

Nejistoty typu A, B a pojem hodnoty veličiny

Jan Obdržálek

MFf UK – ÚTF, V Holešovičkách 2, 180 00 Praha 8
jan.obdrzalek@mff.cuni.cz

Abstract The base concepts concerning “uncertainty” and related topics are presented, explained using examples and discussed. Namely, the concept of “true value” passed significant evolution from so called “Error approach” to “Uncertainty approach”. The concept of quantity value itself is consistent with the concept of uncertainty, as shown, rather than „exact value“ presented by one exact real number.

Certain particular schisma in the past Czech terminology has been solved and some general rules for terminology are mentioned.

This paper was supported by the Czech Ministry of Education, Grant agency INGO II, project LG13026.

1. To jisté o nejistotě

1.1. Motivace

„Nobody is perfect“, jak známe mj. ze závěru filmu Někdo to rád horké. Taky víme, že „Dvakrát nevstoupíš do téže řeky“, a my bychom ještě fyzikálně dodali „a změříš-li její průtokovou rychlost dvakrát, nenaměříš totéž“. Přitom celá fyzika je založena na měření a souhlas s naměřenými hodnotami je koneckonců základní kritérium pravdivosti a oprávněnosti jakékoli fyzikální teorie. (Od Galileiho údajně pochází rada „Co se dá změřit, to změř, a co se nedá změřit, převed’ na měřitelné.“) V praktických aplikacích fyziky je měření reality ještě závažnější, neb tam jde zpravidla i o peníze, a to začasťe o peníze nemalé.

Podobná situace nastává i v jiných disciplínách. Někdy potřebujeme velký počet číselných hodnot zachytit co nejjednodušeji. Víme samozřejmě, že se tím část informace ztrácí, ale my ji ochotně oželíme, zachytíme-li dostatečně věrohodně vše, co jsme při našich měřeních pokládali za opravdu podstatné.

Proto nezoufejte. Síla slabých spočívá v tom, že jsou si své slabosti vědomi. Stačí proto vědět si rady, jak si počínat, když opakovaná měření nedávají totéž, a jak tuto skutečnost sdělit všem těm ostatním, které naše výsledky zajímají.

Záměrně jsem zvolil začátek v nezvykle volném slohu; pokusím se totiž ve výkladu pokračovat ve volném slohu a vyhnout se odborným termínům, jen abych zdůvodnil argumenty uvedené na konci – v terminologii.

1.2. Opakované měření jediné neznámé hodnoty; nejistota typu A

Předpokládejme, že měříme veličinu, která má určitou, nám ale a priori neznámou hodnotu; budiž to např. prahové napětí $U_{\text{prah}} = x$, při kterém zaniká výboj v plynu.

Měříme opakovaně. Je to sice v různých situacích (minimálně v různých dobách, v různých místech nebo obojí), ale předpokládáme, že tyto situace mají z našeho hlediska stejné vlastnosti. Výsledkem měření je posloupnost N hodnot

$\{x_k\}_{k=1}^N$. Pokládáme-li všechna měření za rovnoprávná, můžeme podle [1], [2] určit průměr (neboli aritmetickou střední hodnotu) z N nezávislých hodnot vztahem

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k, \quad (1)$$

dále varianci s^2 z pouze $N - 1$ nezávislých hodnot $x_k - \bar{x}$; všech hodnot je sice N , ale je mezi nimi 1 vztah, totiž $\sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x}) = 0$; proto zavádíme

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2$$

a konečně veličinu¹

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} (\sum_{k=1}^N x_k^2 - N\bar{x}^2)} \quad (2)$$

(přesně zvanou výběrová směrodatná odchylka nezávislých pozorování), která představuje *standardní nejistotu typu A*. Je pro ni příznačné, že ji můžeme učinit teoreticky libovolně malou tím, že zvětšíme počet N měření. (Při *Gaussově* neboli *normálním* rozdělení sice roste maximální absolutní odchylka jednotlivého měření při rostoucím N jako \sqrt{N} ; měřeních je však N , takže střední odchylka *klesá* jako $\frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}$.)

