

Kapitola 4

Mechanika tuhého tělesa

4-TT-1; 2008-12-02

4.1 Pojem tuhého tělesa

4.1.1 Základní představy

Tuhé těleso je takový objekt, který během řešení úlohy nemění svůj tvar, tj. nedeformuje se.

¶ Rozlišujte tuhé těleso (angl. *rigid body*, opak: deformovatelné těleso, kontinuum) a pevná látka (angl. *solid state*, opak: kapalina, plyn. Tuhé těleso se studuje v klasické mechanice, pevná látka v termodynamice a v kvantové teorii.

Jednotlivé body **A**, **B** tuhého tělesa tedy mohou měnit s časem svou polohu: $\mathbf{r}^A(t)$, $\mathbf{r}^B(t)$, ale jejich vzdálenost $L = |\mathbf{r}^A(t) - \mathbf{r}^B(t)|$ se s časem nemění: $dL/dt = 0$.

Každou část tuhého tělesa můžeme zřejmě rovněž pokládat za tuhé těleso.

V definici tedy nejde jen o vnější tvar, ale i o vnitřní strukturu objektu. Kulové akvárium zcela naplněné vodou nebude tuhým tělesem, pokud bude uvnitř voda proudit (např. když budeme akvárium roztáčet). Pokud voda zmrzne (a akvárium to přežije...), bude se celek chovat jako tuhé těleso.

Z „mikroskopického“ přístupu dojdeme tedy k tuhému tělesu tak, že ho rozložíme na hmotné body. Tuhé těleso pak bude soustava N hmotných bodů doplněná vazbami, které zaručí, že se vzdálenosti jednotlivých bodů během úlohy nemění. Obvykle bude N značně velké číslo, potenciálně třeba i nekonečné. I proto budeme hledat jiný, „globální“ popis takový, aby stačil co nejmenší počet vhodných parametrů pro jednoznačné určení stavu tuhého tělesa.

Nakonec obligátní problém: *existuje* tuhé těleso? Odpověď – tuhé těleso existuje nebo neexistuje přesně stejně jako existuje nebo neexistuje hmotný bod. Neexistuje sice reálný objekt, který by při libovolné situaci zachovával svůj tvar a nedeformoval se (ostatně, z teorie relativity přímo plyne, že žádné těleso nemůže být dokonale tuhé, protože by přenášelo – uvnitř sebe – informaci nekonečně rychle). Setkáváme se však s řadou úloh, v nichž některé objekty svůj tvar nemění, a můžeme je proto pokládat za tuhé těleso. Můžeme tedy odpovědět tak, že se smyslu naší definice tuhého tělesa v první větě tohoto odstavce tuhá tělesa existují.

A ještě obecněji: tuhé těleso i hmotný existují či neexistují právě tak jako úsečka nebo číslo 7. Jsou to prostě prvky jednoho z mnoha možných modelů, kterými popisujeme přírodu.

4.1.2 Popis tuhého tělesa. Stupně volnosti

Ukážeme si několik přístupů k problému a jejich vzájemné souvislosti.

Soustava hmotných bodů Jak je zřejmé, je tuhé těleso speciální soustavou potenciálně nekonečného množství bodů. (Pokud se zastavíme na atomární úrovni, pak 1 kg železa obsahuje cca $N = 10^{25}$ atomů; stáří Vesmíru je pouhých cca $0,4 \cdot 10^{18}$ sekund.) Doufáme proto, že pro rozumný popis bude stačit podstatně méně parametrů. Ukážeme, že stačí 6 parametrů, a to nezávisle na N .

Tuhé těleso můžeme „sestrojit“ z hmotných bodů:

- Jeden jediný hmotný bod můžeme co do polohy popsat třemi spojitě proměnnými parametry (např. 3 kartézské souřadnice x , y , z , nebo ve sférických souřadnicích analogií nadmořské výšky r , zeměpisné šířky θ a zeměpisné délky φ ; říkáme, že HB má $f_1 = 3$ stupně volnosti.

Rovněž geometricky vzato je bod **A** v 3D určen třemi souřadnicemi (např. kartézskými).

