřte si, že pro počátek soustavy $\mathcal{S}'$ (tj. $x' = 0$ a libovolné t') platí v soustavě $\mathcal{S}$ vztah $x = Vt$.

2) **Soustava $\mathcal{S}$ má vůči soustavě $\mathcal{S}'$ rychlost $-V$.**

Pak zase pro libovolné časy t , t' musí počátek $(0, t)$ odpovídat bod $(-Vt', t')$. Dosazením $x = 0$ a vydělením obou rovnic dostáváme

$$x'/t' = v' = -V/\psi,$$

odkud zřejmě plyne $\psi = 1$. Transformace dostává tvar

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - Vt) \\ t' &= \gamma(\phi x + t) \end{aligned}$$

se zatím neurčenými dvěma koeficienty γ , ϕ .

Ověřte si, že pro počátek soustavy $\mathcal{S}$ (tj. $x = 0$ a libovolné t) platí v soustavě $\mathcal{S}'$ vztah $x' = -Vt'$.

3) **Má-li bod v soustavě $\mathcal{S}$ rychlost c , pak má v $\mathcal{S}'$ rovněž rychlost c .**

Vydělíme spolu obě rovnice, levou stranu rozšíříme zlomkem $1/t$ a dosadíme $x'/t' = v' = c$ resp. $x/t = v = c$. Dostaneme

$$c = \frac{c - V}{\phi c + 1},$$

odkud jednoduše plyne $\phi = -V/c^2$. V transformaci

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - Vt) \\ t' &= \gamma(-\frac{V}{c^2}x + t) \end{aligned}$$

zbývá již jen určit γ .

4) **Inverzní transformace k Lorentzově transformaci je rovněž Lorentzova.**

Řešením předchozí soustavy rovnic dostáváme

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\gamma(1 - (V^2/c^2))} (x' + Vt') \\ t &= \frac{1}{\gamma(1 - (V^2/c^2))} (+\frac{V}{c^2}x' + t'). \end{aligned}$$

Je zřejmé, že tato soustava rovnic je opět Lorentzovou transformací odpovídající rychlosti $-V$ za předpokladu, že platí

$$\gamma = \frac{1}{\gamma(1 - (V^2/c^2))}.$$

To je splněno, pokud je $\gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - (V^2/c^2)}}$. Protože pro $V = 0$ musí přejít transformace v identitu, zvolíme řešení s kladným znaménkem, tj.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (V^2/c^2)}}$$

a dostáváme konečně **speciální Lorentzovu transformaci**

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1 - (V^2/c^2)}} (x - Vt) \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1 - (V^2/c^2)}} (-\frac{V}{c^2}x + t). \end{aligned}$$

Symetrie těchto rovnic vynikne ještě více, jestliže místo času t zavedeme veličinu $x_0 = ct$ mající rozměr délky. Při označení $\beta = V/c$ a $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ dostaneme

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta x_0) \\ x_0' &= \gamma(-\beta x + x_0). \end{aligned}$$

Ověřte, že speciální Lorentzovy transformace podél téže osy tvoří grupu.

7.4.3 Lorentzova transformace pro 3D prostor (x, y, z)

Zobecnění Lorentzovy transformace pro 3D je snadné, zůstaneme-li při tom, že se systémy $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}'$ navzájem pohybují podél společných os x, x' . Pak transformace nemění nic ve směru os y a z , takže rovnice mají tvar

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-(V^2/c^2)}} (x - Vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1-(V^2/c^2)}} \left(-\frac{V}{c^2}x + t\right). \end{aligned}$$

resp. se značením $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$

$$\begin{aligned} x_0' &= \gamma(x_0 - \beta x_1) \\ x_1' &= \gamma(-\beta x_0 + x_1) \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Výslovně zdůrazněme, že při pohybu podél jedné z os se ostatní dvě „transformují“ identitou, tedy bez jakékoliv změny.

Speciální Lorentzovy transformace se skládají snadno a tvoří grupu. Skládání obecných Lorentzových transformací je složitější (krychle se převádí na obecný, nepravoúhlý rovnoběžnostěn!). Zde se jimi zabývat nebudeme.