Student v praktiku má zpravidla za to, že je ideální být líný a měřit jen jednou. Pak má jediný výsledek a nezaváhá, kolik vlastně vyšlo. Asistent mu ovšem v zápětí ochotně vysvětlí, že pak je sice opravdu, $x_k - \bar{x} = 0$, ale nulu má i ve jmenovateli před sumou. Čili ať to bez odmluv naměří ještě devětkrát. Dejme tomu, že postupně naměří hodnoty $x/\text{V} = 28,4; 28,4; 28,3; 28,7; 28,8; 28,5; 28,6; 28,2; 28,4; 28,1$; pak vyjde $\bar{x} = 28,44$; $s \approx 0,22$ čili

$$U_{\text{prah}} = 28,44(22) \text{ V},$$

a je zřejmé, že po dalších měřeních může standardní nejistota dále klesat. Mimochodem, zápis tohoto typu (poslední číslice nejistoty i střední hodnoty si polohou odpovídají) je kratší, přehlednější i správnější než dosud často užívaný zápis

$$U_{\text{prah}} = (28,44 \pm 0,22) \text{ V},$$

¹ Výběrový parametr se obvykle značí x (zde je to napětí U), jeho rozptyl pak u , což ovšem nesouvisí se značkou U užitou zde pro napětí. Výběrovou směrodatnou odchylku průměru

značíme $s_{\bar{x}_k}$, výběrový rozptyl $s_{\bar{x}_k}^2$, výběrovou kovarianci $S_{\bar{x}_j, \bar{x}_k}$.

kteřý vlastně znamená něco úplně jiného, totiž jen dvě krajní hodnoty a nic mezi nimi (jako v následujících vzorcích (3)-(5) nebo ve vzorci pro kořen kvadratické rovnice $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$).

Potud tedy nejistota typu A. Odchytky jednotlivých dílčích hodnot pokládáme za náhodné a jejich příčiny za neznámé. Proto také zvětšováním počtu měření můžeme nejistotu typu A snižovat. Tím se nejistota typu A liší od typu B.

1.3. Nejistoty typu B

Bohužel, naše úvodní tvrzení „nobody is perfect“ platí i o měřicím přístroji. Ten je pak *zdrojem nejistot typu B*, které je rovněž nutno zahrnout do výsledku². Jestliže má použitý voltmetr třídu přesnosti 0,1 a plný rozsah 1 V, přičemž údaj se může lišit od měřené hodnoty o 0,001 V, je nutno tuto nejistotu také započítat. Jde-li o digitální údaj limitovaný počtem cifer, můžeme předpokládat, že např. 0,257 znamená se stejnou pravděpodobností cokoli v intervalu délky 0,001 kolem této hodnoty (někdy symetricky, jindy ne). Konečný počet míst pochopitelně není jediným zdrojem nejistot; digitální měřicí přístroj obsahuje převodník, jehož činnost může být ovlivňována např. teplotou prostředí.

Nejistoty těchto typů nesnížíme opakovaným měřením. Přitom příspěvky těchto nejistot, předem zpracované s přihlédnutím k typu statistického rozdělení pro každou z nejistot, je ovšem rovněž nutno do výsledku zahrnout.

1.4. Skládání nejistot

Uvažme, že máme několik vlivů, z nichž každý může ovlivnit údaj měřicího přístroje, aniž se mění měřená veličina. Jak zjistíme jejich úhrnný vliv na výsledek?

