Kalkul pro fyziku – U3V

2-Kalkul-U3V.tex

J. Obdržálek – verze 2, 2009-02-09

Pro pohodlí studentů U3V zde shrnujeme hlavní matematické vzorce a úpravy užívané při úvodním výkladu fyziky. Předpokládáme součinnost čtenářovu; občas uvedeme namísto obecného vzorce konkrétní příklad (např. u binomické věty) s vírou, že čtenář ihned pochopí, o co jde. Text je občas doplněn poznámkami petitem, aby se netrhal souvislý děj.

Ad binomická věta a $(1+x)^9$ na následující straně: Asi tak nějak bychom to řekli svému věci znalému kolegovi, chtěli-li bychom mu věc stručně připomenout. Pokud věci totiž čtenář už rozumí (což předpokládáme), pak si je – cítí-li potřebu – snadno přesně doformuluje sám; navíc tím bude mít kontrolu, že věc zná do hloubky. Čtenář méně zkušený je zase zpravidla konkrétním příkladem rychleji orientován správným směrem pro pochopení věci než obecným vzorcem.

Občas jsou uvedeny poznámky mírně odbornější značené $\hookleftarrow$. Nevadí, když ji v prvním čtení přeskočíte anebo když jí nebudete rozumět.

$\hookleftarrow$ Těleso C komplexních čísel (vzniklé rozšířením tělesa reálných čísel o prvek „i“, pro nějž je $\mathrm{i}^2 = -1$), nelze dále rozšířit hledáním řešení rovnice $x^2 = \mathrm{i}$, protože takové x již leží v C. Lze však vytvořit asociativní, ale nekomutativní těleso Q s bází čtyř prvků a s algebrou kvaternionů: $q = a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}$, kde $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1$, a dále $\mathrm{i}\,\mathrm{j} = \mathrm{k}$; $\mathrm{j}\,\mathrm{i} = -\mathrm{k}$, další vzorce získáme cyklickou permutací prvků i, j, k. Bylo zavedeno Hamiltonem pro popis rotace tuhého tělesa, pro nás je však nyní názornější jeho maticová reprezentace.

Přesné formulace, podmínky platnosti apod. jsou ovšem podstatné v přednášce z matematické analýzy či z numerické matematiky; pro ně však tento text určen není. Ten je pouhým doplňkem k některým přednáškám z *fyziky*, kde se matematika využívá. Jde tu jednak o připomenutí – tedy o stručné vystižení jádra jistých matematických technik používaných ve fyzice, jednak o ukázku, jak fyzika matematiky používá.

Zejména pro budoucího učitele fyziky jsou určeny další poznámky: plná jména osob v poznámce pod čarou[1], etymologie (¶), populárnější komentář (♣) apod.

¶ *Kalkul* = počet, ze střlat. calculus = vápencový kamínek, kterým se počítalo, z lat. calx, -cis, f. vápenec.

♣ Literatura tohoto typu se zpravidla nazývá „kuchařka“.

Upřímně uvítám všechny Vaše podněty, co mám doplnit do další verze.

Obsah

[1] Kvaternionový počet vytvořil sir William Rowan Hamilton, 1805-1865, irský matematik a fyzik

1 Binomická věta

Binomická věta rozvádí n-tou mocninu binomu $(1+x)$ v řadu, konvergující pro
a) komplexní $|x| < 1$ a libovolné reálné n;
b) přirozené n a libovolné komplexní x (suma pak má jen $n+1$ nenulových sčítanců).

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k, \quad \text{např.} \quad (1+x)^9 = 1 + \frac{9}{1}x + \frac{9\cdot 8}{1\cdot 2}x^2 + \frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 \dots . \tag{1}$$

$\longleftrightarrow$ Pro necelá n lze definovat $n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n\, \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$. Viz však též př. 1.1 s $n = -\frac{1}{2}$.

¶ *binom* = dvojčlen; z fr. binôme t.v., a to z bi- lat. = dvoj-; $\nu\grave{o}\mu o\varsigma$ $\grave{o}$, ř. = řád, člen.

Výsledkem je zřejmě mocninná řada se všemi typickými vlastnostmi: zejména v okolí počátku $x = 0$ můžeme očekávat rychlou konvergenci.

Binomické koeficienty znáte z Pascalova trojúhelníku:

$$\begin{array}{lccccccccccc}
0 & & & & & & 1 & & & & & \\
1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
\dots & & & & & & & & & & & \\
n & \binom{n}{0} & & \binom{n}{1} & & \binom{n}{2} & \dots & & \dots & \binom{n}{n-1} & & \binom{n}{n}
\end{array}$$

Příklad 1.1: Ukažte souvislost klasického vzorce pro kinetickou energii $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$ se známým relativistickým vzorcem $E = mc^2$. „Relativistická“ hmotnost m souvisí s „klidovou“ m_0 vztahem $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, kde $\beta = v/c$.

Řešení: Zřejmě

$$E = m_0c^2 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0c^2(1+(-\beta^2))^{-\frac{1}{2}}$$

a použijeme binomickou větu pro $n = -\frac{1}{2}$, $x = -\beta^2$:

$$\begin{aligned} E &= m_0c^2 \left(1 - \frac{1}{2}(-\beta^2) + \frac{\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}}{1\cdot 2}(-\beta^2)^2 + \frac{\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}\cdot\frac{-5}{2}}{1\cdot 2\cdot 3}(-\beta^2)^3 + \dots\right) \\ &= m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3}{8}m_0v^2\beta^2 + \frac{5}{16}m_0v^2\beta^4 \dots \end{aligned} \quad (2)$$

V klasickém přiblížení je $v \ll c$, takže $\beta \to 0$, $m_0 \doteq m$ a označíme-li $E_0 = m_0c^2$, platí zřejmě opravdu $E \doteq E_0 + E_{\mathrm{k}}$. „Klidová“ energie E_0 představuje člen sice obrovský, ale konstantní, neměnící se v průběhu děje a neovlivňující tedy nijak mechanický pohyb v klasické fyzice. (Můžeme ho pokládat za vnitřní energii částice.) **(Konec řešení)**

Příklad 1.2: Odvoďte vzorec pro $(a+b)^n$.

Řešení: Zřejmě platí $(a+b)^n = a^n(1+\frac{b}{a})^n$, takže

$$(a+b)^n = a^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{b}{a}\right)^k; \quad \text{pro přirozené } n \text{ platí} \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k. \quad (3)$$

(Konec řešení)

2 Komplexní čísla a goniometrické funkce

2.1 Zavedení

K reálným číslům přidáme imaginární jednotku[2] i, algebraicky je rozšíříme (+, −, ∗, /) a vzápětí „zúžíme“ relací $\mathrm{i}^2 + 1 = 0$. Čísla typu $z = a + \mathrm{i}\, b$ nazýváme komplexními. Pro jejich sčítání i násobení platí stejné zákony (komutativní, asociativní, distributivní) jako pro reálná čísla.

⟷ **Precisněji:** Těleso R reálných čísel rozšíříme o algebraický prvek i (aby $1 + \mathrm{i}^2 = 0$) na nadtěleso C komplexních čísel. **Stručněji:** Těleso C komplexních čísel je algebraicky uzavřeným algebraickým rozšířením tělesa R reálných čísel. **Jinak:** Komplexní čísla zobrazujeme jako body v *Gaussově*[3] *rovině*; reálnou, resp. imaginární část udává souřadnice x, resp. y.

♣ Relaci $x^2 + 1 = 0$ ovšem vyhovuje nejenom $x = \mathrm{i}$, ale také $x = -\mathrm{i}$.

♣ Někdy se píše $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$; my však raději nebudeme zavádět (víceznačnou) odmocninu komplexního čísla. Proto např. řešení rovnice $x^2 = \mathrm{i}$ budeme psát jako $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$, ale neužijeme zápis $\sqrt{\mathrm{i}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$.

Číslo $\bar{z} = a - \mathrm{i}\, b$ je *komplexně sdružené* k číslu $z = a + \mathrm{i}\, b$. Součet $z + \bar{z}$ a součin $z\bar{z}$ jsou reálné, rozdíl $z - \bar{z}$ ryze imaginární. *Velikost* komplexního čísla (též *absolutní hodnota*) je

$$|z| = |a + \mathrm{i}\, b| = \sqrt{a^2 + b^2}\,. \quad (4)$$

Tzv. základní věta algebry říká, že v oboru komplexních čísel má každý polynom n-tého stupně právě n kořenů (se započtením event. násobnosti kořenů).

