Hudba pohledem fyziky a fyziologie

TEORIE LADĚNÍ

Výklad hudebních ladění

(verze 4.2 a další)

v. 4.2i2

Kontakt: `jan.obdrzalek@mff.cuni.cz`

Spuštění programu a hlavní menu

Vložíte-li CD do počítače pod systémem Windows, spustí se automaticky. Po znělce naší Laboratoře a úvodní stránce tohoto programu máte hlavní nabídku. Z ní můžete zvolit:

- výklad Teorie hudebních ladění (velká kniha vlevo nahoře)
- zahrát si na klavír jednotlivé tóny nebo i akordy (klavír pod knihou)
- poslech intervalů různé velikosti udané v centech od „komorního a“ (vpravo nahoře)
- populární výklad logaritmů a počítání s decibely („VÝKLAD lg, dB“ vpravo střed)
- poslech oktávy dělené na různý počet stejných intervalů (běžné temperované stupnice jsou: 6 – celotónová, 12 – půltónová, 24 – čtvrttónová, 36 – šestinotónová)
- poslech tří skladeb ve třech různých laděních a s totožným přednesem (dole)
- konec programu (tlačítko KONEC).

Při výkladu resp. při klavíru se změní obrazovka a probíhá výukový program, resp. objeví se klavír. Do hlavní nabídky se vrátíte tlačítkem VEN. Nezapomeňte si na výklad či na klavír rozšířit obraz přes celou obrazovku kliknutím na prostřední knoflík vpravo nahoře na rámečku __ X . Využijete tak celé plochy a máte dobře přístupné všechny ovládací prvky, umožňující vám pauzu (zastavení a následující pokračování) a přesuny v pořadu – jednak po celých částech tam i zpět, jednak táhlem v rámci jedné části, jednak přímo skokem na příslušnou kapitolu či odstavec.

Teorie hudebních ladění

Obsahuje vlastní výklad. Z pravé části obrazovky lze ovládat program myší:

- najetím na **MENU** se objeví názvy kapitol (sekcí); kliknutím na název lze spustit příslušnou sekci; menu opět zmizí při pohybu myši doleva ke středu obrazovky
- ► skok na další sekci (s tím např. přeskočíte nepříjemné testy …)
- ◄◄ skok na předchozí sekci
- ▌▌ pauza/chod
- levé (delší) táhlo posouvá výklad v rámci sekce
- pravé táhlo určuje hlasitost
- okénka zobrazují technická data – čís. sekce (0 – 161) a čís. snímku (rychlost 24/s)

Výklad lg, dB

Velice populární výklad o tom, co jsou to logaritmy (a jak se na ně přišlo) a jak se pracuje s decibely. Věříme, že nám jeho jednoduchost jistě prominou všichni maturanti (a zejména technici), a přijmou ho přiměřeně shovívavě. Pokud by vás v testech na logaritmy obtěžovala nutnost práce s myší (střídavě klikat na políčko, kam se píší číselné hodnoty a na tlačítku vstupu dat - nelze užít prostě ENTER!), přeskočte je ovládacím tlačítkem vlevo dole. Ovládání je stejné jako výše u Teorie hudebních ladění.

Klavír

Jednoduchý nástroj ke hraní jednotlivých tónů nebo akordů (přepínač „tón/akord“). Pravý pedál má svou obvyklou funkci, tj. prodlužuje doznívání tónu. Při stylu „akord“ se „ručička“ změní v „ruku“, klávesy se označují barvou a s každou novou znějí znovu i předchozí. Pro nový akord je potřeba dosavadní tóny „odbarvit“ tlačítkem „odznač“. Jména stisknutých tónů se uvádějí vlevo nahoře. Tento klavír je v temperovaném ladění.

Skladby

Skladby pro tento účel laskavě nahrál PhDr. Věroslav Němec. V přiložených ukázkách (*.mp3) si můžete poslechnout:

J. S. Bach: Preludium C dur z 1. dílu Dobře temperovaného klavíru
G. F. Händel: Fughetta C dur (expozice)
W. A. Mozart: Sonáta C dur (Sonata facile), 2. věta

Byly nahrány jednou a zaznamenány systémem MIDI; mají tedy přesně stejný přednes, agogiku, rychlost apod. Liší se však tím, že klávesám byly podloženy různě naladěné tóny:

temperované ladění
přirozené ladění Aristoxenovo v C-dur
Aristoxenovo ve Fis-dur (tak by také zněla na aristoxenovsky v C dur naladěném klavíru skladba složená a hraná v Ges dus, třeba Dvořákova Humoreska). I lidé nemající právě vynikající sluch dávají přednost temperovanému ladění.

Dělení oktávy

Stupnice vzniklé rovnoměrným dělením oktávy na různý počet dílů: 5, 6 (temperované celé tóny), 7, 8, 9, 10, 11, 12 (temperované půltóny), 24 (temperované čtvrttóny) a 36 (temperované šestinotóny, s akcentováním diatonické stupnice).