Klíčová otázka je, zda lze tyto rušivé vlivy pokládat za nezávislé (nepřesnost tabulkových hodnot a pracovní teplota), nebo zda jsou spolu provázány (teplota ovlivní jak pozorovaný děj, tak i činnost převodníku v měřiči). Vzájemné souvislosti – korelace těchto vlivů – lze po jejich zjištění popsat *kovarianční maticí*; stačí totiž lineární přiblížení, protože odchytky způsobené rušivými vlivy jsou zpravidla malé, a matice popisuje nejobecnější lineární transformaci mezi vektory, kterými popisujeme jak jednotlivé hodnoty měřené veličiny, tak i hodnoty použitých konstant apod.

Uvažujme dva rušivé vlivy s účinky Δx_1 a Δx_2 . Ty se v nejhorším případě sečtou:

$$\Delta x = \pm(|\Delta x_1| + |\Delta x_2|), \quad (3)$$

působí-li v souhlasném směru; nebo odečtou:

$$\Delta x = \pm(|\Delta x_1| - |\Delta x_2|) \quad (4)$$

pro směry protilehlé. Oba případy signalizují nejsilnější korelaci obou vlivů. Naopak nezávislost vlivů se projeví tak, že vektory zobrazující jejich účinek budou navzájem kolmé. Výsledná odchylka bude tedy podle Pythagorovy věty rovna

$$\Delta x = \pm\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}. \quad (5)$$

Geometrická představa usnadní pochopit, proč nezávislost vektorů zobrazujeme jejich kolmostí.

Stejnou představu a euklidovskou vzdálenost můžeme přenést do N -rozměrného prostoru; při výpočtu střední hodnoty (1) i odchytky (2) z N měření figurují naměřené hodnoty v součtech

$$\sum_{k=1}^n x_k; \sum_{k=1}^n (x_k - A)^2$$

převoditelných na jednoduché součty

$$\sum_{k=1}^n x_k; \sum_{k=1}^n x_k^2$$

a lze tedy snadno dodatečně přidávat další členy z následujících měření k dosavadním, zahrnout je do vyhodnocení a upřesnit tak výsledek. Proto má také každá slušnější kalkulačka pod hrdým názvem „Statistika“ výpočty obou hodnot (1), (2) pro postupně zadávanou posloupnost hodnot x_k .

1.5. Další zobecnění nejistot

K úplnosti (nerozebíráme-li ovšem jen letmo zmíněné korelované vlivy) zbývá dodat ještě dvě skutečnosti.

Především, zatím jsme uvažovali všechna měření za „stejně závažná“ (stejně kvalitní, hodnotná apod.). Můžeme však mít rozumný důvod „oznámkovat“ jednotlivé údaje x_k

tím, že jim připíšeme různé váhy w_k . Nejjednodušší představa je, že prostě příslušnou hodnotu započteme nikoli jednou, ale – „pro veliký úspěch“ – třeba sedmkrát; pak bude mít váhu 7. Pochopitelně se příslušně zvětší počet údajů ve jmenovateli zlomku před sumou ve střední hodnotě. Budeme tedy mít *vážený průměr* (s váhou w) podle vzorce

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^N w_k x_k}{\sum_{k=1}^N w_k}$$

a snadno nahlédneme, že vzorec (1) vyjadřuje totéž, zvolíme-li $w_k = 1$, tedy zvolíme-li všechny váhy stejné (a rovné jedné).

Poslední zobecnění se týká *rozšířené nejistoty*. Při některých rozděleních (rovnoměrné, trojúhelníkové) je už v podstatě dáno, že odchylka konkrétní hodnoty od střední hodnoty má svou nepřekročitelnou mez. Při jiných, zejména při normálním, v praxi nejčastěji užívaném, taková principiální mez není. Pravděpodobnost odchytky, pravda, klesá exponenciálně s její velikostí, nicméně alespoň teoreticky zde pevná mez není.

Následující tabulka ukazuje význam parametru σ (analogického směrodatné odchylce) pro normální rozdělení s hustotou pravděpodobnosti

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

(čím větší σ , tím plošší průběh). Tabulka uvádí pravděpodobnost p , že konkrétní hodnotu nalezneme v intervalu $(-k\sigma; +k\sigma)$.