[2] Elektrotechnici značí imaginární jednotku „j“ a značku „i“ ponechávají pro elektrický proud.

[3] Karl Friedrich Gauss, 1777-1855, něm. astronom, matematik a fyzik

$\longleftrightarrow$ S pojmem blízkým násobnosti kořene se setkáte např. v kvantové mechanice pod názvem „stupeň degenerace (hladiny energie)“, když několik různých stavů, tvořících tuto hladinu, má stejnou energii. Hladina je např. čtyřikrát degenerovaná, jestliže vhodná **porucha** (tj. malá změna) tuto hladinu rozštěpí na čtyři různé hladiny, ale nikdy ne na víc. Polynomiální rovnice $x^4 = 0$ má kořen $x = 0$, a to čtyřnásobný: $x_{1234} = 0$, protože porušená rovnice téhož stupně $x^4 - \alpha = 0$ má čtyři různé kořeny ($\pm\sqrt[4]{\alpha}$, $\pm$ i $\sqrt[4]{\alpha}$) pro libovolně malé $\alpha > 0$. Ne každá porucha se nám ovšem hodí; porucha typu $(1 - \alpha)x^4 = 0$ degeneraci *nesnímá*, protože symetrii úlohy nenaruší (a dokonce ani nezmění kořeny). Porucha vedoucí k rovnici $x^4 - \alpha x^2 = 0$ *sejme degeneraci* jen *částečně*, symetrie zůstane částečně zachována a rovnice bude mít jeden dvojnásobný kořen $x_{12} = 0$ a dva jednoduché kořeny $x_3 = \sqrt{\alpha}$ a $x_4 = -\sqrt{\alpha}$.

¶ *imaginární* = zdánlivý, obrazný, z lat. imāgō, -inis f. = obraz, vidina; ¶*komplexní* = složený, z lat. com- = s-; plectō, -ere, plexī, plexus = plésti, tedy číslo „spletené“ dohromady ze dvou částí; ¶*algebra* ze střlat. algebra z arab. al-džabr = řada čísel; ¶*komutativní* = záměnný z lat. com- = s-; mūtō, -āre, -āvī, -ātum = zaměňovati; ¶*asociativní* = sdružovatelný z lat. ad- = k; sociō, -āre, -āvī, -ātum = pojiti, sdružovati; ¶*distributivní* = rozdělitelný, z lat. dis- = roz-; tribuō, -ere, -uī, -ūtum = děliti; ¶*reálný* = skutečný, věcný ze střlat. realis z lat. rēs, reī, f. = věc.

2.2 Zápisy komplexních čísel

Zápis

$$z = a + \mathrm{i}\, b \tag{5}$$

se nazývá *kartézský*[4]. Má názorný význam bodu v Gaussově rovině a je vhodný pro algebraické zpracování. Součet a rozdíl („algebraický součet“) mají názornou geometrickou interpretaci „pravidlem rovnoběžníka“.

Jiný užívaný tvar je *goniometrický*:

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi), \tag{6}$$

kde $r = |z|$ je velikost komplexního čísla a φ jeho *argument*; ten se zpravidla uvažuje mod 2π v intervalu $[0, 2\pi[$ a nazývá se pak *hlavní hodnota* argumentu.

Vztah

$$\exp(\mathrm{i}\,\varphi) = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi. \tag{7}$$

se nazývá Moivrova[5] věta; lze ho ověřit např. rozvojem v mocninnou řadu.

Z tohoto vzorce plyne *exponenciální* tvar komplexního čísla, totiž

$$z = r\exp\mathrm{i}\,\varphi, \tag{8}$$

opět $r = |z|$. Ten je zvláště výhodný pro násobení, mocnění a některé funkce (umocňování).

Násobíme-li komplexní čísla z_1 a z_2, pak výsledek z_{12} má velikost r_{12} danou součinem dílčích velikostí, argument φ_{12} součtem dílčích argumentů:

$$\begin{aligned} r_{12} &= r_1 r_2 \\ \varphi_{12} &= \varphi_1 + \varphi_2 \end{aligned} \tag{9}$$

Z exponenciálního tvaru je mj. zřejmý logaritmus komplexního čísla:

$$\lg z = \lg r + \mathrm{i}\,\varphi \quad (+\ \mathrm{i}\, 2k\pi \text{ pro libovolné celé } k). \tag{10}$$

Tak můžeme např. spočítat komplexní mocninu komplexního čísla:

$$(a\ + \mathrm{i}\, b)^{(c+\mathrm{i}\, d)} = (r\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi})^{(c+\mathrm{i}\, d)} = r^c\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, c\varphi}\, r^{\mathrm{i}\, d}\ \mathrm{e}^{-\varphi d} = (r^c\ \mathrm{e}^{-\varphi d})\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(c\varphi + d\ln r)}\,.$$

[4] *Cartesius* je polatinštělý tvar jména Descartes (René Descartes, fr. filosof a matematik, 1596-1650).

[5] Abraham de Moivre, 1667-1754, fr. matematik

Zpravidla počítáme s hlavní hodnotou argumentu komplexního čísla, ale nesmíme zapomínat, že existují i všechny ostatní hodnoty (s argumentem odlišným o $2\,\mathrm{i}\,k\pi$) a musíme tedy vždy uvážit, zda nás zajímá opravdu pouze hlavní hodnota.

Příklad 2.1: Určete i^{i}.

Řešení: V exponenciálním zápisu je $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$. Je tedy $r = 1$, hlavní hodnota $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $c = 0$ a $d = 1$, takže

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = (1\cdot\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}})^{\mathrm{i}} = (\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\cdot\,\mathrm{i}}) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} \doteq 0,207\,88\ldots\ . \quad \textbf{(Konec řešení)}$$

$\hookleftarrow$ Vedle hlavní hodnoty existuje nekonečně mnoho dalších reálných hodnot; některé konvergují k nule, jiné utíkají do nekonečna. Zjistěte je všechny!

Příklad 2.2: Odvoďte součtové vzorce pro $\cos(a \pm b)$ a $\sin(a \pm b)$ a vzorce pro součty a součiny trigonometrických funkcí.

Řešení: Vzhledem k tomu, že $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^{a}\,.\,\mathrm{e}^{b}$, dostaneme dosazením z rov. (7)

$$\cos(a \pm b) + \mathrm{i}\sin(a \pm b) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(a\pm b)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,a}\,.\,\mathrm{e}^{\pm\,\mathrm{i}\,b} = (\cos a + \mathrm{i}\sin a)(\cos b \pm \mathrm{i}\sin b). \qquad (11)$$

Odtud roznásobením a porovnáním reálných a imaginárních částí snadno součtové vzorce

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \qquad (12)$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b, \qquad (13)$$

z nichž plyne (pro Fourierovy integrály)

$$\cos a\ \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \qquad (14)$$
$$\sin a\ \sin b = \frac{1}{2}(-\cos(a+b) + \cos(a-b)) \qquad (15)$$
$$\sin a\ \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \qquad (16)$$

a pro studium stojatých vln ($a = \frac{c+d}{2}$, $b = \frac{c-d}{2}$)

$$\sin c + \sin d = 2\sin\frac{c+d}{2}\cos\frac{c-d}{2} \qquad (17)$$
$$\sin c - \sin d = 2\cos\frac{c+d}{2}\sin\frac{c-d}{2} \qquad (18)$$
$$\cos c + \cos d = 2\cos\frac{c+d}{2}\cos\frac{c-d}{2} \qquad (19)$$
$$\cos c - \cos d = -2\sin\frac{c+d}{2}\sin\frac{c-d}{2}. \quad \textbf{(Konec řešení)} \qquad (20)$$

Příklad 2.3: Ukažte souvislost mezi funkcemi násobného úhlu a tzv. trigonometrickými polynomy (tj. polynomy ve funkcích sin a cos).