Dělení na 7 dílů je zajímavé tím, že co do počtu tónů odpovídá diatonické (durové) stupnici a formálně ji proto nejvíce připomíná. Působí ovšem značně rozladěně.

Mikroladění

„Komorní a“ se zde střídá s tónem lišícím se od něj o uvedený počet centů, a to směrem nahoru ♪♪♪ nebo dolů ♪♪♪. Počty centů tvoří geometrické řady tvaru 2^n a $3*2^n$:

0 (týž tón), 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, 128.

Tóny jsou navázány hladce.

Jistě si každý rád najde své hranice – jednak kolik centů by při záměně tónů poznal (ale celkem toleroval) a jednak kolik centů by mu při záměně tónů už vadilo (jakožto rozladěné).

Pro kvalitnější poslech je vhodné přehrát nejprve celý CD do paměti a spouštět pak program z paměti. Spouští se 1predehra.exe nebo 1predehra.html.

Hezkou zábavu a poučení!

Přehledový výklad

Pro pohodlí posluchače a rozšíření, příp. ucelení obsahu následuje stručný výklad problematiky. Rozšiřující partie neuvedené na CD jsou psány petitem a označeny ░ .

Základní pojmy

Tón má z hlediska hudby čtyři základní vlastnosti: výšku, hlasitost, dobu trvání a barvu. Z hlediska fyzikálního je tón ***zvuk***, charakterizovaný *pravidelným* kmitáním – na rozdíl od ***hluku***.

░ Slovo „tón“ se užívá i ve smyslu „interval“, např. „celý tón“ a „půltón“. Dokonce se příležitostně užívá i pro oba tyto intervaly společně, tedy např. jako vzdálenost mezi zvuky sousedních bílých kláves klavíru.

Jakkoliv je definice tónu značně volná (co je a co není pravidelnost?), je přesto jednak intuitivně zřejmá a přijatelná, jednak postačuje pro další výklad. Nebudeme se proto zabývat tím, že se v hudbě používají i hluky (např. úder na buben nebo činely, řehtačka) resp. zvuky mající charakter hluku i tónu současně (např. úder na tympán).

Výška tónu je ve velmi širokých mezích určena jeho kmitočtem (frekvencí) f, tj. počtem kmitů, které proběhnou za 1 sekundu. Doba T jednoho kmitu se nazývá ***perioda*** a je převrácenou hodnotou kmitočtu: $f = 1 / T$.

Při vnímání výšky tónu se uplatňuje Weberův – Fechnerův zákon:

Roste-li ***podnět*** řadou ***geometrickou***, roste ***pocit*** řadou ***aritmetickou***.

Jinak řečeno: když se podněty spolu násobí (dělí), pocity se sčítají (odečítají). Ještě jinak řečeno: pocity vnímáme logaritmicky.

Sluchem vnímáme jako zvuk kmitočty zhruba v mezích 20 Hz až 20 kHz, tedy v rozmezí 3 řádů ($1 : 10^3$).

Hlasitost je určena amplitudou kmitání (např. *akustického tlaku*, tj. odchylky okamžitého tlaku vzduchu od jeho střední hodnoty). Zde nám Weberův – Fechnerův zákon umožňuje vnímat obrovskou škálu hlasitostí, od akustického tlaku cca od 10^{-5} Pa do 10^{2} Pa.

░ Vyjádřeno energiemi (čtverec tlaku), jde o rozmezí 14 řádů. To je jako poměr např. mezi výškou písmene tohoto textu a vzdáleností Země – Slunce.

Doba trvání tónu je i bez výkladu jasná.

Při podrobnějším studiu ovšem budeme rozlišovat nejen „tón zní“ vs. „tón nezní“, ale popíšeme *obalovou křivku* tónu: náběh, trvání i doznívání tónu.

Barva tónu je určena jednak jeho složením (frekvenčním rozkladem, Fourierovou analýzou), jednak tvarem obalové křivky.

Připomeňme z matematiky, že každý periodický kmit o kmitočtu f popisující tlak vzduchu můžeme vytvořit jako součet sinusových kmitů s kmitočty rovnými celistvým násobkům f, tzv. (vyšších) ***harmonických***; to je v matematice obsahem Fourierovy syntézy. Každý z těchto dílčích kmitů má jistou ***amplitudu*** (danou rozkmitem vlny) a jistou ***fázi*** (danou volbou počátku, tj. okamžiku, kdy sinusovka prochází nulovou hodnotou směrem nahoru). Ukazuje se, že fáze harmonických, třebaže výrazně ovlivňují tvar výsledného kmitu, nemají prakticky žádný vliv na barvu. Jinými slovy, snadno lze (fázovými posuvy) vytvořit kmity vypadající naprosto rozdílně, ale znějící nám úplně stejně.

░ „Přirozeným“ zánikem zvuku je exponenciální doznívání. Nárůst hlasitosti (např. pustíme-li nahrávku pozpátku) vytváří dojem nástrojů typu harmonia, prudší odeznívání zase dojem „useknutí“ zvuku.

Interval

Dva tóny vytvářejí hudební ***interval***. Interval nazýváme ***melodický***, resp. ***harmonický,*** znějí-li oba tóny časově po sobě, resp. současně.