7.5 Vlastnosti a důsledky speciální Lorentzovy transformace

7.5.1 Transformace rychlostí („skládání rychlostí“)

Značme

$$\begin{aligned} v' &= x'/t' = \beta'c \\ v &= x/t = \beta c \\ V &= \quad \quad Bc. \end{aligned}$$

Vydělením rovnic rov. 7.3 pro x', t' dostaneme

$$\begin{aligned} v' &= \frac{v-V}{1-\frac{vV}{c^2}} \quad \text{a inverzní} \\ v &= \frac{v'+V}{1+\frac{v'V}{c^2}} \end{aligned} \quad (7.6)$$

resp.

$$\begin{aligned} \beta' &= \frac{\beta-B}{1-\beta B} \quad \text{a inverzní} \\ \beta &= \frac{\beta'+B}{1+\beta' B}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

To jsou (obecně) lineární lomené funkce vůči proměnným v, β . Rov. 7.6 má vždy právě jeden pevný bod $v = c$ takový, že $v' = v$.

Pokud by bylo $c = \infty$, redukovala by se rov. 7.6 na lineární rovnici a rov. 7.3 by přešla na Galileovu transformaci, kdy se rychlosti skládají prostým (vektorovým) součtem:

$$v' = v - V \quad \text{resp.} \quad v = v' + V;$$

zápis typu rov. 7.7 by neměl smysl.

Protože je ovšem hodnota rychlosti c konečná (světelná rychlost), nastane při vzájemné rychlosti $V < c$ (resp. $B < 1$) vztažných soustav pro pohyb bodu libovolnou rychlostí v právě jeden z těchto případů:

- $|v| < c \quad \Rightarrow \quad |v'| < c \quad \text{podsvětelné rychlosti}$
- $|v| = c \quad \Rightarrow \quad |v'| = c \quad \text{světelná rychlost}$
- $|v| > c \quad \Rightarrow \quad |v'| > c \quad \text{nadsvětelné rychlosti.}$

Rychlosti v se tedy rozpadají do tří tříd; příslušnost ke třídě se Lorentzovou transformací nemění. (Bod pomalejší než světlo v jednom vztažném systému $\mathcal{S}$ zůstane pomalejším než světlo i v libovolném jiném vztažném systému $\mathcal{S}'$ apod.) Příklad $|v| > c$ zahrnuje i $v = \infty$ (současnost).

7.5.2 Interval jako invariant Lorentzovy transformace

Pro událost U o prostorové souřadnici x a časové souřadnici t definujeme **interval** s^2 jako čtverec vzdálenosti této události od počátku, tedy $s^2 \equiv x^2 - c^2 t^2$. V 7.4.2 požadujeme, aby z $s^2 = 0$ plynulo i $(s^2)' = 0$, tedy aby rovnost $s^2 = 0$ byla **invariantní** vůči Lorentzově transformaci. Ověříme dokonce, že interval s^2 , i když není roven nule, je invariantem Lorentzovy transformace. Platí totiž

$$(s^2)' = x'^2 - c^2 t'^2 = (x^2 - 2\beta xct + \beta^2 c^2 t^2) - \gamma^2 (c^2 t^2 - 2\beta cxt + \beta^2 x^2) = s^2, \quad (7.8)$$

což jsme chtěli dokázat.

Je-li $s^2 < 0$, říkáme, že interval má **časový** charakter, pro $s^2 > 0$ má interval **prostorový** charakter. Světobody, pro něž je $s^2 = 0$, tvoří **světelný kužel** s vrcholem v počátku.

Analogicky lze zavést interval mezi dvěma událostmi A, B jako $s_{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 - c^2 (t_B - t_A)^2$.

Někdy se nepřesně říká, že v Galileově transformaci jsou dva invarianty, totiž délka Δl a doba Δt , zatímco v Lorentzově transformaci jen jediný, totiž interval s^2 . Není to pravda, délka není v Galileově transformaci invariantem, viz 7.2.6. Invariantem v Galileově transformaci je jen doba. Délka se zachovává jen při transformaci mezi dvěma soustavami jsoucími navzájem v klidu (např. s navzájem pootočenými osami), ať už jde o transformaci Galileovu nebo Lorentzovu.

7.5.3 Relativita současnosti

Na rozdíl od newtonovské mechaniky je v teorii relativity současnost dvou nesoumísných událostí *relativní*, tj. závislá na volbě vztažné soustavy. Nebereme-li to v úvahu, dostaneme se snadno do sporu, který je podstatou většiny „paradoxů“ teorie relativity.