Řešení: Například

$$\cos 3a + \mathrm{i}\sin 3a = \mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,a} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,a}\right)^3 = (\cos a + \mathrm{i}\sin a)^3 \qquad (21)$$

Roznásobením, užitím relace $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ a porovnáním reálných a imaginárních částí dostanene snadno

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a \qquad ; \qquad \sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a \qquad (22)$$

Pro jiný exponent si jistě poradíte sami (případně s užitím binomické věty). **(Konec řešení)**

Zápisy goniometrický i exponenciální jsou jednoznačné při volbě intervalu $\mathcal{J}$ délky 2π pro φ a pro $z \neq 0$. V případě $z = 0$ může být zvolen argument φ libovolně.

Komplexní čísla se bohatě využívají např. v elektrotechnice při popisu obvodů se střídavým proudem. V lineárních obvodech jsou všechny hodnoty napětí $u(t)$ i proudů $i(t)$ *harmonickými funkcemi*, tedy funkcemi typu $u = u_0(\cos\omega t + \varphi_u)$, $i = i_0(\cos\omega t + \varphi_i)$ s různými fázovými konstantami φ_u, φ_i; rozdíl fází se nazývá zpravidla *fázový posuv*. Pro pevné ω zavedeme jako zobecnění reálného (ohmického) odporu *komplexní impedanci*, popisující pak chování rezistorů, kondenzátorů a cívek v libovolných kombinacích; s veličinou $u(t)$ pracujeme jako s komplexní veličinou u v exponenciálním zápisu. Tím se výrazně zjednodušuje vyjádření veškerých lineárních rovnic a vztahů. Veličiny tohoto typu se nazývají v elektrotechnice *fázory*.

Komplexní čísla jsou ovšem vhodná i všude jinde při popisu harmonických kmitů a vln. Při lineárních jevech pak stačí uvažovat jako měřenou veličinu např. reálnou část příslušné komplexní veličiny. Pro výpočet nelineárních veličin (např. energie) je nutno nejprve přejít k reálným částem a pak případně pro tyto veličiny odvodit speciální pravidla.

Stejně jako z reálných čísel můžeme i z komplexních čísel konstruovat např. vektory, matice apod. Mluvíme pak o komplexních vektorech atd.

$\hookleftarrow$ V kvantové teorii je stav systému popsán zpravidla[6] tzv. vlnovou funkcí ψ, která je obecně komplexní a není přímo měřitelná. Komplexní sdružení se zpravidla značí hvězdičkou: ψ^*. Měřitelné veličiny získáváme středováním, např. pro elektron popsaný funkcí $\psi(x)$ je pravděpodobnost výskytu na intervalu $[a, b[$ rovna $\int_a^b \psi^*(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x$.

3 Derivace

3.1 Zavedení

Uvažujme dvě fyzikální veličiny, např. polohu x na lince v peci a teplotu $f(x)$ v této poloze; ta bude jistě na poloze záviset. Zajímá nás vliv *změny* polohy na *změnu* teploty. Studium závislosti změn vede k zavedení derivace. Značme změny (přírůstky, diference) značkou Δ. Při nárůstu[7] x o Δx (posunutí) nechť vzroste teplota o Δf. Derivace je pak limitou

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}. \tag{23}$$

Ve stejném významu se užívají i zápisy

$$f'(x) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) \equiv \mathrm{d}f/\,\mathrm{d}x. \tag{24}$$

Derivaci podle *času* značíme ve fyzice často tečkou nad proměnnou: $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\,\mathrm{d}t \equiv \dot{\boldsymbol{r}}$.

Výraz $\mathrm{d}f$ se nazývá (totální) *diferenciál* funkce f; konečná změna Δf je *diference*.

$\hookleftarrow$ Kdyby f byla lineární, pak by bylo $\Delta f = \mathrm{d}f$ přesně i pro konečné $\mathrm{d}x$. V tom smyslu se říká, že $\mathrm{d}f$ je lineární část přírůstku Δf. Danému bodu x_0 a diferenciálu $\mathrm{d}x$ odpovídá pak diferenciál $\mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$ přesně a pro libovolné $\mathrm{d}x$.

[6] Stav může být popsán i (komplexním) stavovým vektorem. Nejobecnější popis dává tzv. matice hustoty; samozřejmě je také komplexní.

[7] Samozřejmě může být Δx nebo Δf záporné; v tom případě fakticky nepůjde o nárůst, ale o pokles. Čtenáře zvyklého na algebraický součet, zahrnující i odčítání, to jistě nezmate.

Ve fyzikálních úvahách se často mluví o *konečném* přírůstku Δx, na rozdíl od *infinitezimálního* nebo *nekonečně malého* přírůstku $\mathrm{d}x$. O tom se ještě zmíníme později.

$\hookleftarrow$ Pojmy derivace i limity (s kvantifikátory, ε, δ,...) proberete detailně v úvodním kurzu matematické analýzy. Názornou představu infinitezimálních veličin (nekonečně malých či nekonečně velkých veličin různých celistvých řádů), kterou zde budeme používat, lze též vybudovat zcela korektně v alternativní analýze; ta je však založena na teorii polomnožin (angl. demiset), kde částí množiny nemusí být množina.

¶ *derivace* = odvození metaf. z lat. dērīvātiō, -ōnis f. odvodnění z de- = od, rīvus, -ī m. = potok; ¶*limita* = hranice, mez z lat. līmes, -itis m. = mez (mezi poli); ¶ d, Δ, δ z lat. differentia, -æ f. = rozdíl, různost z dis- = roz-; ferō, ferre, tulī, lātum = nésti.

3.2 Význam v aplikacích

Vyjádříme-li funkci $y(x)$ křivkou (grafem v souřadnicích x, y), pak derivace $y'(x) = \mathrm{tg}\,\alpha$ v bodě (x, y) je *směrnicí tečny* křivky v tomto bodě. Graf je nutno ovšem vynášet tak, aby jednotky SI veličin x, y byly zobrazeny na osách stejně velkými úseky.

Je-li nezávisle proměnnou čas t, je $\dot{f} \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ *rychlost*: je-li s dráha, je $\dot{s} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ rychlost pohybu; je-li T teplota, je $\dot{T} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ rychlost zahřívání apod.

♣ S tím souvisejí i různá běžná čtení derivace: $\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$ „časová změna hybnosti“, „přírůstek hybnosti za jednotku času“. Např. rychlost pohybu $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ se často čte jako „dráha za jednotku času“. Rozumí se tím, že *kdyby* byla rychlost pohybu stálá, *pak by* dráha uražená za jednotku času (tj. za sekundu) byla číselně rovna této rychlosti.

3.3 „Slovník“ pro derivace

$(\mathsf{konst})' = 0$	$(\exp x)' = \exp x$	$(\arctan x)' = (1+x^2)^{-1}$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arcsin x)' = (1-x^2)^{-1/2}$
$(\ln\lvert x\rvert)' = 1/x$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\arccos x)' = -(1-x^2)^{-1/2}$

♣ Norma předepisuje pro tangentu značku tan, nikoli tg, tang apod.

3.4 „Gramatika“ pro derivace

3.4.1 Derivace součtu a součinu

Jsou-li α, β, γ konstanty a f, g, h funkce, platí

$$(\alpha f + \beta g - \gamma h)' = \alpha f' + \beta g' - \gamma h' \tag{25}$$

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh' \tag{26}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \text{pro } g \neq 0. \tag{27}$$

3.4.2 Derivace složené funkce

Je-li $f = f(x)$, $x = \xi(t)$ a značíme-li $F(t) = f(\xi(t))$, platí

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} \qquad \text{čili} \qquad \dot{F} = f'\dot{\xi} \tag{28}$$

Velmi často se ve fyzice nerozlišuje F od f, protože popisují *fyzikálně* tutéž veličinu. Pak se ovšem nerozlišuje ani x od ξ a píše se např.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

jako by se „krátilo diferenciálem dx“. To může hloubavého studenta zmást; taková interpretace také zradí u funkcí více proměnných. Především to však právem rozhořčí matematika. Z jeho hlediska jsou totiž F a f zcela různé funkce $F(t)$ a $f(x)$, a taky x je nezávisle proměnná, zatímco ξ je funkce $\xi(t)$ nezávisle proměnné t.