░ Trochu schematicky: harmonické vnímání hudby (vícehlas) můžeme brát jako evropský přínos k hudbě. Africké kultury preferují rytmus, asijské barvu zvuku.

Intervaly mají svá historická jména: prima, sekunda, … oktáva, … . Předpokládáme, že je čtenář zná ze základní hudební výchovy. Ve výkladu jsou zavedeny tak, že předpokládáme jako známou klávesnici klavíru: jména intervalů jsou pak latinskými řadovými číslovkami počtu bílých kláves, včetně obou kláves interval vymezujících.

░ Oktávou tedy rozumíme vzdálenost zvuku první a osmé bílé klávesy, což je vlastně 7 kroků – „tónů“ ve smyslu poznámky na začátku tohoto textu. Proto dvě oktávy – kvintdecima – jsou tvořeny první a patnáctou, nikoli šestnáctou klávesou. (Je to stejný důvod, proč 20. století zahrnovalo léta 19xx.)

░ Dále, i zde je v běžném úzu víceznačnost, občas matoucí. My rozumíme oktávou interval, tedy „tónovou vzdálenost“ mezi dvěma tóny. Jindy se však oktávou rozumí celý soubor tónů mezi intervalem oktávy, např. v označení „jednočárkovaná oktáva“.

Tóny mají rovněž historická jména; u nás (a v německé kulturní oblasti) se bílé klávesy nazývají c, d, e, f, g, a, h. Jejich zvýšením dostaneme cis, dis, …, ais, his, snížením dostaneme ces, des, es, …, as, hes. Tón „hes“ se z historických důvodů nazývá zpravidla „b“, dvakrát snížený však „heses“. Přesný popis, jak se zvyšuje nebo snižuje, udává právě teorie ladění.

Na klavíru je his totožné s c, cis s des, ces s h apod. Toto nazýváme ***enharmonickou záměnou.***

Ladění znamená výběr vhodných tónů – takových, aby jejich současné či postupné znění bylo našemu sluchu příjemné. (Samozřejmě za předpokladu, že každý z tónů sám o sobě má přijatelnou barvu a hlasitost a je tedy příjemný.)

░ Jak je v jazyce obvyklé, užívá se slovo „ladění“ ve více příbuzných významech, např. „činnost vedoucí k vyladěnému nástroji“ apod.

░ Dále, libost a nelibost (konsonance a disonance) je samozřejmě jednak subjektivní, jednak je ovlivněna i dobovými zvyklostmi. Zde uvažujeme období, dejme tomu, od klasické polyfonie do 19. století včetně.

Interval oktávy je našemu sluchu natolik přijatelný a běžný, že ho často ani nerozlišujeme od primy („tentýž tón“). Běžně se říká, že chlapci a muži zpívali „unisono“ (jednohlasně), třebaže fakticky zpívali v intervalu oktávy. Z toho nám vyplývá, že oktáva by měla být zahrnuta do *každého* ladění.

Oktáva je však interval značně velký a bylo by ho proto záhodno rozdělit na menší: „osídlit zvukový prostor hustěji“.

░ Již zde připomeňme jistou jemnost ve vyjadřování, co se týče „rozlišení“ intervalů. Tóny s velice blízkými kmitočty, řekněme, 2000 Hz a 2000,5 Hz, nám budou znít jako stejně vysoké a bez pomůcek (využití rázů, měřiče …) je nerozlišíme od sebe vůbec. Pokud by však např. zpěvačka „držela“ tón příliš přesně, mohl by se nám zdát její hlas plochý; zpívá proto s jemným vibratem, tj. mění výšku tónu. Tuto změnu – tento interval – si samozřejmě uvědomujeme, ale nevadí nám, resp. jsme ochotni jej tolerovat (chcete-li, bereme ho jako primu).

Způsoby ladění (kromě temperovaného), tedy výběru menších intervalů vyplňujících oktávu, mají fyzikální základ. Vycházejí z představy, že harmonické, vytvářející barvu zvuku, jsou se základním tónem jaksi geneticky spjaty (aspoň ty nízké), a proto znějí příjemně.

Pythagoras, který tuto souvislost krásy a matematického řádu čísel objevil, byl tím tak uchvácen, že vytvořil celou filosofickou školu založenou na představě řádu a čísla coby podstaty věcí. Neužíval samozřejmě pojmu kmitočet ani perioda, ale měřil přímo fyzikální veličiny s kmitočtem číselně velmi jednoduše související: délku struny či píšťaly, napětí struny apod.

░ Idea malých celých čísel neplatí např. v grafické estetice: „zlatý řez“ není 1:2 či podobně, ale poměr 1 : (√5-1)/2, který je naopak „nejvíce iracionální“ (z teorie řetězových zlomků).

Ovšem tvrdý odkaz na fyziku a matematiku by byl demagogický: v uchu nemáme struny (předpokládané např. Helmholtzem), které by rezonovaly. Tóny vnímáme v Cortiho orgánu, kde chvějící se kapalina rozechvívá stočenou membránu v hlemýždi.