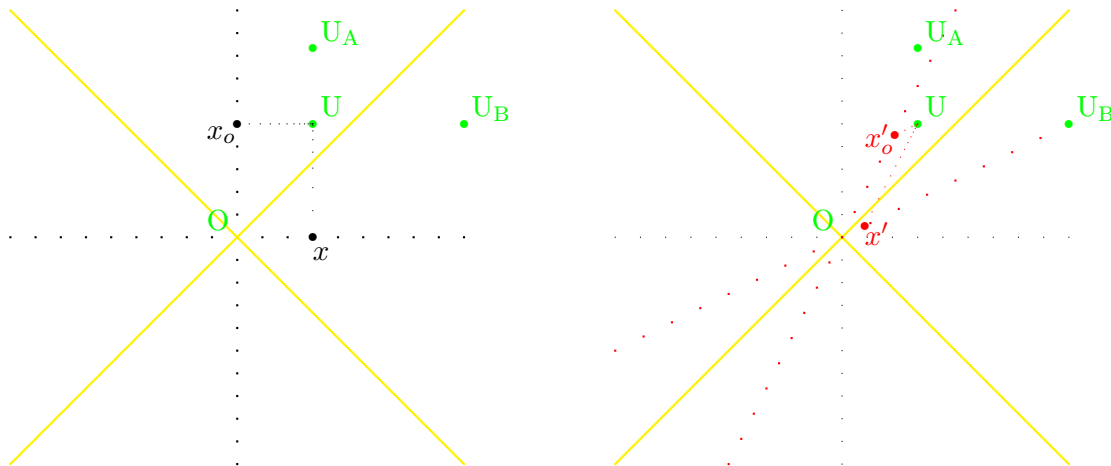
Konkrétně: jsou-li dvě nesoumísné události U, U_B v soustavě $\mathcal{S}$ současné, pak v soustavě $\mathcal{S}'$ pohybující se od U k U_B nastala událost U_B dříve než U , tedy $t_{U_B} < t_U$. Ověřte si to na grafickém znázornění, jehož výklad nyní následuje.

7.5.4 Grafické znázornění

Vynášíme do grafu na vodorovnou osu x polohu x a na svislou osu x_0 čas t vynásobený světelnou rychlostí, tedy veličinu $x_0 = ct$. Každý bod v rovině x, x_0 pak odpovídá jisté události v prostoru a čase. Událost U má na obrázku časovou souřadnici x_0 a prostorovou souřadnici x . Událost U_A je s ní soumísná, událost U_B současná. Událost $O=[0,0]=[0,0]'$ je společný počátek souřadnic.

Při přechodu daném Lorentzovou transformací rov. 7.4 se však zachovává nikoli součet, ale rozdíl čtverců souřadnic bodů (viz rov. 7.8). Body roviny se proto pohybují nikoli po kružnicích, ale po rovnoosých hyperbolách. Proto se obě osy pootočí sice stejný úhel φ , kde $\tan \varphi = \beta$, ale nikoli souhlasně, nýbrž *k sobě* pro $\beta > 0$, resp. *od sebe* pro $\beta < 0$. Rovněž se změní stupnice na osách. Světelný kužel zachovává svou polohu; je tvořen body s nulovou vzdáleností s od počátku souřadnic.

Události U, U_A a U_B jsou v obou grafech tytéž. Obrázek odpovídá $\beta = 2/3$, tedy $\gamma = 1,34$. Je zřejmé, že se nezachovala současnost ani soumísnost: ve druhé soustavě $\mathcal{S}'$ už nejsou současné události U s U_B , ale U_B s počátkem souřadnic $O = [0,0]$.



7.6 Klasické interpretace: kontrakce délek, dilatace času, éter

Klasická fyzika byla neobyčejně úspěšná v popisu přírody. Klasické představy jsou nám stále do té míry blízké a sugestivní (zejména ve srovnání s kvantovou fyzikou), že je užíváme občas i nevědomky, třebaže je nebereme doslova. Ostatně ještě z ptolemaiovského, geocentrického pojetí běžně říkáme, že vychází slunce, nebo dokonce že zašlo za mraky, aniž to bereme moc doslovně. Podobně i v oblasti platnosti STR se užívají některé historické formulace, které by při doslovném výkladu vlastně zaváděly. Bylo by ovšem školometské chtít je zakazovat. Můžeme však připomenout, co znamenají a upozornit na to, co neznamenaají.

7.6.1 Kontrakce délek

Problém: Tyč má vlastní délku $l_0 = l'$, tj. délku v soustavě S' , v němž tyč stojí. Jakou má tyč délku l v soustavě S , vůči níž se pohybuje rychlostí V ?