Příklad: Značme τ teplotu podél linky v peci. Nechť roste pro $0 < x < 1$ lineárně, podle vztahu $\tau(x) = \tau_0 + x(\tau_1 - \tau_0)$. Teploměr projíždí linku zrychleně, pro $0 < t < 1$ je $\xi(t) = t^2$. Údaj $T(t)$ teploměru roste tedy kvadraticky s časem: $T(t) = \tau_0 + t^2(\tau_1 - \tau_0)$. Fyzik zdůrazňuje, že obojí T i τ znamenají totéž, totiž teplotu v peci. Matematik zdůrazňuje, že $T(t)$ a $\tau(x)$ jsou zcela různé funkce různých proměnných. Pravdu mají samozřejmě oba.

♣ Rozmyslete si, co plyne z fyzikální interpretace derivace složené funkce: údaj teploměru se mění ($\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \neq 0$) opravdu jen tehdy, když se podél linky mění teplota ($\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x} \neq 0$) a přitom se teploměr pohybuje ($\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} \neq 0$).

3.4.3 Derivace inverzní funkce

Derivace inverzní funkce je rovna převrácené hodnotě derivace funkce původní:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}. \tag{29}$$

Při geometrické interpretaci porovnáváme původní graf funkce s grafem překlopeným kolem osy prvního kvadrantu.

♣ Osy x, y si tedy promění polohu.

$\longleftrightarrow$ Přesněji: Je-li $y = y(x)$ v okolí $U(x_0)$ bodu x_0 monotonní a má-li nenulovou derivaci, pak existuje inverzní funkce $x = x(y)$, tj. pro $X \in U$ platí $x(y(X)) = X$, a její derivace je rovna uvedenému výrazu. Symboly x, y mají na obou stranách rov. (29) trochu jiný význam, podobně jako výše u kap. 3.4.2.

3.5 Vyšší derivace

Derivovanou funkci můžeme opět derivovat: $(f')' \equiv f'' \equiv f^{(2)}$, neboli

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right) \equiv \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$$

a čteme „dé druhé f podle dé x na druhou“. Podobně tvoříme i vyšší derivace.

Zápis druhé derivace dx^2 zde znamená $(\mathrm{d}x)^2$; nikoli tedy $\mathrm{d}(x^2)$, což je první derivace podle výrazu x^2 a vyskytuje se příležitostně v analytické mechanice.

Vyšší derivace podle *času* značíme analogicky více tečkami: $\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \equiv \ddot{\boldsymbol{r}}$, $\dfrac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^3} \equiv \dddot{\boldsymbol{r}}$.

3.6 Taylorova řada

Často můžeme zkoumanou funkci f rozvinout v okolí nějakého bodu x v mocninnou řadu podle vzdálenosti h od bodu x, tzv. Taylorovu[8] řadu:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \ldots = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)} + \mathcal{O}(h^N). \tag{30}$$

$\longleftrightarrow$ Řada konverguje k $f(x)$, pokud zbytek $\mathcal{O}(h^N) \to 0$ (kriteria např. Cauchy, Lagrange). Takovým funkcím se říká analytické (v bodě x). Neanalytická je např funkce $f(x) = x^{5/3}$ v bodě $x = 0$; pro všechna ostatní

[8]Brooke Taylor, 1685-1731, anglický matematik.

$x \neq 0$ je však f analytická. Funkce $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$, $f(0) = 0$ má $f^{(n)} = 0$ pro všechna přirozená n, přesto není identicky nulová. Z hlediska teorie funkcí komplexní proměnné má v počátku ($x = 0$) podstatnou singularitu.

Taylorova řada je „nejlepší aproximací“ funkce $f(x)$ polynomem $P(x)$ v nejtěsnějším okolí bodu x a $n+1$ člen řady popisuje n-tou derivaci funkce. Řada má milou vlastnost: známe-li již n členů a chceme-li jich mít $n+1$, stačí přidat poslední; dosavadní členy řady se nezmění.

$\longleftrightarrow$ Něco jiného je aproximace funkce polynomem na intervalu, např. [-1,1]. Takový polynom má zcela jiný tvar než např. Taylorova řada v bodě 0. Rovněž aproximace stupně n a $n+1$ se zpravidla liší ve všech členech; nestačí tedy „doplnit poslední člen“.

3.7 Funkce více proměnných

3.7.1 Parciální derivace

V případě funkce více proměnných se zavádí **parciální** derivace s označením

$$\frac{\partial f(x,y,\dots,z)}{\partial x} \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,\dots,z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, \dots, z) - f(x)}{\Delta x} \tag{31}$$

a čte se zpravidla „parciální dé f podle dé x při konstantním $y, \dots, z$“. Konstantností se rozumí to, že v procesu limity neměníme $y, \dots, z$. Výsledek sám — parciální derivace — je ovšem opět funkcí všech proměnných $x, y, \dots, z$. Tradičně se při více než jedné proměnné užívá značka ∂ namísto d.

♣ Přesně vzato, proměnné dole u závorky jen připomínají, ve kterých proměnných (kromě těch, podle kterých derivujeme) má být vyjádřena derivovaná funkce, když už užíváme téhož písmene f pro uvažovanou fyzikální veličinu bez ohledu na to, ve kterých proměnných je vyjádřena (viz 3.4.2). Proměnné, podle níž se derivuje, mezi nimi nebývají uvedeny.

3.8 Operátor nabla, ∇

Ukazuje se výhodné zavést stručné označení ∇, případně **grad** (gradient), pro často se vyskytující konstrukci

$$\begin{aligned} \nabla F(x,y,z) \equiv \mathbf{grad}\, F(x,y,z) &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) \\ &= \boldsymbol{a}(x,y,z) \end{aligned} \tag{32}$$

Symbol ∇ se nazývá nabla, a je to tedy vektorový operátor (předpis vytvářející ze skalární funkce $F(x,y,z)$ vektorovou funkci $\boldsymbol{a}(x,y,z)$.

♣ V knihách je nabla tučně, protože to je vektor. Vřele doporučujeme při ručním psaní psát nad nabla „vektorovou“ šipku, tedy $\vec{\nabla}$.

¶ Jméno nabla je podle staroasyrského hudebního nástroje, lyry tohoto tvaru.

Protože ∇ je vektorem, můžeme s ním vytvářet i součiny typické pro vektor: skalární a vektorový. Pokud přitom zároveň ∇ působí na veličinu, s níž ho tento součin váže, užívá se pro něj speciálních jmen, totiž div (divergence), resp. **rot** (rotace; v angl. též často **curl**):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} \equiv \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \gamma(x,y,z) \tag{33}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{v} \equiv \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z};\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x};\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \boldsymbol{b}(x,y,z). \tag{34}$$

Ve všech ostatních případech zůstává označení **grad**, tedy např. skalární operátor

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla \equiv \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{grad} = v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{35}$$

¶ gradient: lat. gradiens stoupající; vektor **grad** φ má směr nejprudšího stoupání funkce φ; rotace=otáčení: lat. rotō, -āre kroužiti; divergence=rozcházení: lat. dīvertō, -ere rozcházeti se.

Znalost polí div $\boldsymbol{v}$ a $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}$ uvnitř oblasti $\mathcal{V}$ spolu se znalostí hodnot v_{n} na hranici $\partial\mathcal{V}$ určuje jednoznačně hodnoty $\boldsymbol{v}$ uvnitř celé $\mathcal{V}$.

Situace je obdobná tomu, že znalost vektorového a skalárního součinu neznámého vektoru se známým určuje neznámý vektor jednoznačně, viz rov. (**??**), přičemž roli známého vektoru zde hraje nabla, ∇.

3.8.1 Fyzikální význam operátoru ∇ (tj. grad, div, rot)

grad: Vektor **grad** φ má směr nejprudšího nárůstu pole φ; je kolmý k *ekviskalární* ploše, tj. ku ploše dané rovnicí $\varphi(x) = \mathsf{konst}$ (k „vrstevnici“).

Důkaz viz příklad 4.3.3.

$\boldsymbol{v}\cdot$ **grad**: tzv. *konvekční* derivace, *proudová* derivace. Skalár $\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{grad}\,\varphi$ udává změnu veličiny φ (např. teplota) naměřenou v důsledku toho, že pole $\varphi(\boldsymbol{r})$ je nehomogenní a že měřidlo (teploměr) se v něm pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$.