² A platí to i o měřicí metodě, o podmínkách, za nichž měříme (teplota, tlak, ...), o tabulkových konstantách, a dokonce i o použitých vzorcích, pokud totiž obsahují empirické vztahy a empirické konstanty. Toto vše přispívá k nejistotě typu B.

p	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
k	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

V praxi proto někdy zadáme namísto nejistoty σ hodnotu $k\sigma$, kde $2 \leq k \leq 3$. To je tzv. *rozšířená nejistota*, která zajistí dostatečnou spolehlivost výsledku pro kritické případy.

2. Pojem hodnoty veličiny

2.1. Opravdu přesná hodnota?

Lehce pikantní se zdá, že nám zde zatím nikde nevystupuje to, co nás vlastně zajímá: veličina U_{prah} , kvůli které měření provádíme. Její hodnota prostě není známa. Navíc je pro různé veličiny jak alternativa, že je zcela přesná (např. počet pulzů), ale taky nemusí striktně vzato existovat: pokud je totiž dána racionálním číslem (a tím spíše číslem reálným), pak zpravidla *není* onou exaktní hodnotou čísla z matematiky, ale je stejně jen přiblížením, jakýmsi rámcem, kam ji situujeme.

2.2. Jak přesně?

K představě „matematicky přesné“ hodnoty veličiny uvedme dvě velmi kritické poznámky:

1) Jakou mám výšku? Podle vojenské knížky 184 cm, což je rozumný údaj. Protože se ale přes noc mé obratle uvolní a přes den stlačují a sesedají, mění se má výška prakticky průběžně a např. přesnost v milimetrech je iluzorní. I kdybychom se však omezili na jediný okamžik měření, pak při vyšší přesnosti – třeba na nanometry – zjistíme, že měřená veličina není dobře definována (a přitom to v praxi nevádí).

2) Jediné racionální číslo ξ je schopno obsahovat veškerou moudrost lidstva (a ještě hodně místa zbude). Např. soubor tohoto článku je kratší než 83 kB, tedy při zápisu 1 B trojčífernými čísly 000 až 255 jde o necelý čtvrtmilion cifer. Ale číslo $\xi = 0,xxx \dots$ kde za nulou je uveden onen čtvrtmilion cifer, je jediné (leží mezi nulou a jedničkou), a z jeho přesné hodnoty lze tento článek přesně rekonstruovat. (Možností je zřejmě $10^{250\,000}$.) Totéž lze ovšem provést třeba s celou Britskou encyklopedií včetně všech obrázků; cifer bude více, ale výsledné číslo ξ' bude opět jediné a $0 \leq \xi' < 1$. A nakonec i se všemi knihami ve všech knihovnách světa dohromady, i se všemi daty na celém Internetu v tomto okamžiku...

S ohledem na tato fakta musíme chápat třeba hodnotu U_{prah} , s níž jsme začali. Proto zavádíme dohodu jistou hodnotu, zvanou *konvenční hodnota* [conventional true value] jakožto hodnotu pro daný účel dostatečně vyhovující. Např. konvenční hodnota Avogadrovy konstanty leží v rámci $N_A = 6,022\,141\,29(27) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$; uvedená přesnost nám při současném stavu techniky postačuje. Také se ovšem může stát, že Avogadrovu konstantu nově zadefinujeme prostě její číselnou hodnotou, a nikoli pomocí uhlíku jako dosud. Pak bude ovšem – definatoricky – zcela přesná, ale na přesnosti měření se stane závislý (celočíselný) počet atomů ^{12}C ve 12 g uhlíku ^{12}C .