Řešení: Měříme-li délku (ať už pohybující se nebo stojící) tyče, určíme časoprostorové souřadnice obou jejích konců, a to v témže čase z hlediska soustavy, v němž měříme. Nechť tyč, která stojí v soustavě S' (tj. její konce mají souřadnice $x'_1 = 0; x'_2 = l'$ pro všechna t'), letí rychlostí V vůči S tak, že jeden její konec (x_1) prolétává počátkem souřadnic soustavy S právě v okamžiku $t = 0$. Lorentzova transformace dává vztah mezi souřadnicemi obou konců tyče v obou soustavách:

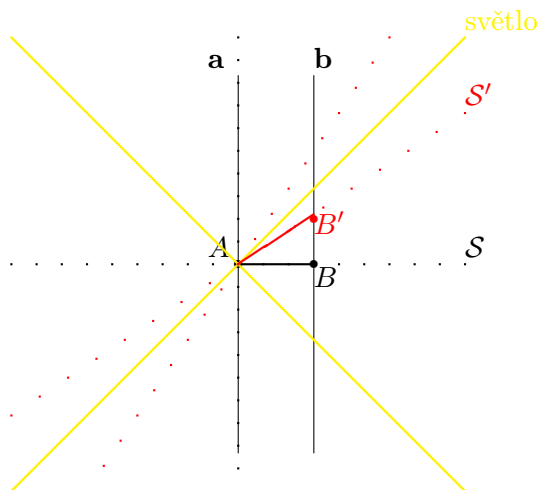
$$\begin{aligned} 0 &= x'_1 = \gamma (x_1 - \beta ct_1) \\ 0 &= t'_1 = \gamma (t_1 - \beta \frac{x_1}{c}) \\ l' &= x'_2 = \gamma (x_2 - \beta ct_2) \\ 0 &= t'_2 = \gamma (t_2 - \beta \frac{x_2}{c}). \end{aligned}$$

Měření provedená v soustavě S v časech $t_1 = t_2 = 0$ určí tedy $x_1 = 0$, $x_2 = l'/\gamma$. Pozorovatel tedy zjistí, že letící tyč je γ -krát *kratší*.

Pro pozorovatele na tyči ovšem akty měření obou konců tyče nebudou současné; přední konec bude měřen o $|t'_2|$ dříve.

Grafický výklad (viz obr.) Nechť tyč leží klidně v S , zadním koncem v počátku souřadnic (světočára **a**), předním na souřadnici $x = 3$ (světočára **b**). Proběhne-li měření v okamžiku $t = t' = 0$, je zadní konec určen $A = [0, 0] = A' = [0, 0]'$. Přední konec je však v S určen událostí $B = [3, 0]$, zatímco v S' událostí $B' = [\frac{3}{\gamma}, 0]'$ a je měřen měřidlem jiné délky. Polohy tyče z hlediska S , resp. S' v čase $t = 0$ jsou naznačeny plnou čarou černou, resp. červenou. Délka AB' měřená příslušnou jednotkou v S' je kratší než délka AB měřená jednotkou v S .

Úloha: Určete hodnoty B' v S' ! Odpověď je na konci odstavce 7.2.2.



Podrobněji Obvykle říkáme, že pohybující se tyč je ve směru pohybu kratší než táž tyč stojící. U tyče délky ℓ totiž naměříme délku ℓ/γ . Naměříme ji tak, že (z našeho hlediska) současně změříme souřadnice začátku i konce tyče; za délku tyče prohlásíme rozdíl těchto hodnot. Pozorovatel pohybující se spolu s tyčí naměří ovšem klidovou délku ℓ . Nesoulad vysvětlí tím, že z jeho hlediska:

- naše dvě měření nebyla současná, ale napřed jsme měřili přední, poté zadní část tyče, protože máme na Zemi ve směru jeho letu rozsynchronizované hodiny;
- měřili jsme γ -krát kratším metrem.

Tyto efekty mají vzájemně opačný účinek, ale převažuje první, takže nám proto vyšla délka tyče kratší.

7.6.2 Dilatace času

Problém: Na hodinách v soustavě S' uplyne doba t' . Jaká doba uplyne ve „stojící“ soustavě S ?