Viz rozbor rov. (39).

div: Je-li $\boldsymbol{v}$ rychlost tekutiny v bodě $\boldsymbol{r}_0$, pak skalár div $\boldsymbol{v}$ udává vydatnost zdroje tekutiny v tomto bodě, tj. oč více tekutiny vyteče z okolí tohoto bodu ven, než jí vteče dovnitř. Množství tekutiny zde měříme objemem; má-li tekutina hustotou ρ, pak div$(\rho\boldsymbol{v})$ udává rozdíl v hmotnosti.

Důkaz viz příklad 4.3.4.

rot: Je-li $\boldsymbol{v}$ rychlost tekutiny v bodě $\boldsymbol{r}_0$, pak vektor $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}$ měří otáčení tekutiny kolem osy $\boldsymbol{a}$ (ve smyslu pravidla pravé ruky) procházející tímto bodem.

Důkaz viz příklad 4.3.5.

3.9 Derivace složené funkce více proměnných

Nechť je f funkcí více proměnných, např. $f = f(x,y,z)$ a tyto proměnné jsou opět funkcemi dalších proměnných, např. $x = \xi(u,v)$, $y = \eta(u,v)$, $z = \zeta(u,v)$. Pak můžeme zavést složenou funkci $F(u,v) = f\big(\xi(u,v),\eta(u,v),\zeta(u,v)\big)$ a platí např.

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial v}. \tag{36}$$

Jako v kap. 3.4.2, ani zde se ve fyzice obvykle nerozlišuje F od f, ξ od x atp.

V mechanice závisí velmi často funkce více proměnných (prostorových) na jediné proměnné – na čase t. Uvažujme např. teplotu $\tau = \tau(x,y,z,t)$ a $x = \xi(t)$, $y = \eta(t)$, $z = \zeta(t)$. Pak můžeme zavést složenou funkci $T(t) = \tau\big(\xi(t),\eta(t),\zeta(t),t\big)$ a platí

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \tau}{\partial x}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \tau}{\partial y}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \tau}{\partial z}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \tag{37}$$

Jako v kap. 3.4.2, ani zde se ve fyzice obvykle nerozlišuje T od τ, ξ od x atd. a píše se

$$\begin{aligned} \dot{T} \equiv \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \underbrace{\frac{\partial T}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial T}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial T}{\partial z}\dot{z}} + \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \text{neboli} \\ \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \qquad \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{grad}\,T \qquad + \frac{\partial T}{\partial t}\,. \end{aligned} \tag{38}$$

Levá strana rov. (38), tedy člen $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$, se nazývá zpravidla *úplná* neboli *totální derivace.* První člen pravé strany se nazývá často *konvekční* neboli *proudová derivace.* Poslední člen, $\frac{\partial T}{\partial t}$, se pak nazývá *lokální* neboli *místní derivace.*

Je potřeba si uvědomit fyzikální interpretaci jednotlivých členů. Nechť např. funkce $\tau(x, y, z, t)$ určuje teplotu T v terénu a $\boldsymbol{r}$ je poloha teploměru. Údaj T teploměru se s časem mění: $T = T(t)$. Jeho změna (úplná derivace $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$) je podle rov. (38) rovna

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{grad}\,\tau + \frac{\partial \tau}{\partial t}, \quad \text{zpravidla psáno} \quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{grad}\,T + \frac{\partial T}{\partial t} \tag{39}$$

a je dána jednak tím, že se v daném místě v průběhu dne teplota mění (místní derivace $\frac{\partial T}{\partial t}$), jednak tím, že se teploměr pohybuje ($\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$), přičemž v různých bodech terénu je různá teplota ($\mathbf{grad}\,T \neq \mathbf{0}$), a ještě je nutno, aby se teploměr nepohyboval kolmo ke gradientu (nárůstu) teploty – tj. po „vrstevnici" teploty, jinak by skalární součin $\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{grad}\,T$ byl nulový.

4 Infinitezimální počet a fyzikální realita

4.1 Motivace

Člověk jinak uvažuje pro sebe (primitivněji, schematicky, z jistých „stavebních prototypů"), a jinak pak nahlas sdělí ostatním, na co přišel („učesaně", nejkratší cestou k cíli). Stejně je tomu i s fyzikálními úvahami, vedoucími nakonec k formulaci fyzikálních zákonů vyjádřených rovnicemi. Pokusíme se tu popsat právě ty výchozí primitivní, schematické úvahy – nejen jejich výsledky v definitivní úpravě.

Funkční vztahy mezi fyzikálními veličinami jsou velmi často dány diferenciálními a integrálními rovnicemi. Odvozujeme-li však tyto rovnice z fyzikálních představ, neuvažujeme obvykle v kategoriích derivací. Postupujeme nejčastěji tak, že uvažujeme malé přírůstky zvané v tomto kontextu *infinitezimální* (např. malý kousek hmoty; malé posunutí; malý přírůstek času a jemu odpovídající změny všech veličin, které během něj nastanou). Vyvozujeme, jak tyto přírůstky spolu souvisejí a srovnáváme je navzájem. Jejich poměry po následném limitním přechodu vedou k derivacím a k diferenciálním rovnicím, popisujícím matematicky daný fyzikální jev. Limitní přechod sám je však pro fyzika již zpravidla nezajímavý, je jen technickým dokončením, často se ani nezdůrazňuje (rozbor a výpočet této limity může ovšem být obtížný i zajímavý na cvičení z matematické analýzy).

4.2 Rozdíl v přístupu fyziky a matematické analýzy

V základních partiích fyziky jde z hlediska fyziky často o teleologický přístup: hledám řešení, o němž vím předem, že existuje a že je jediné; přitom i třída myslitelných řešení bývá značně omezená. Pokud by použitý aparát matematiky nevedl k řešení či připouštěl řešení víc, pak

- matematická formulace (úlohy, okrajových a počátečních podmínek, působících vlivů) byla natolik zjednodušená, že připouští i situaci fyzikálně nereálnou, tj. v přírodě se nevyskytující: např. časový průběh síly, který by byl dán v okolí času $t = 0$ vztahem

$$F(t) = F_0 \sin\left(\frac{1}{t}\right). \tag{40}$$

$\hookleftarrow$ I v takovém případě bývá zajímavé někdy později zjistit, odkud se „nefyzikální" řešení vzalo a jestli mu přece jen nelze nějaký ten význam dát.

- anebo je ona „neřešitelnost" principiální, např. pokus o použití totálního diferenciálu na plochu v bodě, kde má plocha hrot (třeba vrchol jehlanu). Pak buď použitý fyzikální model nebyl v dané situaci vhodný (je příliš hrubý nebo se vyskytují další, neuvažované jevy), anebo je nedostatek v naší (fyzikální) úvaze, jak ilustrujeme dále:

  — Elektrická intenzita na hrotu nabité jehly vyjde nekonečně velká a nemající směr. To signalizuje jednak, že na ostřejší jehle bude opravdu elektrické pole silnější než na tupé, jednak že skutečná jehla nikdy není na špičce bodová (např. už kvůli rozměrům atomů), jednak že při skutečném pokusu může docházet k novým jevům (sršení, elektrický průraz).

  — Při studiu šíření světla v dvojosém krystalu podél optické osy zjistíme, že při výpočtu dvojnásobné limity *závisí* výsledek na pořadí dílčích limit. Bereme to jako upozornění na singulární tvar vlnoplochy, která sama sebe protíná v bodě. Chová se podobně jako dvojplocha tvořená rotací křivky podle své sečny A, B. Ta má v každém z bodů A, B v každém rovinném řezu obsahujícím sečnu dvě tečny; přitom křivky v tomto řezu přecházejí z „vnější" slupky dvojplochy do „vnitřní" a naopak.

V řadě případů je to nejen praktická stránka měření, co omezuje přesnost při stanovení definované veličiny. I fyzikální veličina sama má pro každý objekt jistou rozumnou dolní hranici přesnosti: u vzdálenosti dvou měst asi platí ono tesařské „centimetr žádná míra", hmotnost člověka udaná v mikrogramech navozuje otázku, co vlastně ještě k živému, dýchajícímu člověku patří. Pak ovšem i závislosti, se kterými se v tomto kontextu setkáme, budou „jednodušší" než ty, se kterými se sejdete při studiu obecných funkcí v matematické analýze. Vzhledem k jejich fyzikálnímu zavedení bude zpravidla postačující popis funkcemi hladkými (tj. spojitými a majícími derivaci) všude, až na jisté dané plochy – hranice těchto objektů. Podobně často nemusíme zkoumat jinak obtížné otázky existence řešení rovnice; z fyzikální podstaty problému zpravidla vyplývá existence řešení, případně i jeho jednoznačnost.