První harmonickou (např. od c^1) je tón téže výšky (kmitočty 1:1). **Druhou** harmonickou je tón o oktávu vyšší, c^2 (kmitočty 1:2 při oktávě nahoru, resp. 2:1 při oktávě dolů). Podle Weberova – Fechnerova zákona

Skládání intervalů (jejich sčítání) se projeví jako ***násobení kmitočtových poměrů***

Další oktávy budou mít proto kmitočty vyšší čtyřikrát, 8*, 16* atd., obecně 2^n *.

Třetí harmonická (g^2) s druhou (c^2) tvoří kvintu; poměry kmitočtů jsou tedy 3:2. Tento interval pokládal za příjemný už Pythagoras. **Čtvrtá** harmonická (c^3) dává druhou oktávu (4 = 2*2), tedy nic nového. **Pátá** harmonická (e^3) dává se čtvrtou (c^3) velkou tercii (5:4), kterou vzal jako libozvuk na milost až evropský středověk; s ní pak logicky i malou tercii s poměrem kmitočtů 6:5 jako kombinaci „kvinta nahoru – velká tercie dolů“: 6:5 = 3:2 * 4:5. (Nezapomínejme, že sčítání intervalů se projeví jako násobení jim odpovídajících poměrů kmitočtů!) **Šestá** harmonická (g^3) dává se základním tónem harmonickou (c^1) kvintu a dvě oktávy (6:1 = 3:2 * 2:1 * 2:1), tedy opět nic nového. Dál pokračovat nebudeme.

Samozřejmě byly později i pokusy zapojit do teorie i sedmou harmonickou (zvanou občas i), vytvářející se čtvrtou celkem libozvučnou „čistou přirozenou septimu 7:4=1,25, o něco menší než je diatonická malá septima 9:5 =1,8, tvořená kvintou a malou tercií: 3:2 * 6:5 = 9:5. Jí se však zde zabývat nebudeme.

Intervaly tvořené přesně harmonickými tóny nazýváme ***čisté*** (prima, oktáva, kvinta, kvarta).

Souzvuk označuje současné znění tří nebo více tónů: dvojzvuk, trojzvuk atd.

Akord je označení pro trojzvuk nebo vícezvuk.

Shrnutí

Výška tónu je popsána jeho kmitočtem.

Harmonické k danému tónu o kmitočtu *f* mají kmitočty *f*, 2*f*, 3*f*, 4*f* … Nízké harmonické znějí spolu příjemně.

Interval mezi dvěma tóny je popsán poměrem (podílem) kmitočtů těchto tónů.

Skládání intervalů (sčítání, např. kvinta + kvinta = nona) se zobrazí jako *násobení* odpovídajících poměrů kmitočtů (např. 3:2 * 3:2 = 9:4).

Souzvuk je současné znění dvou nebo více tónů.

Akord je současné znění tří nebo více tónů.

Tónina. Tonální hudba

Tonální hudba vychází z pojmu ***tóniny*** (např. C dur, f moll). Je to jistý *souhrn* tónů (který uspořádán podle výšky dává příslušnou ***stupnici***), doplněný *vztahy* mezi těmito tóny.

Diatónická stupnice. Durová tónina

Nyní vytvoříme tóninu a stupnici C dur. Vyjděme z tónu c s kmitočtem 132 Hz. Jeho 4., 5. a 6. harmonická vytvářejí libě znějící souzvuk – durový kvintakord, C dur. Tóny c^2, e^2, g^2 tvořící tento kvintakord mají tedy kmitočty v poměru 4:5:6, konkrétně

c^2: 4 * 132 Hz = 528 Hz,

e^2: 5 * 132 Hz = 660 Hz,

g^2: 6 * 132 Hz = 792 Hz.

Tento akord nazveme v takto vytvářené tónině C dur ***tónický.***

Vytvoříme další dva durové kvintakordy, a to ***dominantní*** nad tónickým, který tedy bude začínat tónem g, a ***subdominantní*** pod tónickým, který tedy bude končit tónem c. Poměry kmitočtů musí ovšem být i nadále 4:5:6; tím jsou kmitočty tónů dominantního i subdominantního kvintakordu jednoznačně určeny.

Dominantní kvintakord:

g^2: 4 * 792/4 Hz = 792 Hz,

h^2: 5 * 792/4 Hz = 990 Hz,

d^3: 6 * 792/4 Hz = 1188 Hz.

Subdominantní kvintakord:

f^1: 4 * 528/6 Hz = 352 Hz,

a^1: 5 * 528/6 Hz = 440 Hz,

c^2: 6 * 528/6 Hz = 528 Hz.

Nyní přeneseme tóny, které neleží ve dvojčárkované oktávě: f^1 a a^1 o oktávu výše, d^3 naopak o oktávu níže. Tóny, které po uspořádání dostaneme, tvoří ***diatonickou stupnici*** – durovou stupnici C neboli C dur. Kmitočty těchto tónů mají absolutní velikosti, relativní velikosti a vzájemné poměry podle této tabulky:

c^2	d^2	e^2	f^2	g^2	a^2	h^2	c^3
528	594	660	704	792	880	990	1056
24	27	30	32	36	40	45	48
9 : 8	10: 9	16: 15	9 : 8	10: 9	9 : 8	16: 15	.