Řešení: Nechť opět hodiny proletěly společným počátkem obou soustav v čase $t = t' = 0$. Až v S' uplyne doba T' , bude

$$\begin{aligned} 0 &= x' = \gamma(x - \beta cT) \\ T' &= t' = \gamma(T - \beta x/c) \end{aligned} \quad ,$$

odkud $x = \beta cT$ (hodiny letí rychlostí βc) a $T' = \gamma T(1 - \beta^2)$, čili $T = \gamma T'$. V soustavě S uplyne doba γ -krát *delší*.

Heslovitě řečeno: „Mezi dvěma událostmi A, B uplyne nejkratší doba v té soustavě, v níž jsou A, B soumístné“ (tedy měříme-li tuto dobu hodinami, které vůči oběma událostem stojí).

Experimentální ověření Mikroskopické ověření: mezony μ s poločasem rozpadu $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s vznikající ve vrchních vrstvách atmosféry sekundárně z kosmického záření proletí na povrch země vzdálenost l cca 30 km. Z „pozemského hlediska“ letí tedy nejméně dobu $\tau = l/c \doteq 10^{-4} \doteq 50 \cdot \tau_0$. Za tuto dobu vlastního času by se jejich počet zmenšil rozpadem asi 10^{20} -krát, takže bychom je na Zemi prakticky nemohli registrovat.

Makroskopické ověření dilatace je popsáno mj. v HRW, str. 1013: v říjnu 1977 Joseph Hafele a Richard Keating nechali čtyři přenosné atomové hodiny $20\times$ obletět kolem Země na komerčních linkách v různých směrech. Výsledné zpoždění se shodovalo s teorií na 10%. O několik let později byla po 15 h obletání Chesapeacké zátoky potvrzena dilatace času s přesností lepší než 1%. V dnešní době se při přemísťování přesných atomových hodin vždy započítávají efekty STR i OTR.

Podrobněji Rozeberme, jak bude probíhat známý „paradox dvojčat“, kdy cestovatel C vrátivší se z výletu zestárne méně než jeho dvojče D — bratr, který zůstal doma. Každý z pozemšťanů, který uvidí po cestě cestovatele, uvidí, že mu hodiny ukazují menší čas než na Zemi, a usoudí, že tedy cestovatelovy hodiny jdou γ -krát pomaleji. Cestovatel sleduje pozemské hodiny a vidí, že

- každé z hodin jdou γ -krát pomaleji než jeho;
- přesto každé následující ukazují čas větší než jeho (a to i na cestě nazpět).

Usoudí z toho, že pozemské hodiny jdou pomaleji než jeho, a že jsou rozsynchronizovány tak, že vždy ve směru jeho letu (tam i zpět) ukazují čas pozdější.

7.6.3 Éter

Klasická fyzika nabízela dva modely světla: korpuskulární (Newton) a vlnový (Huyghens).

Podle korpuskulárního modelu jsou světlo letící částice (korpuskule); model vysvětlí přesně přímočaré šíření světla a odraz světla; lom jen kvantitativně³. Nesouhlasí dále rychlost c světla při pohybu zdroje: v tomto modelu by se měla k rychlosti světla vektorově přičítat.

Podle vlnové teorie je světlo chvěním éteru, asi jako zvuk je chvěním vzduchu. V soustavě, v níž éter stojí, vysvětlí model vše dobře: přímočaré šíření světla, odraz i lom (a fyzikální optika i další jevy jako difrakci apod.). Rychlost světla nezávisí na rychlosti zdroje. Látkou (= hmotným prostředím) je éter ovlivněn tak, že se v něm šíří světlo pomaleji než ve vakuu.

Problémy nastávají, když se pozorovatel pohybuje vůči éteru. Pak by měl naměřit nejen Dopplerův jev (ten naměří), ale i rychlost světla vektorově zvětšenou o svou vlastní rychlost (to se nikdy neměřilo). Otázkou dále je, do jaké míry se éter strhuje, když se šíří v látce s indexem lomu n , která se pohybuje. Experimenty s tekoucí vodou ukázaly, že se éter strhuje pohybujícím se prostředím jen částečně (Fizeau), s koeficientem $(1 - 1/n^2)$.