$\hookleftarrow$ Uvažte také, že — striktně vzato — limitní přechod nezbytný v matematické analýze pro derivaci vyžaduje údaj o měřené veličině v tak malých rozměrech, kde její původní definice ztrácí smysl. Pro měření rychlosti $\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t$ těžko určíme polohu vlaku s přesností $\mathrm{d}x = 1$ mm, přesnost v mikrometrech vyvolává pochybnosti, co vlastně k vlaku patří a co ne, a přesnost vyšší, než je poloměr jádra atomu, nebudeme rozebírat. A to jsou pro $\Delta x \to 0$ jen první krůčky!

Z toho hlediska lze snadněji intrerpretovat přístup alternativní analýzy s polomnožinami a s nekonečně malými a velkými veličinami různých řádů.

Naproti tomu v jednotlivých zdůvodněných případech budeme používat i funkce dosti komplikované. Např. poloha klasické částice vykonávající Brownův pohyb je výstižně popsána spojitou funkcí nemající derivaci v žádném bodě. Kvantovou částici popíšeme zase komplexní vlnovou funkcí nebo nekonečněrozměrným stavovým vektorem. Pro popis diskrétního prostředí nebo pro veličiny mající charakter spektrálního rozkladu může být vhodná δ-funkce (ze 2. dílu kalkulu) nemající jednoduchou analogii mezi např. lebesgueovsky integrovatelnými funkcemi. Jevy mající náhodný charakter (šum, nepolarizované světlo, elektrickou intenzitu tepelného záření černého tělesa) lze úspěšně popsat také jen poměrně složitými strukturami.

4.3 Praktické použití

V matematice se diferenciálem $\mathrm{d}f$ popisuje chování nikoli funkce $f(x)$, ale její tečny, tečné nadroviny apod. Ve fyzice si však infinitezimální přírůstek $\mathrm{d}f$ představujeme jako přírůstek *skutečné* funkce, konečný, ale

- natolik malý, aby šlo v rámci požadované přesnosti zanedbat rozdíl mezi ním a matematickým diferenciálem, a přitom
- natolik velký, aby šlo podržet užitý fyzikální model a nebylo nutno např. přecházet do atomární a subatomární fyziky.

4.3.1 Fyzikální úvaha

Při fyzikální úvaze předpokládáme, že objekt je v infinitezimálním rozmezí zcela homogenní: obláček[9] $\mathrm{d}\mathcal{V}$ plynu o infinitezimálním objemu $\mathrm{d}V$ a infinitezimální hmotnosti $\mathrm{d}m$ má polohu plně určenou jediným polohovým vektorem $\boldsymbol{r}$, má hustotu $\rho(\boldsymbol{r}) = \mathrm{d}m/\,\mathrm{d}V$, má jistou teplotu T, tlak p apod. Přitom tedy

- žádná z veličin ρ, T, p již nezávisí na konkrétní velikosti $\mathrm{d}V$ — tj. nezměnila by se, kdybychom sledovali třeba jen desetinu oblasti $\mathrm{d}\mathcal{V}$ obláčku;
- kdyby však např. takto kleslo $\mathrm{d}V$ na desetinu, pak by se na desetinu zmenšilo i $\mathrm{d}m$. Všechny spolu související infinitezimální veličiny jsou si tedy v tomto smyslu přímo úměrné;
- *nepřipouštíme*, že díky konečnosti obláčku bychom mohli brát jeho polohu $\boldsymbol{r}$ s rozptylem řádově $\sqrt[3]{\mathrm{d}V}$ a že by se tedy v rámci $\mathrm{d}\mathcal{V}$ mohl měnit tlak, hustota, teplota atd. Tyto všechny změny se mohou objevit až v novém, sousedním obláčku.

Uvažme dále „sousední“ obláček $\mathrm{d}\mathcal{V}^*$. Ten je ovšem také homogenní, ale všechny uvedené hodnoty v něm budou změněné o jistý infinitezimální přírůstek (je-li záporný, znamená to samozřejmě úbytek). Má tedy polohu $\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r}$, hustotu $\rho^* = \rho + \mathrm{d}\rho$, teplotu $T^* = T + \mathrm{d}T$, je v něm tlak $p^* = p + \mathrm{d}p$ apod. Posunutí $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ je *nová* infinitezimální veličina: je *nezávislá* na $\mathrm{d}V$, ale přitom na $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ závisejí přírůstky $\mathrm{d}\rho$, $\mathrm{d}T$, $\mathrm{d}p$ (a to opět lineárně). Zpravidla nepotřebujeme porovnávat, zda má nový sousední obláček objem $\mathrm{d}V^*$ stejný jako původní, tedy $\mathrm{d}V$, protože, jak bylo zřejmé, na konkrétní velikosti $\mathrm{d}V$, resp. $\mathrm{d}V^*$ žádná z veličin ρ, T, p, resp. ρ^*, T^*, p^* nezávisela.

$\longleftrightarrow$ Něco jiného nastane při studiu deformace kontinua. Tam právě záleží na časové změně velikosti i tvaru jistého infinitezimálního „obláčku“. Proto pro jeho rozměry zavedeme prostě nové proměnné. Infinitezimální hranol umístěný v bodě $\boldsymbol{r}$ má infinitezimální hrany $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\zeta}$, které se za dobu $\mathrm{d}t$ deformací změní na $\boldsymbol{\xi} + \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta} + \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\zeta} + \mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}$. Fakticky jde o dvojí infinitezimální změnu. Viz kap. QQQ.

[9] Často se ani nerozlišuje označení objektu – obláčku (oblast $\mathcal{V}$) od jeho atributu – fyzikální veličiny (objem V). Je to pochopitelně nesprávné, ale jen málokdy by to mohlo vést k chybě.

4.3.2 Matematické zpracování výrazů s diferenciály

Při následném matematickém zpracování během dalších úprav

- vypadnou členy, které neobsahují infinitezimální veličiny („prosté členy“)
- zůstanou (některé) členy, obsahující právě jeden infinitezimální člen („infinitezimální veličiny prvního řádu“)
- mohou zůstat i členy obsahující součiny více infinitezimálních výrazů („infinitezimální veličiny vyšších řádů“), ale ty při následné limitě vypadnou. Můžeme je proto vynechávat již během práce.

Celá situace připomíná aproximace funkcí pomocí mocninných rozvojů (zde jsou to rozvoje v mocninách infinitezimálních přírůstků $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}m$ atp.). Infinitezimální veličiny vyšších řádů můžeme proto zpravidla zanedbávat už v úvodních fyzikálních úvahách: bereme $(1 + \mathrm{d}\varphi)^3 = 1 + 3\,\mathrm{d}\varphi$ apod. V každém případě je zanedbáme před sestavením diferenciální rovnice.

$\hookleftarrow$ Vzpomeňte si na to při čtení textu po řešení následujícího příkladu.

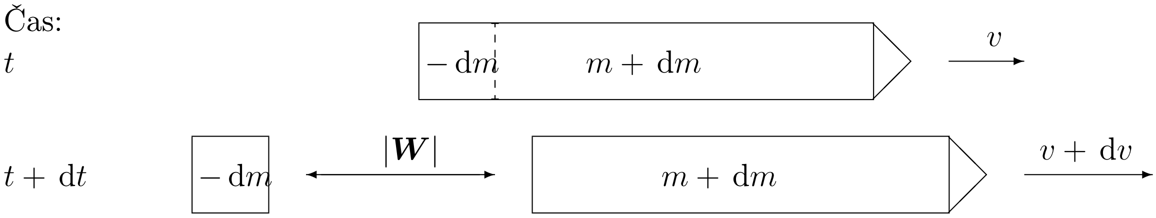
♣ Samozřejmě se může vzácně stát, že vypadnou nejen prosté členy, ale i všechny infinitezimální veličiny prvního řádu. Pak budeme muset výpočet opakovat a podržet i členy nejbližšího vyššího řádu.

4.3.3 Ilustrace

Příklad 4.3.1: Odvoďte pohybovou rovnici pro těleso s proměnnou hmotou, např. pro pohyb rakety.