3. Terminologie

3.1. V čem byl vlastně problém?

Přehlédneme-li velmi volný vyjadřovací styl a ignorování korelovaných vlivů, byla (snad) celá předchozí část jasná. To, co jasné není, bylo to, jak se vlastně správně řekne česky „true value“: máme říct, že je to hodnota skutečná? nebo pravá? nebo snad „doopravdická“? (Poslední návrh podávám jen proto, abychom se všichni shodli: když nic jiného, tak že toto slovo jako termín *doopravdicky* nechceme!)

Zatímco u většiny anglických termínů se (my Češi) shodneme, jak je budeme překládat, u několika málo termínů nebyly názory jednotné, resp. vykrystalovaly různé v různých oborech. Historické důvody jsou zřejmé: Jde o pojmy vyskytující se v různých, často navzájem značně odlehklých oblastech vědy i techniky. Přitom však ne všechny tyto pojmy se vyskytují v příslušných oborech stejně často; ne každý obor také potřebuje vedle základního tvaru také další odvozeniny. A ovšem – jako obvykle – každý návrh měl své výhody i nevýhody.

Situace byla zejména neudržitelná tam, kde byl týž český termín (přesnost, správnost) používán v různých oblastech v jiných významech. Proto se ÚNMZ na základě rozboru rozhodl a zavedl terminologii společnou (viz tabulka níže), za vydatné součinnosti všech zúčastněných. A podařilo se mu to.

3.2. A jak si počínat příště?

Samotná změna termínů, resp. náhrada jednoho (historického) termínu novým je přirozený a nutný jev. Rozvoj techniky i vědy vede k odlišování a rozlišování okolností, které dříve nebyly známy nebo které dosud nebylo potřeba rozlišovat. Příkladem par excellence jsou názvy prvků vzácných zemin, konkrétně didym, který se při podrobnějším rozboru „rozpadl“ na dva další prvky praeodym a neodym.

Při tvorbě nových termínů se projevují různou měrou různé aspekty [3]:

- Složitější konstrukce se v praxi zjednodušují, jde-li o pojmy často se vyskytující. Tak se z původně slangových slov „elektronka“ a „obrazovka“ staly řádné termíny namísto původních „elektronová lampa“ a „obrazová elektronka“. Zdá se, že na stejné „povyšení“ čeká slovo „rentgenka“.
- Univerbálnost (jednoslovnost) je výhodná nejen stručností (kterou prosazuje hovorový jazyk), ale i snadnější tvorbou odvozenin, popř. složenin: Tak je výhodnější *zkrat* než *krátké spojení*: lze *zkratovat*, měřit *zkratový* proud atp.. Rovněž *interakce* oproti *vzájemnému působení* umožňuje tvary *interagovat*, *interakční*, *interakčně* atp..
- Možnost odvozování dalších slov je též žádoucí. Zde často vadí konzervativnost uživatelů a (zbytečná) obava ze zatím nezvyklého slova. Tvar *energiový* od energie je stejně správný jako *sériový* od série, nezvyklé *t* v *napětový* má paralelu ve schodišťovém přepínači apod. Slova s koncovkou -nost jsou schopna dalších úprav a odvozování, viz *hmotnostní defekt*.
- Termín nemá být výklad. (Oč je snadnější *flip-flop* než *bistabilní klopný obvod*!) Zejména angličtina je velmi to-

lerantní vůči hovorovému stylu, náznakům, ba i žertu: jednotka *barn* pochází ze sportovního prostředí z úsloví *big as a barn*, velký jako vrata do stodoly.

- Analogie s jinými jazyky je vítána, protože usnadní srozumitelnost (*polovodič* jako *Halbleiter* či *semiconductor*). Není však nutno vždy překládat (zvláště doslova), má-li čeština jiný jazykový prostředek (centre of weight = těžiště).
- Systémovost v tvoření je jedním z hlavních pilířů terminologie. Ale zvyk může být neobyčejně tuhý. Zkuste prosadit, aby se říkalo *teplotoměr* a ne *teploměr*, když měří teplotu a ne teplo!
- Je velmi nebezpečné *zaměnit* význam slova; jednodušší a bezpečnější je užít slovo úplně jiné, třeba i internacionální.