STR řeší všechny uvedené otázky v úplném souladu s experimentem. Označme rychlost světla ve vakuu c , v látce $v = c/n$, rychlost látky $w = \beta c$. „Strhovací koeficient“ vyjde jako první přiblížení výsledku relativistického skládání rychlosti světla v látce a rychlosti látky, totiž

$$w' = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}} \quad (7.9)$$

$$= c \frac{\frac{1}{n} + \beta}{1 + \frac{\beta}{n}}, \quad (7.10)$$

a to můžeme rozvinout v mocninnou řadu podle β :

$$w' = \frac{1}{n} + \beta(1 - \frac{1}{n^2}) + \beta^2 \dots \quad (7.11)$$

Úloha: Proveďte naznačené odvození podrobně a zjistěte úplný člen druhého řádu.

Odpověď je na konci odstavce 7.7.2.

V současných představách nevymýšlíme mechanický model nebo jiný nositel pro elektromagnetické pole. Pole je prostě stav zkoumaného systému popsán tak, že každému bodu a času v uvažované oblasti je přiřazena nějaká hodnota. V kvantové teorii se sice „vrátila“ k částicovému pojetí — světlo jako proud fotonů, ovšem jde částice kvantové, nikoli klasické, a ty se popisují úplně stejně jako pole.

7.6.4 „Paradox dvojčat“

7.6.5 „Ekvivalence hmoty a energie“

7.7 Minkowského formalismus, čtyřvektory

7.7.1 Základní idea

Nechť se soustava S' pohybuje vůči S rovnoměrně tak, že její osa x'_1 klouže po ose x_1 soustavy S rychlostí $V = \beta c$ (viz rov. 7.5). Po zavedení souřadnice $x_0 = ct$ můžeme použít stejné jednotky pro délky x_j i čas x_0 a Lorentzovy rovnice získají velmi symetrický tvar:

³V prostředí s vyšším indexem lomu, např. ve skle, má světelná částice nižší energii než ve vakuu. Proto je při průletu rozhraním postrčena kolmo k rozhraní a láme se tedy ke kolmici. Nesouhlasí rychlost v látkovém prostředí (je větší než ve vakuu); směr při lomu souhlasí jen kvantitativně (neřídí se Snellovým zákonem).

$$\begin{aligned}
x'_0 &= \gamma(x_0 - \beta x_1) \\
x'_1 &= \gamma(-\beta x_0 + x_1) \\
x'_2 &= x_2 \\
x'_3 &= x_3.
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Opět zdůrazněme, že při pohybu podél jedné z prostorových os (zde x_1) se ostatní dvě (zde x_2, x_3) „transformují“ identitou, tedy bez jakékoliv změny.

Dále jsme viděli, že se při této transformaci zachovává interval

$$s^2 \equiv -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \tag{7.13}$$

$$= -x_0'^2 + x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 \tag{7.14}$$

tedy $s^2 = (s^2)'$, kde $(s^2)'$ je sestaven v $\mathcal{S}'$ z čárkovaných proměnných.

Hermann Minkowski (1864-1909) navrhl v r. 1908 využít k popisu prostoročasu komplexních čísel. Zavedeme-li totiž novou proměnnou $x_4 = ix_0 = ict$, lze rov. 7.13 přepsat do tvaru

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \sum_{\kappa=1}^4 x_{\kappa} x_{\kappa} \equiv x_{\kappa} x_{\kappa}. \tag{7.15}$$

Poslední zápis je s užitím Einsteinovy sumační konvence. Řecké indexy probíhají od 1 do 4; latinské indexy si ponecháme pro prostorové indexy 1 až 3. Zjistíme, že čtveřice $[x_{\kappa}]$ popisující událost se chová jako vektor ve čtyřrozměrném prostoru s obvyklými pravidly pro rovnost, skládání, skalární součin a velikost vektoru (s v rov. 7.15).

Formálně se zachovává euklidovská metrika. Rozdíl je však v tom, že díky imaginární jednotce v proměnné x_4 může být čtverec s^2 velikosti takového vektoru nejen kladný a nulový, ale i záporný, a dále že může být roven nule i pro nenulový vektor a_k . Proto mluvíme o *pseudoeuklidovské metrice*.

Můžeme proto stanovit následující strategii: budeme důsledně vyhledávat veličiny, které jsou konzistentní s Minkowského prostoročasem s jeho metrikou. Jestliže totiž rovnice platná v jedné inerciální soustavě bude zapsána veličinami invariantními vůči Lorentzově transformaci anebo veličinami majícími při této transformaci jednoduše definované chování (čtyřvektory, čtyřtenzory...), pak tím získáme tvar konzistentní i s STR a můžeme očekávat platnost takové rovnice i v libovolné jiné inerciální soustavě.