- Dva hmotné body pevně spojené (model „činka“); každý z bodů má 3 stupně volnosti, ale musíme odečíst 1 stupeň na vazbu zaručující, že jejich vzdálenost je pevná, tedy činka má $f_2 = 5$ stupňů volnosti.

Geometricky vzato je první bod **A** určen 3 souřadnicemi, druhý bod **B** při pevné vzdálenosti L od **A** musí ležet na povrchu koule se středem v **A** a poloměrem L ; na ní je **B** určen dalšími 2 parametry (např. úhly v polárních souřadnicích).

- Třetí bod přidaný k „čince“ mimo její osu dodá další 3 stupně volnosti, ale také další 2 nezávislé vazby (vzdálenosti od dvou bodů tvořících činku); soustava tří HB s pevnými vzdálenostmi má tedy $f_3 = 6$ stupňů volnosti. Toto platí jen, pokud přidaný bod neleží na podélné ose činky; leží-li na ní, má soustava i nadále jen 2 stupně volnosti.

Geometricky vzato další bod **C**, neleží-li ovšem na spojnici bodů **AB** (na podélné ose činky), má při daných vzdálenostech L_{AC} , L_{BC} k dispozici kružnici se středem na přímce **AB** a ležící v rovině kolmé k přímce **AB** a jeho poloha je tedy určena dalším parametrem, např. úhlem φ v rovině této kružnice.

- Každý další přidaný bod přidává sice 3 stupně volnosti, ale také přidává 3 vazby určující jeho vzdálenosti od tří bodů neležících na přímce. Počet $f_N = 6$ stupňů volnosti tuhé soustavy HM se tedy již nezvětšuje s přibývajících dalšími body.

Geometricky vzato, vzdálenosti L_{AD} , L_{BD} , L_{CD} určují každý další bod **D** dvojznačně (body **D**, **D'**, které se navzájem zrcadlí podle roviny **ABC**). Při zrcadlení však nejde o spojitě proměnný parametr, takže počet stupňů volnosti již neroste.

Tuhé těleso má 6 stupňů volnosti.

Při různých úvahách bývá také vhodné využít toho, že poloha tuhého tělesa je určena (až na zrcadlení), znám-li polohu třech jeho bodů neležících na přímce.

Vztažná soustava S tuhým tělesem můžeme spojit vztažnou soustavu $\mathcal{S}$ s libovolně zvoleným počátkem **O** a libovolně směřovaným pravotočivým trojhranem os x , y , z . Tato vztažná soustava $\mathcal{S}$ se bude pohybovat spolu s tělesem, přičemž jednotlivé body tuhého tělesa budou mít v $\mathcal{S}$ stále stejné, na čase nezávislé souřadnice.

Soustava $\mathcal{S}$ není jediná. Stejně dobře nám poslouží libovolná jiná vztažná soustava $\mathcal{S}'$ obecně s jiným počátkem **O'** a s jinak směřovaným trojhranem os x' , y' , z' , která je v klidu vůči $\mathcal{S}$.

Někdy bude nejnázornější představa tuhého tělesa v jeho skutečném tvaru. Jindy bude stačit trojice jeho bodů (neležících na přímce), ještě jindy představa vztažné kartézské soustavy s tuhým tělesem pevně spojené.

4.1.3 Volný, vázaný a klouzavý vektor

V mechanice hmotného bodu jsme zavedli pojem vektoru jakožto veličiny určené směrem a velikostí (geometrické pojetí) anebo jakožto trojice kartézských složek vektorů, které se při otočení soustavy transformují jistým způsobem (složkové pojetí). Tento vektor budeme na chvíli pro určitost nazývat *volným vektorem*, např. $\mathbf{v}$. Pracujeme s nimi podle pravidel vektorového počtu z matematiky (skládání vektorů, lineární kombinace, součiny skalární a vektorový atd.).

Při studiu hmotného bodu nacházejícího se v jistém místě **A** (s polohovým vektorem $\mathbf{r}^A$) se všechny vektory týkaly tohoto bodu: poloha bodu $\mathbf{r}$, jeho rychlost $\mathbf{v}$, zrychlení $\mathbf{a}$, síla $\mathbf{F}$ působící na tento bod apod., a nebylo tedy potřeba žádné dodatečné upřesnění. Bod **A** jsme jakožto samozřejmost ani nezmiňovali a pracovali jsme, jako se pracuje s volnými vektory.