Fyzikální formulace Uvažujme pro jednoduchost jen pohyb podél osy x; značka v bude tedy znamenat x-ovou složku vektoru $\boldsymbol{v}$ atp. Velikost vektoru $\boldsymbol{W}$ budeme značit $|\boldsymbol{W}|$.

V jistém okamžiku t má raketa rychlost v a hmotnost m. V raketě hoří pohonná směs „rychlostí hoření“ q kg/s a mění se tím v plyny (samozřejmě téže hmotnosti), které



proudí od rakety rychlostí o velikosti $W \equiv |\boldsymbol{W}|$. Systém (tvořený raketou) má na začátku hybnost $p = mv$. Podle Newtonova zákona síly platí $F = ma = \mathrm{d}p/\,\mathrm{d}t$. Protože ve směru pohybu nepůsobí žádné vnější síly, nemění se hybnost systému.

Po infinitezimální době $\mathrm{d}t$ se změní čas na $t^* = t + \mathrm{d}t$, hmotnost rakety se změní[10] na $m^* = m + \mathrm{d}m = m - q\,\mathrm{d}t$, její rychlost na $v^* = v + \mathrm{d}v$ a hybnost na $p^* = m^*v^* = (m - q\,\mathrm{d}t)(v + \mathrm{d}v)$. Vedle toho však přibyl obláček spáleného paliva o hmotnosti dm pohybující

[10] Všimněte si dobře tohoto obratu. Zdálo by se přirozenější rovnou mluvit o úbytku, ale velmi snadno bychom pak udělali chybu ve znaménku: je úbytek kladný, nebo záporný? Proto je lepší všude uvažovat „přírůstek“ a připustit, že může vyjít kladný či záporný.

se rychlostí $v + \mathrm{d}v - W$ a mající tedy hybnost $p^{**} = \mathrm{d}m \cdot (v + \mathrm{d}v - W) = q(v + \mathrm{d}v - W)\,\mathrm{d}t$. Protože se hybnost systému (tvořeného nyní zbylou raketou a obláčkem spáleného paliva) nezměnila, musí platit

$$\begin{aligned} p = mv &= p^* + p^{**} = (mv - qv\,\mathrm{d}t + m\,\mathrm{d}v - q\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v) + (qv\,\mathrm{d}t + q\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t - qW\,\mathrm{d}t) \\ &= mv + m\,\mathrm{d}v - qW\,\mathrm{d}t \qquad (41) \\ 0 &= m\,\mathrm{d}v - qW\,\mathrm{d}t. \qquad (42) \end{aligned}$$

„Prostý člen“ mv (bez infinitezimálních veličin) se vyrušil, infinitezimální veličiny vyšších řádů se ani nevyskytly a po vydělení $\mathrm{d}t$ a úpravě zbývá hledaná rovnice

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = qW. \qquad (43)$$

Výraz na pravé straně – hmotnost krát zrychlení – můžeme podle Newtonova zákona síly $F = ma$ pokládat za sílu, tzv. *reaktivní sílu*, která urychluje raketu; ta je tedy úměrná výtokové rychlosti W spálených plynů a „rychlosti hoření“ paliva $q = \mathrm{d}m/\,\mathrm{d}t$. **(Konec řešení)**

Při tomto postupu nebylo třeba zanedbávat infinitezimální veličiny 2. řádu, protože členy typu $q\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v$ z rov. (41) se všechny vyrušily. Kdybychom však nejprve určili rychlost obláčku plynu jako $v - W$ a poté rychlost zbytku rakety jako $v + \mathrm{d}v$, dostali bychom analogickou rovnici

$$\begin{aligned} p = mv &= p^* + p^{**} = (mv - qv\,\mathrm{d}t + m\,\mathrm{d}v - q\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v) + (qv\,\mathrm{d}t - qW\,\mathrm{d}t) \\ &= mv + m\,\mathrm{d}v - qW\,\mathrm{d}t - q\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t. \qquad (44) \end{aligned}$$

Opět se vyruší člen mv, zbydou infinitezimální veličiny 1. řádu a navíc člen 2. řádu $-q\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t$, takže po vydělení $\mathrm{d}t$ a úpravě má rovnice nyní tvar

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = qW + q\,\mathrm{d}v. \qquad (45)$$

Nyní provedeme limitní přechod $\mathrm{d}v \to 0$; tím ovšem poslední člen vymizí, takže výsledná rovnice vyjde stejná jako rov. (43). Subtilní úvaha, zda uvažovat vzájemnou rychlost W obláčku vůči raketě před shořením nebo po shoření, tedy nemění nic na konečném výsledku.

Příklad 4.3.2: Barometrická formule. Jak se mění v atmosféře tlak vzduchu s nadmořskou výškou? Uvažujme nejjednodušší situaci klidného vzduchu v mechanické rovnováze.

Řešení:

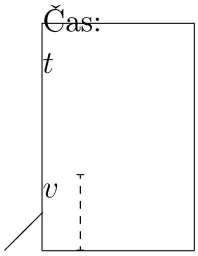
Tlak vzduchu v nadmořské výšce z je vlastně hydrostatickým[11] tlakem známým z Archimédova[12] a Pascalova[13] zákona a je dán tíhou vzduchu nacházejícího se nad úrovní z. V myšleném válci o průřezu s plochou[14] $\mathrm{d}S$ nechť je v nadmořské výšce z tlak $p = \mathrm{d}F/\,\mathrm{d}S$, kde $\mathrm{d}F$ je síla působící kolmo na plochu $\mathrm{d}S$, způsobená tíží vzduchového sloupce se základnou $\mathrm{d}S$.

[11] Pro puristy: aerostatickým

[12] Archimédes ze Syrakus (Sicílie), matematik, fyzik a – v našich pojmech – vynikající technik a aplikátor vědy, 287–212 př.Kr.

[13] Blaise Pascal, francouzský matematik, fyzik, filosof a spisovatel, 1623–1662

[14] Tato plocha by mohla být klidně konečná a nikoli infinitezimální, aniž by to ovlivnilo další postup; neuvažujeme totiž jakoukoliv závislost ve vodorovných směrech x a y. Berme to jako cvičení na situaci s několika nezávislými infinitezimálními veličinami.



Přesuňme se o infinitezimální výšku $\mathrm{d}z$ výše. Tam bude tlak nižší o tíhu způsobenou válečkem o základně $\mathrm{d}S$ a výšce $\mathrm{d}z$, který tedy má objem $\mathrm{d}V = \mathrm{d}S.\,\mathrm{d}z$, hmotnost $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$ a tedy $\mathrm{d}F = g\,\mathrm{d}m = \rho g\,\mathrm{d}V$. Změna tlaku $\mathrm{d}p$ je proto

$$\mathrm{d}p = -\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S} = -\frac{\rho g\,\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S} = -\rho g\,\mathrm{d}z\ . \tag{46}$$

Rovnice $\mathrm{d}p = -\rho g\,\mathrm{d}z$ se nazývá *barometrická formule*; můžeme ji řešit, známe-li (z termodynamiky), jakou má vzduch hustotu ρ při tlaku p, tj. závislost $\rho = \rho(p)$, resp. $\rho = \rho(p, T)$ při různých teplotách T.

Příklad 4.3.3: Fyzikální význam operátorů ∇, grad

Vektor $\mathbf{grad}\,\varphi$ má směr nejprudšího stoupání funkce φ; je kolmý k „vrstevnici" – ku ploše dané rovnicí $\varphi(x) = \mathsf{konst}$. K významu skalárního operátoru $\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{grad}$ viz rozbor rov. (39).

Řešení:

Uvažujme bod $\boldsymbol{r}_0$, v němž $\varphi(\boldsymbol{r}_0) = \varphi_0$, a posunutí $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ vedoucí do bodu $\boldsymbol{r}_0 + \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ s toutéž hodnotou $\varphi(\boldsymbol{r}_0 + \mathrm{d}\boldsymbol{r}) = \varphi_0$. Pak je $\mathrm{d}\varphi = \varphi_0 - \varphi_0 = 0$, přičemž v rozvoji do 1. řádu platí

$$\mathrm{d}\varphi = \varphi(\boldsymbol{r}_0 + \mathrm{d}\boldsymbol{r}) - \varphi(\boldsymbol{r}_0) = \Big(\varphi(\boldsymbol{r}_0) + \mathbf{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r}_0)\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{r}\Big) - \varphi(\boldsymbol{r}_0) = \mathbf{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r}_0)\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{r}. \tag{47}$$

Protože $\mathrm{d}\varphi = 0$, je vektor $\mathbf{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r}_0)$ kolmý k vektoru posunutí $\mathbf{d}\boldsymbol{r}$ ležícímu na „vrstevnici".