7.7.2 Čtyřvektory

Veličinu nazveme **čtyřskalárem** v Minkowského prostoru, jestliže je invariantem při Lorentzově transformaci; jinými slovy, má-li výraz, který ji definuje, stejný tvar i stejnou hodnotu ve všech soustavách spojených Lorentzovou transformací. Je to např. elektrický náboj Q , anebo, jak jsme dříve zjistili, prostoročasový interval s^2 z rov. 7.15.

Čtyřrozměrný vektor v Minkowského prostoru s osami x_{κ} nazveme **čtyřvektorem**, jestliže se transformuje Lorentzovou transformací stejně jako „posunutí“ $d[r] = [dx_1, dx_2, dx_3, dx_4]$ události U popsané bodem $\mathbf{r}$ v prostoru a časem $t = x_4 / ic$.

Analogicky, tedy transformačními vlastnostmi, můžeme zavést **čtyřtenzory** libovolného řádu.

Řešení z 7.5.4: $-\beta^2 n^{-1}(1 - n^{-2})$

7.7.3 Grafické zobrazení

Budeme užívat grafického zobrazení už dříve popsáno v 7.5.4, zdůrazníme jen jeho spojitost s Minkowského prostorem.

Změna vztažné soustavy popsaná Lorentzovou transformací se projeví otočením os ve 4D komplexním Minkowského prostoru. Jde-li o otočení pouze v podprostoru prostorových os x_1, x_2, x_3 , jde o totéž otočení, které známe z našeho 3D prostoru, tedy otočení navzájem kolmé trojice prostorových os, přičemž nová vztažná soustava zůstává vůči výchozí soustavě v klidu. Zde není nic nového. Zahrnuje-li však otočení osu x_4 , popisuje přechod ke vztažné soustavě, která se vůči původní soustavě *pohybuje* (a to rovnoměrně přímočaře). Má tedy zcela nový význam. Uvažme pro

jednoduchost jen otočení v rovině x_1x_4 (značme ji ${}_4R$); na papír kreslíme ovšem reálné veličiny x_1x_0 . Tuto rovinu značme ${}_0R$; zpravidla kreslíme časovou osu x_0 svisle a prostorovou osu x_1 vodorovně a pro stručnost značíme jen x .

Otočení v rovině ${}_4R$ zachovává interval $s^2 = x_1^2 + x_4^2 = x_1^2 - x_0^2$ (tedy $x_1^2 - (ct)^2$) a projeví se v rovině ${}_0R$ sčerpáním: každý bod roviny ${}_0R$ se při tomto „otáčení“ pohybuje nikoli po kružnici se středem v počátku souřadnic, ale po rovnosé hyperbole. Osy, které zůstávají k sobě kolmé, by se při obvyklém otočení pootočily v souhlasném směru o stejný úhel; při otočení v rovině x_1x_4 se pootočí o stejný úhel, ale v opačných směrech (tedy buď od sebe, nebo se semknou k sobě – ke světelnému kuželi). Světelný kužel při tomto „otáčení“ zůstává na místě, nemění se. Pohybem bodů po hyperbolách se na osách také změní měřítko. Čím více se nám jeví nové osy sevřené ke světelnému kuželi, tím delší se jeví na nich jednotková vzdálenost.

Stojí za to si při této příležitosti uvědomit, jak to vypadá v klasické mechanice, tedy při Galileově transformaci. Vynášíme-li tedy čas x_0 na svislou osu („časová osa“) a souřadnici x na vodorovnou („prostorová osa“), pak přechod k pohybující se soustavě znamená, že časová osa se skloní a délky na ní se prodlouží tak, aby jejich průmět na svislici zůstal stejný. (Jak víme, $t = t'$ je invariant Galileovy transformace.) Vodorovná prostorová osa je stejná pro všechny vztažné soustavy, i délky na ní zůstávají stejné.

7.7.4 Vlastní čas

Veličina t , klasický čas, resp. s našimi jednotkami $ict = x_4$, se nechová jako skalár, ale je to čtvrtá složka čtyřvektoru (s nepodstatnou multiplikační konstantou).

7.7.5 Čtyřvektor rychlosti

7.7.6 Čtyřvektor hybnosti

7.7.7 Čtyřvektor zrychlení

7.7.8 Čtyřvektor síly

7.7.9 Pohybová rovnice

7.7.10 Hmotnost a energie

7.8 Další důsledky teorie relativity