Při studiu soustavy hmotných bodů však potřebujeme vektorům přiřadit určité *umístění* v prostoru. Potřebujeme rozlišit sílu působící v bodě **A** od síly působící v bodě **B**, rychlost HB nacházejícího se v místě **A** od rychlosti jiného HB v místě **B** apod.. Zavedeme proto několik pojmů:

Vázaný vektor je dvojice {volný vektor; bod}. Značme ji $\{\mathbf{v}; \mathbf{A}\}$, případně stručněji $\mathbf{v}^A$ či $\mathbf{v}_A$.

Umístění vázaného vektoru $\mathbf{v}^A$ je bod **A**. (U síly $\mathbf{F}^A$ se zpravidla nazývá **působíště**).

Vektorová přímka nenulového vázaného vektoru $\mathbf{v}^A$ je přímka procházející bodem **A** a mající směr $\mathbf{v}_0$ vektoru $\mathbf{v}$. (Nebo např.: vektorová přímka je určena body **A**, **B**, kde $\mathbf{r}^B = \mathbf{r}^A + \mathbf{v}_0$. Anebo: vektorová přímka je množina bodů s polohovými vektory $\mathbf{r}^A + \lambda \mathbf{v}_0$ pro $-\infty < \lambda < \infty$.)

Vázané vektory můžeme skládat jen, mají-li totéž umístění.

Při studiu tuhého tělesa se setkáme se situací, kdy je rozumné mezi vázanými vektory zavést ekvivalenci: vázané vektory $\mathbf{F}^A$ a $\mathbf{F}^B$ s různými umístěními téhož volného vektoru si budou ekvivalentní, jestliže posunutí $\mathbf{d} = \mathbf{r}^B - \mathbf{r}^A$ je rovnoběžné s volným vektorem $\mathbf{F}$. Pak vektory $\mathbf{F}^A$ a $\mathbf{F}^B$ budou různými reprezentacemi téhož *klouzavého vektoru*.

Umístění $\mathbf{A}$ klouzavého vektoru $\mathbf{F}^A$ lze posouvat podél vektorové přímky jeho volného vektoru $\mathbf{F}$.

K bližšímu vysvětlení a ukázce techniky práce s klouzavými vektory se dostaneme později, spolu s výkladem, k čemu je dobré tento pojem zavádět.

4.2 Kinematika tuhého tělesa

4.2.1 Přemístění tuhého tělesa

U hmotného bodu bylo nejobecnějším přemístěním posunutí (a to o vektor posunutí $\mathbf{d} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ z počáteční polohy $\mathbf{r}$ do koncové polohy $\mathbf{r}'$). Pro tuhé těleso je možných typů přemístění z polohy S do S' více:

Posunutí o $\mathbf{l}$; při něm se každý hmotný bod tuhého tělesa posune o $\mathbf{l}$, tedy $\mathbf{r}^{A'} = \mathbf{r}^A + \mathbf{l}$;

Otočení kolem bodu $\mathbf{O}$; při něm je bod $\mathbf{O}$ samodružný, tj. $\mathbf{O}' = \mathbf{O}$;

Otočení kolem osy $\mathbf{o}$ o úhel φ ; při něm každý bod $\mathbf{A}$ tělesa ležící na ose $\mathbf{o}$ je samodružný: $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$ a body tělesa ležící mimo osu $\mathbf{o}$ se otočí kolem této osy o týž úhel φ .

Poznámky:

- Bod $\mathbf{O}$ nemusí ležet v tělese.
- Osa $\mathbf{o}$ nemusí procházet tělesem.
- Při otočení se lze omezit na úhly $0 \leq \varphi < 2\pi$.
- Protože body na ose $\mathbf{o}$ při otočení nemění svou polohu, lze připustit, že i tyto body se rovněž kolem osy $\mathbf{o}$ otočily o úhel φ . Pak lze říct, že otočení o úhel φ je společné pro všechny body tělesa.
- Ověřte si, že posunutím ani otočením kolem osy se tuhé těleso „nepoškodí“, tj. že i nadále zůstanou splněny podmínky definující tuhé těleso.