Oktáva c^2-c^3 je takto *nerovnoměrně* rozdělena na menší intervaly. V hudební teorii se nazývají intervaly mezi sousedními tóny takto:

velký celý tón	c-d; f-g; a-h	9:8 = 1,125
malý celý tón	d-e; g-a	10:9 = 1,111…
(diatonický) půltón	e-f; h-c	16:15 = 1,0666…

Víme-li, že akordy tóniky, dominanty a subdominanty pokrývají celou diatonickou stupnici, snadno pochopíme, proč nám tyto akordy postačují pro harmonizaci naprosté většiny jednoduchých melodií, např. českých národních písní (jsou-li v dur).

Povšimněme si, že oba celé tóny jsou si celkem blízké: jejich poměr je 81:80 = 1,0125 a nazývá se ***syntonické komma***. Naproti tomu diatonický půltón je opravdu zhruba polovinou celých tónů (tj. odmocninou podílu kmitočtů; proč odmocninou?)

░ **Odhady:** Stručně řečeno: Jestliže intervaly sčítáme (odčítáme, násobíme, dělíme), pak poměry kmitočtů násobíme (dělíme, umocňujeme, odmocňujeme). To je dosti nepohodlné a nenázorné. Pokud jsou však tyto poměry blízké jedničce (tj. pokud jde o malé intervaly), můžeme užít přiblížení známého z matematiky:

░ Mějme čísla $A = 1 + a$, $B = 1 + b$, kde a, b jsou malá. Můžeme-li zanedbat součiny ab apod., pak platí

$$A*B = (1 + a) * (1 + b) \approx 1 + a + b \qquad 1 / A \approx 1 - a$$
$$A / B = (1 + a) * (1 - b) \approx 1 + a - b \qquad \sqrt{A} \approx 1 + \tfrac{1}{2} a; \quad \sqrt[n]{A} \approx 1 + a / n$$

░ Přesvědčte se, že chyba je přijatelná – dokonce i při odhadu velikosti 1 centu jakožto 1200-té odmocniny ze dvou (1+1), třebaže „ta druhá jednička“ rozhodně není malá. Přesná hodnota je $\sqrt[1200]{2} = 1{,}000577$, odhad dává

$$\sqrt[1200]{2} \approx 1 + 1 / 1200 = 1{,}000833\ldots$$

Chromatické stupnice. Ladění

Z tónů diatonické stupnice lze vytvořit libě znějící kvintakordy: jednak ***durové*** (c-e-g, f-a-c, g-h-d) tvořené velkou tercií a nad ní malou tercií (poměr kmitočtů 4:5:6), jednak ***mollové*** s malou tercií a nad ní velkou (poměr kmitočtů je 1/6 : 1/5 : 1/4; ověřte si to!), totiž a-c-e a e-g-h. Od nich se jen nepatrně liší kvintakord d-f-a, kde tercie d-f je o něco menší (o syntonické komma 81:80) než čistá malá tercie, má totiž poměr kmitočtů 32:27 = 96:81 místo očekávaných 6:5 = 96:80. (Ověřte si to!)

Zbývající kvintakordy – ***zmenšený*** ze dvou malých tercií (h-d-f) a ***zvětšený*** ze dvou velkých tercií, např. c-e-gis – znějí výrazně méně uspokojivě.

Oktáva je ale takto rozdělena nerovnoměrně, oba celé tóny jsou zhruba dvakrát větší než půltón. Různá ladění proto zpestřují „černobílou“ diatónickou stupnici vložením dalších tónů – vytvořením ***chromatické*** (tj. barevné) stupnice.

Vycházíme z toho, že durový i mollový akord nám znějí libě. Chceme proto rozdělit oktávu tak, aby zavedení nových „kláves“ umožnilo co nejvíce durových a mollových akordů, ne-li zcela přesných, tedy aspoň přibližných (jako zmíněný d-f-a). Přitom ovšem kláves nemůže být nepřehledně mnoho. Užívají se následující směry:

1. ***Temperovaná*** ladění mechanicky dělí oktávu či jiný interval rovnoměrně tak, aby čisté intervaly byly co nejlépe zachovány.

2. ***Pythagorovo*** ladění používá jedině čistou kvintu a čistou oktávu, nikoli čistou tercii. Postupným skládáním kvint směrem nahoru či dolů – tzv. pythagorejský kruh – se dostávají (s případnými oktávovými skoky dolů nebo nahoru) nové tóny.

3. ***Přirozená*** ladění zachovávají diatónickou stupnici založenou na čisté oktávě, kvintě a tercii (malé i velké). Podle způsobu, jak se snižují či zvyšují tóny, se rozlišuje ladění ***Aristoxenovo*** (založené na primě), ***Delezennovo*** (na sekundě) a ***Ptolemaiovo*** (na tercii).