Příklad 4.3.4: Fyzikální význam operátoru div

Je-li $\boldsymbol{v}$ rychlost tekutiny v bodě $\boldsymbol{r}_0$, pak skalár $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$ udává, jaký objem tekutiny se ztrácí v okolí tohoto bodu (má-li tekutina hustotou ρ, pak $\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})$ udává ztrátu v hmotnosti).

Řešení:

Příklad 4.3.5: Fyzikální význam operátoru rot

Vektor $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}$ měří otáčení tekutiny kolem osy $\boldsymbol{a}$ (ve smyslu pravidla pravé ruky).

Řešení:

5 Integrál

5.1 Zavedení

5.1.1 Jednoduchý integrál, primitivní funkce

Je-li $F' = f$ na intervalu $[a, b]$, pak funkci f nazýváme derivací funkce F a funkci F nazýváme **primitivní funkcí** k funkci f neboli (neurčitým) integrálem[15] funkce f.

[15] Pro upřesnění: Newtonův integrál.

Primitivní funkce je určena jednoznačně až na aditivní konstantu, protože funkce $F(x)$ a $F(x) + \mathsf{konst}$ mají touž derivaci. Výraz

$$F(b) - F(a) \equiv [F(x)]_a^b = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{48}$$

nazýváme (určitým) integrálem z funkce f od dolní meze $x = a$ do horní meze $x = b$.

V praxi většinou počítáme integrál jako primitivní funkci. Funkce $F(x) = \int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, tj. funkce horní meze integrálu, je primitivní funkcí k f, tj.

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = f(x)$$

$\longleftrightarrow$ Ve fyzice jde zpravidla o funkce natolik jednoduché, že jsou integrovatelné (a to se stejným výsledkem) podle Newtona, Riemanna, Lebesgua, Perrona, Stieltjesa, ... Zpravidla plně vyhovuje Lebesguův integrál; tam, kde by byly potíže (Diracova δ-funkce ve 2. dílu kalkulu), výslovně upozorníme.

♣ Symbol $\int$ je stylizované písmeno S = summa. Symbol diferenciálu $\mathrm{d}x$ pochází z Riemannova pojetí integrálu jako limity součtu ploch obdélníčků

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_k f(x_k).\Delta x_k$$

o základnách Δx_k (na které je rozdělen interval $[a, b]$ a na nichž leží body x_k) a o výškách daných funkčními hodnotami $f(x_k)$.

5.1.2 Integrály ve vícerozměrném prostoru

Integrál v Riemannově pojetí lze názorně rozšířit do vícerozměrného prostoru na integrál dvojný, trojný, ... Jako je $J = \int_{\mathcal{J}} \mathrm{d}x$ délka intervalu $\mathcal{J}$, tak $S = \iint_{\mathcal{M}} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ určuje obsah oblasti $\mathcal{M}$ a $V = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ udává objem V trojrozměrné množiny $\mathcal{V}$.

Užívané značení: $\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z \equiv \mathrm{d}V \equiv \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$. Je radno vypsat exponent (zde 3). Je to jednak z důvodů rozměrových: $\mathrm{d}\xi$ má stejný rozměr jako ξ, tedy $\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$ se měří v m^3, nikoli m, jednak na odlišení od vektoru $\mathbf{d}\boldsymbol{r} \equiv \{\mathrm{d}x; \mathrm{d}y; \mathrm{d}z\}$ i od skaláru $\mathrm{d}r \equiv |\mathbf{d}\boldsymbol{r}|$ figurujících v křivkovém integrálu (tj. podél dané křivky). Integrál přes uzavřenou křivku se značí kroužkem přes integřítko: $\oint$.

Meze integrace se často zkracují, takže např. křivkový integrál z bodu o polohovém vektoru $\boldsymbol{r}_1$ podél křivky Γ do bodu $\boldsymbol{r}_2$ se namísto $\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2}$ zapisuje zpravidla $\int_{(1)}^{(2)}$, nebo dokonce i bez závorek $\int_1^2$, nehrozí-li nedorozumění. Připomeňme, že pro křivku Γ délky s vedoucí z bodu $\boldsymbol{r}_1$ do $\boldsymbol{r}_2$ platí $\int_\Gamma \mathbf{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, zatímco $\int_\Gamma \mathrm{d}r = s$.

5.2 Význam v aplikacích

Integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ udává plochu mezi křivkou f a osou x od $x = a$ do $x = b$ (nad osou x kladně, pod ní záporně).

Trojný integrál $\displaystyle\iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \equiv \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{d}V = V'$ přes oblast $\mathcal{V}$ určí její trojrozměrný objem V'.

Trojný integrál $\displaystyle\iiint_{\mathcal{V}} \rho(\boldsymbol{r})\ \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \equiv \iiint_{\mathcal{V}} \rho(\boldsymbol{r})\ \mathrm{d}V = m$ určí hmotnost m tělesa rozloženého v oblasti $\mathcal{V}$ s hustotou ρ.

Mnoho dalších interpretací plyne ze vztahu integrálu a derivace.

5.3 „Slovník" pro integrály

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{pro } n \neq 1 \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x \qquad \int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\left(\frac{|x|}{x_0}\right) \qquad \int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \qquad \int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x$$

U primitivní funkce může být aditivní konstanta; pro stručnost ji zde nevypisujeme.

Konstanta x_0 u logaritmu je libovolná, ale má fyzikální rozměr, a to stejný jako x. Jejím zavedením předejdeme rozměrovým nesrovnalostem typu „logaritmus metru".

5.4 „Gramatika" pro integrály

Integrál lineární kombinace:

$$\int (\alpha f \pm \beta g) \, \mathrm{d}x = \alpha \int f \, \mathrm{d}x \pm \beta \int g \, \mathrm{d}x \tag{49}$$

Integrace per partes:

$$\int f' g \, \mathrm{d}x = fg - \int f g' \, \mathrm{d}x \tag{50}$$

Integrace substitucí:

$$\int f(g(x))\, g'(x) \, \mathrm{d}x = \int f(y) \, \mathrm{d}y \tag{51}$$

Derivace podle parametru:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int f(x,\alpha) \, \mathrm{d}x = \int \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x,\alpha) \, \mathrm{d}x \tag{52}$$

Příklad: Známe integrál $\int \mathrm{e}^{\alpha x} \, \mathrm{d}x = \alpha^{-1} \, \mathrm{e}^{\alpha x}$. Derivací obou stran podle α dostáváme

$$\int x \, \mathrm{e}^{\alpha x} \, \mathrm{d}x = -\alpha^{-2} \, \mathrm{e}^{\alpha x} + \alpha^{-1} x \, \mathrm{e}^{\alpha x} .$$

Tak lze opakovanou derivací a nakonec dosazením $\alpha = 1$ snadno spočítat pro libovolnou mocninu n integrály typu $\int x^n \, \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$, $\int x^n \cos x \, \mathrm{d}x$, $\int x^n \sin x \, \mathrm{d}x$ apod. (Téhož výsledku zde dosáhneme i integrací per partes volbou $f = x$, $f' = 1$, $g = \mathrm{e}^x$ apod.)

¶ *integrál* ze střlat. integrālis = celkový < lat. integer = netknutý, neporušený z in- = ne-; tangō, -ere, tetigī, tāctum = dotýkati se; ¶*primitivní* = prvotní z lat. prīmitīvus t.v. < prīmus = přední, první; ¶*substituce* z lat. substituō, -ere, -uī, -ūtum = dosadit, ze sub- = pod-; stō, -āre, stetī, stātūrus = státi; ¶*per partes* = po částech z lat. per partēs t.v., per = přes; pars, -tis f. část.

6 Vektorový prostor se skalárním součinem

7 Fourierovy řady

8 Fourierova transformace

Perioda $l \to \infty$

9 Diracova δ-funkce