Později dokážeme, že každé otočení kolem bodu $\mathbf{O}$ je ekvivalentní nějakému otočení kolem vhodné osy $\mathbf{o}$ (procházející bodem $\mathbf{O}$) o vhodný úhel φ (věta d'Alembertova).

4.2.2 Kinematický šroub

Posunutí a otočení kolem osy lze spolu kombinovat; dokážeme Chaslesovu větu, že nejobecnější přemístění tuhého tělesa lze jednoznačně popsat *kinematickým šroubem*.

¶ Michael Chasles [šál], 1793–1880, fr. matematik.

Kinematický šroub je přemístění dané osou $\mathbf{o}$, posunutím L a úhlem φ , kdy každý bod TT

- *posuneme o L podél osy $\mathbf{o}$, a poté*
- *otočíme o úhel φ kolem téže osy $\mathbf{o}$.*

Poznámky:

- V tomto speciálním případě je posunutí a otočení komutativní, tj. nezáleží na pořadí, v jakém je vykonáme. Jinak obecně posun a otočení nejsou komutativní.

- Samozřejmě připouštíme i speciální případy, kdy $D = 0$ (samotné otočení) nebo $\varphi = 0$ (samotný posun) nebo obojí (těleso se nepohnulo z místa; směr osy $\mathbf{o}$ je pak libovolný).

Dokažme, že nejobecnější přemístění tuhého tělesa lze popsat kinematickým šroubem.

Vyjděme z představy 3 bodů $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ neležících na přímce a určujících polohu tuhého tělesa (vztažné soustavy $\mathcal{S}$); po přemístění budou mít polohy $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$ (vztažná soustava $\mathcal{S}'$). Je zřejmé pět možností vzájemných poloh odpovídajících si bodů (po event. přejmenování):

- Všechny body $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ zůstaly na svém místě, tj. $\mathbf{A}=\mathbf{A}'$ atd. Pak se zřejmě těleso nepohnulo, kinematický šroub je nulový ($L = 0$, $\varphi = 0$).
- Body $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, zůstaly na svém místě, bod $\mathbf{C}$ nikoli. Pak byl posuv nulový ($L = 0$) a došlo k otočení kolem osy $\mathbf{o}=\mathbf{AB}$; úhel φ je dán otočením bodu $\mathbf{C}$.
- Body $\mathbf{A}$ zůstal na svém místě, body $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ nikoli. Pak byl posuv nulový ($L = 0$) a došlo k otočení kolem bodu $\mathbf{A}$; v odstavci 4.2.3 dokážeme, že ho lze převést na otočení kolem jisté osy $\mathbf{o}$ procházející bodem $\mathbf{A}$.
- Žádný z bodů nezůstal na svém místě a všechny tři se posunuly o týž vektor $\mathbf{d}$; v tom případě jde o posuv celého tělesa o $\mathbf{L}$ bez otočení ($\varphi = 0$).
- Žádný z bodů nezůstal na svém místě a bod $\mathbf{A}$ posunul o jiný vektor než $\mathbf{B}$; pokračujeme dalším textem.

Přejdeme nyní od tří bodů k celé soustavě $\mathcal{S}$. Který bod $\mathbf{D}$ z ní se posunul nejméně ($L^D = \min$), a o jaký vektor $\mathbf{L}^D$? Jsou zřejmě dvě možnosti:

- Existuje bod $\mathbf{D}$, který zůstal na svém místě, tj. $L^D = 0$. Pak jde o otočení kolem bodu $\mathbf{D}$ a pokračujeme odstavcem 4.2.3.
- Existuje bod $\mathbf{D}$, který se posunul o vektor $\mathbf{L}^D \neq \mathbf{0}$ do bodu $\mathbf{D}'$ a žádný jiný bod se neposunul o menší vzdálenost L . Pokračujeme dalším textem.