Temperovaná ladění

Rovnoměrně temperované ladění (kterým se např. ladí varhany) dělí oktávu na 12 stejných, tzv. ***temperovaných půltónů***. Jejich velikost je tedy $p = \sqrt[12]{2} = 1{,}059\ldots$, aby jich dvanáct složeno – tedy p^{12} – dalo právě oktávu, 2:1. Číslo 12 je zvoleno proto, že umožňuje dobře přiblížit kvintu: 7 temperovaných půltónů dává poměr $p^7 = \sqrt[12]{2^7} = 1{,}4983\ \ldots$, tedy dosti přesně poměr 1,5 charakterizující čistou kvintu. Obě tercie jsou přiblíženy sice hůře, ale stále přijatelně: velká tercie se 4 půltóny vychází o něco větší, totiž $p^4 = \sqrt[12]{2^4} = 1{,}2599\ldots$, oproti čisté velké tercii 5 : 4 = 1,25. Malá tercie vyjde naopak menší: $p^3 = \sqrt[12]{2^3} = 1{,}189\ldots$, oproti čisté malé tercii 6 : 5 = 1,2.

V tomto ladění (jediném) znějí všechny tóniny stejně dobře; pesimista by řekl, že jsou všechny zcela stejně rozladěny. V jakémkoliv ladění jiném mohou znít skladby v některých tóninách lépe, ovšem za tu cenu, že jiné tóniny budou naopak horší.

░ Byla teoreticky i prakticky studována temperovaná ladění dělící oktávu na větší počet dílů s lepším přiblížením čistých intervalů; nejsou ovšem tak jednoduchá, protože dílů musí být hodně. Z teorie řetězových zlomků lze mimo čísla 12 odvodit jako vhodná přiblížení např. hodnoty 31 (navrhl již Huygens, v nové době Fokker v Holandsku)a 53 (navrhl již Mercator):

░ **31**:

počet kroků	*velikost*	ideálně	jméno
1	$x = \sqrt[31]{2} = 1{,}0226\ldots$		(krok = nejmenší interval)
2	x^2=1,046 ...	1,042 ...	aristoxenovský půltón 25/24 (např. c-cis)
3	x^3=1,069...	1,066 ...	Diatonický půltón 16/15, např. e-f (delezennovský)
5	x^5=1,118 ...	1,111 ...	malý celý tón 10/9
8	x^8=1,196…	1,2	malá tercie 6/5
10	x^{10}=1,2506…	1,25	velká tercie 5/4
18	x^{18}=1,4955…	1,5	kvinta 3/2

░ **53**

počet kroků	velikost	ideálně	jméno
1	$y = \sqrt[53]{2} = 1{,}013164\ldots$		(krok = nejmenší interval)
8	y^8=1,110…	1,111…	malý celý tón 10/9
9	y^9=1,1249…	1,125,	velký celý tón 9/8
14	y^{14}=1,201…	1,2	malá tercie 6/5
17	x^{17}=1,24898…	1,25	velká tercie 5/4
31	x^{31}=1,499…	1,5	kvinta 3/2
43	y^{43}=1,755	1,75	přirozená septima 7/4

Ladění ***mean-tone*** vedle samozřejmé čisté oktávy ponechává čistou tercii; kvintu pak nepatrně podladí tak, aby čtyři nové kvinty daly přesně pátou harmonickou, tj. velkou tercii + 2 oktávy. Nová kvinta zřejmě odpovídá poměru $q = \sqrt[4]{5} = 1{,}4953\ldots$, o málo horším než temperovaná. Velká tercie c-e je tedy přesná, malá tercie e-g je menší než čistá. Toto ovšem platí jen intervaly od tónu c, ale ne od všech ostatních; vzdálené tóniny proto samozřejmě znějí poněkud hůře.

Pythagorovo ladění

Pythagoras ponechává jen čistou kvintu a oktávu. Rozdíl mezi dvěma kvintami a oktávou, např. interval c-d, tvoří pythagorejský celý tón (***tonos***) totožný s velkým celým tónem

9:8 = 3:2 * 3:2 * 1:2.

Šest celých tónů vytváří o málo víc než oktávu: vzniklý interval his-c vznikl jako (12 kvint – 7 oktáv), nazývá se pythagorejské ***komma*** a má tedy hodnotu $(3:2)^{12}*(1:2)^7$ = 1,01364…, zhruba pětinu temperovaného půltónu.

░ Malý půltón (e-f) zvaný ***limma*** je zřejmě roven rozdílu (3 oktávy – 5 kvint) a odpovídá proto poměru
2 * 2 * 2 * (2:3) * (2:3) * (2:3) * (2:3) * (2:3) = 256 : 243 = 1,0535.

░ Velký půltón např. c-cis zvaný ***apotomé*** odpovídá rozdílu (tonos – limma)

Velká tercie vznikne jako dva celé tóny a má tedy poměr kmitočtů 81 : 64 oproti čisté 80 : 64 = 5 : 4; je o syntonické komma větší než čistá.