Každý lingvista nás však přesvědčí o tom, že jazyk (a to i jazyk terminologie!) je živý organismus. Vyvíjí se, ať už chceme či ne, a „mocenské zásahy“ jsou zpravidla neúspěšné, nemají-li vnitřní podporu uživatelů. Zde se ale bohužel nejspíš projevují i dozvuky totality: argumentace není vždy korektní, je neochota připustit argumenty druhé strany („porážka“ na jednom poli bývala porážkou se vším všudy), a tak se používají pseudoargumenty k obhajobě stůj co stůj, např.:

- takhle se to říká odjakživa (opravdu? Kde to je doloženo?)
- to se používá všude (anebo jen tam, kam já chodím?)
- tohle je směšné slovo (anebo jen pro mne nezvyklé?)

Každý terminolog ví, jak nevděčná je jeho práce: termín, který se ujme, je později samozřejmý a bezproblémový (třeba *vodík*, *spin*). Termín, který se neujme, je později směšný a trapný (*d'asík* = *kobalt*, *vrt* = *spin*). A přesto je nutné se terminologii věnovat, vytvářet ji, udržovat – stejně jako jazyku, kterým mluvíme a kterým se dorozumíváme s ostatními.

4. ZÁVĚR

Bylo vyloženo nové pojetí nejistot typu A a B a připomenuty základní pojmy z oblasti měření a jeho vyhodnocení. Záměrně volný sloh a jazyk umožnil sice vysvětlit věcnou podstatu problému, zároveň však poukázal na potřebu jistého sjednocení terminologie. Konkrétní vyřešený terminologický problém z problematiky představuje úspěšný výsledek.

Poděkování

Tento článek byl jen s nepodstatnými úpravami převzat z *Akustických listů* [4]; za laskavý souhlas děkujeme ČSAS. Práce vznikla s podporou Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy (program INGO II, projekt LG13026).

Reference

- [1] Mod Guide the expression of uncertainty in measurement:1995. ČSN P ENV 13005
- [2] TNI 01 4109-3 Nejistota měření – Část 3: Pokyn pro vyjadřování nejistoty měření (GUM:1995) (Pokyn ISO/IEC 98-3)
- [3] Fyzikální veličiny a jednotky SI, Obdržálek J., AlBra Úvaly, 2004 (Dodatek C – Norma a jazyk, Obdržálek J., Vlková V.)
- [4] Nejistoty typu A, B a pojem hodnoty veličiny, Obdržálek J. *Akustické listy*, **20**(2), červenec 2014, str. 3-7
- [5] Metrologická terminologie v chemii. Plzák Z., EURACHEM, 2000
- [6] TNI 01 0115 Mezinárodní metrologický slovník – Základní a všeobecné pojmy a přidružené termíny (VIM)
- [7] ČSN ISO 5725: 1997
- [8] ČSN ISO 3534-1, -2: 1994
- [9] Závěrečná zpráva o plnění rozborového úkolu RU/0821/06, ÚNMZ

angl.:	EURACHEM [5]	ČSN 01 0115 [6]	ČSN ISO 5725: 1994 [7]	ČSN ISO 3534: 1994 [8]	nyin [9] (TNI 01 0115, TNI 01 4109-3)
accuracy	správnost	přesnost		přesnost; exaktnost	přesnost
bias	odchylka; vychýlení	chyba správnosti	strannost; vychýlení	strannost; vychýlení	vychýlení
precision	přesnost		shodnost; preciznost	shodnost; preciznost	preciznost
true (value)	skutečná, pravá (hodnota)	pravá (hodnota)		pravá; skutečná (hodnota)	pravá (hodnota)
trueness	pravdivost	správnost		správnost	pravdivost