Tvrdíme, že nejen bod $\mathbf{D}$, ale všechny body přímky $\mathbf{o}=\mathbf{DD}'$ (osy šroubu) se posunuly o tentýž vektor $\mathbf{L}^D$. Tím odpadne možnost, že by minimální posun L nastal pro dva různé směry.

Uvažme bod $\mathbf{E}$ kdekoli na přímce $\mathbf{DD}'$ mimo bod $\mathbf{D}$. Musí si zachovat svou vzdálenost od $\mathbf{D}$, tedy bod $\mathbf{E}'$ leží na povrchu koule s poloměrem DE a se středem v $\mathbf{D}'$. Přitom však nemůže být bodu $\mathbf{E}$ blíže než $|\mathbf{L}^D|$, který měl minimální posun. Leží tedy na povrchu nebo vně koule s poloměrem $|\mathbf{L}^D|$ a se středem v $\mathbf{E}$. Obě koule se však dotýkají v jediném bodě, a to na přímce $\mathbf{DD}'$. To je tedy také jediná možnost, jak se bod $\mathbf{E}$ mohl přemístit: o stejný vektor posunutí $|\mathbf{L}^D|$ jako $\mathbf{D}$.

Uvažme konečně obecný bod $\mathbf{F}$ mimo osu $\mathbf{o}=\mathbf{DD}'$. Bod $\mathbf{F}$ si po přemístění musí zachovat svou vzdálenost od bodů $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ na ose $\mathbf{o}$, tj. bod $\mathbf{F}'$ leží na kružnici se středem na ose $\mathbf{o}$, která je průnikem dvou koulí s poloměry DF , resp. EF a se středy $\mathbf{sD}'$, resp. $\mathbf{E}'$. Na ní zjistíme úhel otočení φ .

Tři body $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ určují jednoznačně polohu celého tuhého tělesa; vyšetřili jsem tím tedy nejobecnější přemístění tuhého tělesa.

4.2.3 Ekvivalence rotace kolem bodu a kolem osy

Věta d'Alembertova tvrdí, že nejobecnější otočení tuhého tělesa kolem pevného bodu $\mathbf{O}=\mathbf{O}'$ je ekvivalentní jistému otočení kolem jisté osy $\mathbf{o}$ (procházející bodem $\mathbf{O}$). Tuto větu nyní dokážeme.

Konstruktivní důkaz Zvolme v $\mathcal{S}$ bod $\mathbf{A}$ v jednotkové vzdálenosti od $\mathbf{O}$ a provedme otočení $\mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S}'$. Jsou zřejmě dvě možnosti:

- $\mathbf{A}=\mathbf{A}'$. V tom případě jde o otáčení kolem osy $\mathbf{OA}$.
- $\mathbf{A} \neq \mathbf{A}'$. V tom případě lze přemístění $\mathbf{A}$ do $\mathbf{A}'$ provést otočením kolem libovolné osy procházející bodem $\mathbf{O}$ a ležící v rovině symetrie $\rho_{AA'}$ úsečky $\mathbf{AA}'$. Pokračujeme dalším textem.

Zvolme v $\mathcal{S}$ bod $\mathbf{B}$ na rovině $\rho_{AA'}$ v jednotkové vzdálenosti od $\mathbf{O}$. Jsou zřejmě opět dvě možnosti:

- $\mathbf{B}=\mathbf{B}'$. V tom případě jde o otáčení kolem osy $\mathbf{OB}$.
- $\mathbf{B}\neq\mathbf{B}'$. V tom případě lze přemístění $\mathbf{B}$ do $\mathbf{B}'$ provést otočením kolem libovolné osy procházející bodem $\mathbf{O}$ a ležící v rovině symetrie $\rho_{BB'}$ úsečky $\mathbf{BB}'$. Průsečnice rovin $\rho_{AA'}$ a $\rho_{BB'}$ pak určuje osu $\mathbf{o}$ takovou, že otočením kolem ní přejdou body $\mathbf{O}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ v body $\mathbf{O}'=\mathbf{O}$, $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$.