░ Čtyři pythagorejské kroky dávají pětitónovou neboli ***pentatonickou*** stupnici, bez půltónů, známou z melodií různých národů (skotská Auld Lyne Syne, známá ve 3/4 rytmu jako Valčík na rozloučenou, černošské spirituály jako Mississippi apod.).

░ Šest pythagorejských kruhů vytváří pythagorejskou diatónickou stupnici; vyjdeme-li od f (namísto od c), dostaneme právě bílé klávesy na klavíru. Jsou v ní jen dva intervaly mezi sousedními tóny, totiž tonos a limma.

░ Pythagorejská konstrukce tónů se obvykle stáčí do kruhu, takže 12. krok (his) téměř splyne s výchozím (c). Pro naše účely ji však ponecháme na přímce; oktávy nerozlišujeme a všechny kmitočty posouváme do rámce jedné oktávy. Krok vpravo odpovídá kvintě vzhůru (kmitočet vzroste 3:2 = 1,5 krát, resp. 3:4 = 0,75 krát, pokud bychom překročili oktávu), krok vlevo kvintě dolů nebo kvartě vzhůru (2:3 resp. 4:3).

░ Nepřítomnost čisté tercie odpovídá zcela logicky nepřítomnosti akordů, které jsou v klasické harmonii tvořeny právě z tercií, velké a malé. Pokud my víme, staří Řekové neužívali a patrně neznali vícehlas. Také „melodia“ a „harmonia“ značí ve staré řečtině totéž: libost, vyváženost apod.

Přirozená ladění

V přirozených laděních zachováváme v tónice, dominantě a subdominantě (které tvoří základ klasické harmonie) čistou kvintu i tercii, a ovšem i oktávu. Do obou celých tónů pak vkládáme půltóny zvyšováním či snižováním (***alterace*** tónu) podle následujících principů:

1. ***Aristoxenes*** zvyšuje primu. Vychází z rozdílu velké a malé tercie, např. a-c-e a a-cis-e. Tím vzniká ***malý půltón***, též zvaný ***chromatický půltón,*** o velikosti 25:24 (Odvoďte!). Podobným způsobem jako c-cis zvýšíme libovolný tón poměrem 25:24, resp. snížíme, např. d-des, poměrem 24:25.
   Nevýhodou je, že tento půltón je příliš malý. Je to spíše třetina tónu, protože takto vytvořené tóny c-cis-des-d jsou zhruba stejně daleko od sebe. Nemáme-li tedy pro ně

samostatné klávesy, musíme zvolit jeden z nich – ten zní výborně, ovšem v tom kontextu, kam patří tón s ním enharmonicky zaměněný, zní dosti špatně.

2. ***Delezenne*** ponechává jen jediný půltón, totiž diatónický (e-f). Alteruje tedy tak, že sousední tón zmenší či zvětší o diatónický půltón: poměr cis-d bude vytvořen podle e-f. Tento půltón (16:15 = 1,066…) je mnohem blíže polovině z celého tónu (9:8 = 1,125; 10:9 = 1,111…) než chromatický (25/24 = 1,041666…).

3. ***Ptolemaios*** vychází z diatónické stupnice; stačí tóny f, c, g, d. Ostatní z nich vytvoří velkými terciemi nahoru či dolů.

Všechny tři způsoby můžeme velmi názorně zaznamenat tabulkou, v níž ve vodorovném směru vynášíme interval kvinty (poměr kmitočtů 1:1,5), šikmo vpravo vzhůru pak velkou tercii (1:1,25) tak, aby šikmo vlevo vzhůru v přiměřeném měřítku vycházela malá tercie (1:1,2). Celou plochu takto pokryjeme tóny. Můžeme je nahlížet např. jako pythagotejská ladění, po vrstvách se lišící o syntonické komma. Durový, resp. mollový kvintakord v nich vytvářejí malé trojúhelníky otočené vrcholem nahoru, resp. dolů. Zvětšený resp. zmenšený kvintakord pak tvoří tři body na úsečce šikmo doprava, resp. doleva.

Poznamenejme ještě, že se označuje jako ***velká diesis*** rozdíl (4 malé tercie – oktáva), tedy poměr $6^4:5^4 * 1:2$ = 648:625 = 1,0368, jako ***malá diesis*** rozdíl (oktáva – 3 malé tercie), tedy poměr $2:1 * 4^3:5^3$ = 128:125 = 1,024.

Ve všech přirozených laděních je zvýšený tón (např. cis) ***nižší*** než sousední snížený (des).

Jiná ladění

Před objevením rovnoměrně temperovaného ladění se vyvinuly i jiné systémy ladění. Vesměs byly orientovány na skladby jistého typu, v jistých tóninách, a pro ně byly optimalizovány intervaly. Jejich rozbor by překračoval náš rámec příliš daleko.

Atonální skladby většinou počítají s temperovaným laděním. Přirozená ladění v nich totiž vytvářejí příliš často intervaly, které neznějí pěkně.