Existenční důkaz Každé otočení z původní polohy X do polohy X' kolem počátku je v kartézských souřadnicích popsáno transformací $X' = \mathbf{A}X$, kde $\mathbf{A}$ je ortogonální matice, tj. $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$. Stačí ukázat, že existuje invariantní směr, tedy taková poloha X , která se transformací zachovává: $X' = \mathbf{A}X = X$.

Z algebry je známo, že homogenní rovnice $\mathbf{A}X = X$ má netriviální řešení tehdy, když je nulový determinant $\|\mathbf{A} - \mathbf{E}\|$, kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice. Matice $\mathbf{A}$ je ortogonální, takže

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A} - \mathbf{E}\| &= \|\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{A}^T\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{E} - \mathbf{A}^T)\| = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{E} - \mathbf{A}^T\| = \\ &= 1 \cdot \|(\mathbf{E} - \mathbf{A})^T\| = -\|(\mathbf{A} - \mathbf{E})^T\| = -\|\mathbf{A} - \mathbf{E}\| ,\end{aligned}$$

takže nutně $\|\mathbf{A} - \mathbf{E}\| = 0$.

Determinant je tedy nulový, a proto homogenní rovnice $\mathbf{A}X = X$ má netriviální řešení X udávající osu rotace $\mathbf{o}$ ekvivalentní uvažovanému otočení z původní polohy X do polohy X' kolem počátku.

4.3 Dynamika tuhého tělesa. Silová dvojice

4.3.1 Klouzavý vektor

Zatím jsme brali jako fakt, že dva body $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ tuhého tělesa zachovávají stále stejnou vzdálenost; je to jednoduchý případ *vazby*, tedy omezení pohybu (angl. constrain) kladeného na mechanickou soustavu; vazba se probírá podrobně v analytické mechanice. Vektorová mechanika vycházející z Newtonových pohybových rovnic nemá prostředek, jak přímo pracovat s vazbou; zná však pojem síly. Nahradíme proto vazbu *vazbovou silou*, která bude působit mezi body $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ a bude vždy právě tak velká, aby kompenzovala všechny možné ostatní síly, které by mohly vzdálenost těchto bodů změnit.

Uvažme tyto okolnosti pro vazbové síly:

- vazbové síly $\mathbf{F}^{BA}$ (působící od tělesa $\mathbf{A}$ na $\mathbf{B}$) a $\mathbf{F}^{AB}$ (působící od tělesa $\mathbf{B}$ na $\mathbf{A}$) musejí splňovat zákon akce a reakce, tedy $\mathbf{F}^{BA} = -\mathbf{F}^{AB}$;
- mají-li vazbové síly pouze zabránit změně vzdáleností obou bodů $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, musejí být centrální, tj. musejí mít směry podél relativního polohového vektoru $\mathbf{R}^{AB}$, aby podle okolností tiskly body $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ k sobě či od sebe.

Z toho ovšem plyne, že k síle $\mathbf{F}^A$ působící na tuhé těleso v libovolném bodě můžeme kdykoli přičíst dvojici dalších (vazbových) sil podél vektorové přímky tohoto vektoru; první z nich $\mathbf{F}^{BA}$ se právě vyruší s působící silou $\mathbf{F}^A$ a druhá $\mathbf{F}^{AB}$ představuje sílu, která by vznikla přesunutím původní síly $\mathbf{F}^A$ do jiného bodu $\mathbf{B}$ ležícího na vektorové přímce $\mathbf{F}^A$. Touto úvahou docházíme k pojmu *klouzavého vektoru* $\mathbf{F}^A$, tedy vlastně třídy navzájem ekvivalentních vektorů (v praxi uvažujeme vhodně zvoleného reprezentanta této třídy), odpovídajících témuž volnému vektoru $\mathbf{F}$ a s působištěm umístěným libovolně (vhodně) na vektorové přímce, tj. na přímce procházející bodem $\mathbf{A}$ a mající směr vektoru $\mathbf{F}$.

4.3.2 Skládání dvou klouzavých vektorů. Silová dvojice

Základní operace s klouzavými vektory (jejich skládání a vznik silové dvojice) jste poznali na střední škole. Víte, že skládáním klouzavých vektorů můžeme dostat buď opět klouzavý vektor, nebo volný vektor zcela jiného typu, tzv. silovou dvojici. Zopakujeme a doplníme nyní skládání vektorů; v závěru uvedeme jinou, univerzální cestu.

Při skládání dvou klouzavých vektorů $\mathbf{F}^A$, $\mathbf{G}^B$ mohou nastat tyto situace:

1. Vektory jsou různoběžné (tj. jejich neorientované směry jsou různé a vektory leží v téže rovině – volné vektory $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{r}^B - \mathbf{r}^A$ jsou komplanární);
2. Vektory jsou rovnoběžné, přičemž pro volné vektory platí $\mathbf{F} \neq -\mathbf{G}$;
3. Vektory jsou rovnoběžné, přičemž pro volné vektory platí $\mathbf{F} = -\mathbf{G}$; tento případ se nazývá *silová dvojice*;
4. Vektory jsou mimoběžné (tj. neleží v téže rovině; to se na SŠ nejspíš nebralo).

Rozeberme tyto případy podrobněji:

1. Různoběžné vektory $\mathbf{F}^A$, $\mathbf{G}^B$

Různoběžné vektory můžeme posunout až do průsečíku jejich vektorových přímek. Tam je sečteme jako vázané vektory s tímž působištěm. Nakonec můžeme výsledek posunout podél jeho vektorové přímky do oblasti, která nás zajímá.

Praktická komplikace nastává při rýsování, protínají-li se vektorové přímky mimo papír. Existují ovšem obratné konstrukce, jak si počít i v tomto případě; protože my pravděpodobně nebudeme tento případ muset řešit, spokojíme se s univerzálním řešením uvedeným později.

2. Rovnoběžné vektory $\mathbf{F}^A$, $\mathbf{G}^B$, kde $\mathbf{F} \neq -\mathbf{G}$

K vektorům doplníme dvojici stejně velkých a opačných sil $\pm \mathbf{H}$ podél spojnice bodů $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$. Přičteme-li tyto síly k původním, dostaneme dvojici sil, které jsou různoběžné, čímž jsme úlohu převedli na předchozí případ.

3. Silová dvojice: nesouhlasně rovnoběžné vektory $\mathbf{F}^A$, $\mathbf{G}^B$, kde $\mathbf{F} = -\mathbf{G}$

Tento případ nelze redukovat na jeden klouzavý vektor předchozí metodou, protože i po přičtení pomocné dvojice sil $\pm \mathbf{H}$ vznikne táž situace s nesouhlasně rovnoběžnými vektory téže velikosti. Této soustavě říkáme *silová dvojice* a přisoudíme jí volný vektor zvaný moment dvojice $\mathbf{L} = \mathbf{r}^{AB} \times \mathbf{F}^A$, kde $\mathbf{r}^{AB}$ je relativní polohový vektor od bodu $\mathbf{B}$ k bodu $\mathbf{A}$. Značíme-li ρ rovinu určenou vektory $\mathbf{F}^A$, $\mathbf{G}^B$, pak $\mathbf{L}$ je k rovině ρ kolmý.

Ověřte si, že silová dvojice má opravdu charakter volného vektoru. Mějme v rovině ρ nenulovou silovou dvojici $\mathbf{F}^A$, $-\mathbf{F}^B$. Pak lze vytvořit ekvivalentní silovou dvojici $\mathbf{G}^C$, $-\mathbf{G}^D$ pro bod $\mathbf{C}$ zadaný kdekoli v prostoru a nenulový vektor $\mathbf{G}$ zadaný libovolně v rovině ρ' rovnoběžné s rovinou ρ . Bod $\mathbf{D}$ leží v rovině ρ' a je tím již určen jednoznačně až na posunutí ve směru $\mathbf{F}$ (bez ohledu na orientaci).

¶ Rozlišujeme termín *silová dvojice* (výše definovaná) a sousloví *dvojice sil* (dvě síly libovolně zvolené, stejně jako trojice sil, čtveřice sil, obecně n -tice sil).