Tabulka_Laděni

jakožto samostatná barevná příloha znázorňuje graficky tóny jako políčka v rovině. Umožňuje přehledně porovnávat a hodnotit jak různá přirozená ladění, tak i ladění Pythagorovo a srovnávat je s rovnoměrně temperovaným laděním

Každé políčko obsahuje
- jméno tónu
- o kolik centů je přirozený tón výš než temperovaný
- absolutní výšku tónu (při a^1 = 440 Hz)

Tučnou kurzívou je uvedena diatonika společná přirozeným laděním (nikoli Pythagorovi!).

Aristoxenovy tóny jsou vymezeny z obou stran tučnou čarou; tóny vedou téměř kolmo vzhůru a dolů od společné diatoniky.

Delezennovy tóny mají jména uvedena kurzivou. Políčko mají zelené (jsou-li společné s Ptolemaiovými) nebo modré (nejsou-li). Vedou velmi šikmo vpravo nahoru a vlevo dolů).

Ptolemaiovy tóny jsou stojacími typy, políčko mají žluté nebo zelené (jsou-li společné s Delezennovými). Vedou šikmo vpravo vzhůru, resp. vlevo dolů.

Tóny mimo uvedený výběr jsou označeny petitem. Mají smysl, sledujeme-li skladbu během modulace.

Temperované ladění (rovnoměrné)

angl.	čes.	c	cis	d	dis	e	f	fis	g	gis	a	ais	h
C0	C2	16,35	17,32	18,35	19,45	20,60	21,83	23,12	24,50	25,96	27,50	29,14	30,87
C1	C1	32,70	34,65	36,71	38,89	41,20	43,65	46,25	49,00	51,91	55,00	58,27	61,74
C2	C	65,41	69,30	73,42	77,78	82,41	87,31	92,50	98,00	103,83	110,00	116,54	123,47
C3	c	130,81	138,59	146,83	155,56	164,81	174,61	185,00	196,00	207,65	220,00	233,08	246,94
C4	c1	261,63	277,18	293,66	311,13	329,63	349,23	369,99	392,00	415,30	440,00	466,16	493,88
C5	c2	523,25	554,37	587,33	622,25	659,26	698,46	739,99	783,99	830,61	880,00	932,33	987,77
C6	c3	1 046,5	1 108,7	1 174,7	1 244,5	1 318,5	1 396,9	1 480,0	1 568,0	1 661,2	1 760,0	1 864,7	1 975,5
C7	c4	2 093,0	2 217,5	2 349,3	2 489,0	2 637,0	2 793,8	2 960,0	3 136,0	3 322,4	3 520,0	3 729,3	3 951,1
C8	c5	4 186,0	4 434,9	4 698,6	4 978,0	5 274,0	5 588,0	5 919,9	6 271,9	6 644,9	7 040,0	7 458,6	7 902,1
C9	c6	8 372,0	8 869,8	9 397,3	9 956,1	10 548	11 175	11 830	12 544	13 290	14 080	14 917	15 804

Logaritmy a decibely

Tabulky „vynásob výkon *w*-krát“ vs. „přičti *q* decibelů“

$\sqrt[10]{10} \approx 1{,}258\ 925\ 411\ 794\ \ldots$

+ ***q*** dB	× ***w***	cca
+ 1 dB	× 1,258 9	× 1 $^1/_4$
+ 2 dB	× 1,584 9	× 1 $^1/_2$
+ 3 dB	× 1,995 3	× 2
+ 4 dB	× 2,511 9	× 2 $^1/_2$
+ 5 dB	× 3,162 3	× 3 $^1/_6$
+ 6 dB	× 3,981 1	× 4
+ 7 dB	× 5,011 9	× 5
+ 8 dB	× 6,309 6	× 6 $^1/_3$
+ 9 dB	× 7,943 3	× 8
+ 10 dB	× 10,000	× 10
+20 dB	× 100,00	× 100
+ 30 dB	× 1 000,0	× 1 000
+ 40 dB	× 10 000	× 10 000
+ 50 dB	× 100 000	× 100 000

– ***q*** dB	× ***w***
– 1 dB	× 0,794 3
– 2 dB	× 0,631 0
– 3 dB	× 0,501 2
– 4 dB	× 0,398 1
– 5 dB	× 0,316 2
– 6 dB	× 0,251 2
– 7 dB	× 0,199 5
– 8 dB	× 0,158 5
– 9 dB	× 0,125 9
– 10 dB	× 0,1
–20 dB	× 0,01
– 30 dB	× 0,001
– 40 dB	× 0,000 1
– 50 dB	× 0,000 01

× ***w***	+ ***q*** dB
× 1	+ 0,000 0 dB
× 2	+ 3,010 3 dB
× 3	+ 4,771 2 dB
× 4	+ 6,020 6 dB
× 5	+ 6,989 7 dB
× 6	+ 7,781 5 dB
× 7	+ 8,451 0 dB
× 8	+ 9,030 9 dB
× 9	+ 9,542 4 dB
× 10	+ 10,000 0 dB
× 20	+ 13,010 3 dB
× 30	+ 14,771 2 dB
× 40	+ 16,020 6 dB
× 50	+ 16,989 7 dB

10 lg *w*	$10^{\,q/10}$	