4. Mimoběžné vektory $\mathbf{F}^A$, $\mathbf{G}^B$

Tuto kombinaci nemůžeme uvedenou cestou zjednodušit. Můžeme ji však převést na některý z tvarů

- (a) klouzavý vektor s libovolně předem zadaným umístěním + silová dvojice;
- (b) dva klouzavé vektory, jeden z nich s libovolně předem zadaným umístěním;
- (c) *dynamický šroub* (klouzavý vektor + silová dvojice s momentem v tomtéž směru, jaký má klouzavý vektor).

Konkrétní převedení na dynamický šroub popíšeme v dalším odstavci, a to zcela obecně, pro libovolný počet klouzavých vektorů i silových dvojic. Převod mezi dynamickým šroubem a ostatními dvěma uvedenými kombinacemi jistě zvládne čtenář samostatně.

4.3.3 Skládání libovolného počtu klouzavých vektorů a silových dvojic

Uvažujme soustavu N_1 klouzavých vektorů a N_2 silových dvojic. Složíme ji na *jediný dynamický šroub* následujícím postupem:

1. Zvolíme libovolný bod $\mathbf{O}$.
2. Klouzavý vektor $\mathbf{F}^A$ přesuneme rovnoběžně do bodu $\mathbf{O}$ tím, že pro něj doplníme do bodu $\mathbf{O}$ jednak sílu $\mathbf{G}^O = \mathbf{F}^O$, jednak sílu přesně opačnou: $\mathbf{H}^O = -\mathbf{F}^O$. Síly $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ mají totéž působíště, lze je tedy sečíst, a vyjde nulový vektor; jeho doplněním jsme jistě soustavu tvořenou jediným klouzavým vektorem $\mathbf{F}^A$ nezměnili.
3. Nyní však interpretujeme sílu $\mathbf{G}^O$ jako „přesunutou“ sílu $\mathbf{F}^O$, a dvojici $\mathbf{F}^O$, $\mathbf{H}^O$ jako dvojici sil popsanou volným vektorem – jejím momentem $\mathbf{M}$.
4. Tím je klouzavý vektor v bodě $\mathbf{A}$ nahrazen klouzavým vektorem v bodě $\mathbf{O}$ a silovou dvojicí $\mathbf{F}^O$, $\mathbf{H}^O$.
5. Toto učiníme pro všech N_1 klouzavých vektorů v různých bodech prostoru. Tím dostáváme soustavu N_1 klouzavých vektorů umístěných v bodě $\mathbf{O}$ a $N_1 + N_2$ silových dvojic (ty jsou, jak víme, popsány volným vektorem svého momentu).
6. Sečteme všech N_1 klouzavých vektorů. Výsledkem je jediný klouzavý vektor v $\mathbf{O}$.
7. Sečteme všech $N_1 + N_2$ momentů silových dvojic. Výsledkem je jediná silová dvojice s momentem $\mathbf{M}$ (volný vektor).
8. Nyní je celá soustava převedena na jediný klouzavý vektor $\mathbf{G}^O$ a jedinou silovou dvojici s momentem $\mathbf{M}$.
9. Převod na dynamický šroub: Moment $\mathbf{M}$ silové dvojice rozdělíme na složku $\mathbf{M}_{\parallel}$ rovnoběžnou s $\mathbf{G}$ a na složku $\mathbf{M}_{\perp}$ kolmou k $\mathbf{G}$.
10. Složku $\mathbf{M}_{\perp}$ sečteme s klouzavým vektorem $\mathbf{G}^O$; vektor se tím rovnoběžně posune jinak, pryč z bodu $\mathbf{O}$. Zbývá tedy tento posunutý klouzavý vektor, a k němu dvojice $\mathbf{G}$ s momentem stejného směru, jaký má onen posunutý klouzavý vektor — vytvořili jsme tedy dynamický šroub.
11. Převod na dva klouzavé vektory: vytvoříme dvě síly $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ odpovídající výsledné silové dvojici tak, aby $\mathbf{H}_1$ měla působíště v bodě $\mathbf{O}$. Tu sečteme s výsledným vektorem $\mathbf{G}^O$ a dostaneme tak první klouzavý vektor; má umístění v bodě $\mathbf{O}$. Druhým klouzavým vektorem je $\mathbf{H}_2$, „zbylý“ ze silové dvojice.