Fyzika pro matematiky — NMFY261 — Elmg. pole

(předběžný text)

J. Obdržálek

ke dni 2019-01-02

Obsah

Rozsah: 1 semestr (2/2 Zk) 2.roč. M 2015-6

Reference

[1] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: Fundamental physics. John Wiley & Sons, 2008 (8. vyd.).
Čes. překlad: 1. vyd.: FYZIKA, 5 dílů, VÚTIUM, Prometheus 2000, dotisky 2003, 2006;
2. vyd.: FYZIKA, 2 díly, VÚTIUM, 2014.

[2] B. Sedlák, I. Štoll: Elektřina a magnetimus. Academia, Praha 1993

[3] J. Kvasnica: Fyzikální pole. SNTL, Praha 1964

[4] J. Kvasnica: Teorie elektromagnetického pole. Academia, Praha 1985

[5] J. A. Stratton: Teorie elektromagnetického pole. SNTL, Praha 1961 (předl. z angl.)

[6] V. Votruba, Č. Muzikář: Teorie elektromagnetického pole. NČAV, Praha, 1958

[7] A. Zangwill: Modern electrodynamics. Cambridge University Press, 2013

[8] Normy:

ČSN ISO/IEC 80000: Fyzikální veličiny a jednotky, ÚNMZ (dřívější: ČSN ISO 31);

ČSN IEC 60050: Mezinárodní elektrotechnický slovník (IEV) – zejména tyto jeho části:

část 112: Veličiny a jednotky

část 113: Fyzika pro elektrotechniku

část 131: Teorie obvodů

[9] ÚNMZ: Grafické značky používané na schématech a výkresech v elektrotechnice podle databáze IEC 60617 DB

[10] Moje webová stránka: http://utf.mff.cuni.cz/~jobdr/

Čtenářům

Za pečlivé pročtení a několik oprav děkuji zejména posluchačkám a posluchačům (v abec. pořadí) Štěpánu Hudečkovi, Martině Šarmanové, Jiřímu Zemanovi.
Za zbylé nedostatky a event. chyby jsem ovšem odpovědný pouze já.
Velice uvítám i všechny další připomínky vedoucí ke *zlepšení* textu (spíš než ke zpřesnění, viz kap. 1.1.4, odstavec *Jak*). Napište mi je prosím na adresu

JAN.OBDRZALEK@MFF.CUNI.CZ

1 Základní přístup

2018–10–12

1.1 Úvodem: pro koho, o čem a jak

1.1.1 Úvodem

Leží před vámi, řekl bych, podpůrný text, zdaleka nekompletní, v němž jsou podrobněji rozvinuty ty partie klasické elektrodynamiky, které dělávají studentům potíže – ať už „technicky“ nebo „ideově“.

Sdělte mi, co vám bylo těžko srozumitelné, a nejlépe z čeho jste příslušné partii nakonec porozuměli. Nejde mi ani o původnost, ani o eleganci, ba ani o vtipnost, ale opravdu jen o to, abych čtenáře dovedl co nejpříjemnější cestou k *pochopení* (nikoli naučení se) *všeho důležitého*, co s elektromagnetickým polem souvisí: pojmy, jejich souvislosti, představy. Příjemná cesta by neměla být ani moc dlouhá, ani moc strmá; tím je občas dáno členění textu.

1.1.2 Pro koho

Tento učební text je určen především posluchačům oboru Matematika na MFF UK po absolvování podobné přednášky z mechaniky a před zkouškou z části zabývající se elektromagnetismem. Může ho však číst (a porozumět mu) každý, kdo:

- z fyziky absolvoval střední školu a setkal se tedy s pojmy elektrické pole, Coulombův zákon, elektrický proud, magnetismus, a to na jakkoli jednoduché úrovni;
- z matematiky má základní znalosti infinitezimálního počtu v rámci obvyklého „kalkulu“, a jinak středoškolské znalosti (trigonometrické funkce, exponenciála).

  Vše další (např. interpretace operátorů grad, div, rot, dále δ-funkce či Fourierova transformace) je uvedeno buď přímo v textu, nebo v Kalkulu pro fyziku, psaném pro tento účel.
  „Kalkul“ je ke stažení na mé webové stránce [10].

1.1.3 O čem

Následující text je jednoduchý úvod do teorie elektromagnetického pole. Je rozšířením ke 3. dílu standardní vysokoškolské učebnice [1], 2. vydání, 2014, zmiňovaném jako HRW. (Číslování z 1. vyd. je v závorkách.)

Koncepčně je hlavní rozdíl v tom, že HRW je zaměřena více prakticky, případně pro techniky. Její výklad je proto ***induktivní*** – vychází z pokusů, a popis je ***integrální*** – HRW např. vychází z *elektrického proudu* I a z něj odvozuje jeho hustotu $\vec{J}$; vychází z *magnetického toku* Φ a z něj odvozuje jeho hustotu $\vec{B}$ apod.

Náš výklad je ***deduktivní*** – vycházíme z Maxwellových rovnic a v ***diferenciálním*** provedení, protože se zaměřujeme spíše směrem *teoretické fyziky*. Primární je proto pro nás hustota $\vec{J}$ elektrického proudu, která se rovná střední hodnotě součinu hustoty ρ náboje a rychlosti $\vec{v}$ jejího nosiče: $\vec{J} = \langle \rho\vec{v} \rangle$; z ní se teprve odvodí celkový proud I jako integrál její normálové složky J_n průřezem vodiče. Podobně je pro nás primární pole magnetické indukce $\vec{B}$, zatímco jeho tok Φ je integrál normálové složky B_n uvažovanou plochou Σ apod.

Maxwellovými rovnicemi (10)-(13) se zde proto zabýváme v ***diferenciálním*** tvaru; z teoretického hlediska jsou jednodušší a srozumitelnější než jejich integrální tvar. Pokračováním tohoto textu může být odvození dalších vlastností a jevů v elektromagnetickém poli z diferenciálního tvaru Maxwellových rovnic: odvození rovnic fyzikální optiky (Fresnelovy vzorce), záření apod.

1.1.4 Jak

Vycházíme z toho, že čtenář bude možná muset později v životě řešit fyzikální úlohy. Něco mu samozřejmě zadavatel poví, ale málo platné, bude mít jiný sloh a lehce jiné představy, než má klasický matematik fyzikou dosud nepostižený. Setká se občas s praktickými otázkami, dílem s otázkami velmi principiálními, ale velmi vágně formulovanými. Dosti podstatnou částí spolupráce s odborníkem jiné profese bývá pochopit, proč a co vlastně potřebuje. Proto je v následujícím textu dost poznámek a vysvětlivek. Občas jsou poznámky mírně odbornější ($\hookleftarrow$), občas populárnější (♣). V textu jsou občas zařazeny se značkou **¿?** nezodpovězené otázky a příklady pro čtenáře. (Dovolte mi uvést zlatý citát, kterým mne inspirovala Mgr. Nováčková: „Škoda každého slova, které řekne učitel místo žáka“). Abyste se ale mohli ujistit, že jste na to přišli správně, je na úplně jiné stránce poznámka se značkou ¡! s odpovědí, i s odkazem na stránku s otázkou. Jinými slovy, čtete-li postupně, ***přeskočte*** petity začínající ¡!. (Např. právě nyní:)

¡! Odp. ze str.16: Označme 1 jako druh A. Víme, že se 1-2 přitahují a 3-4 odpuzují. Copak udělají 1-3? Pokud se přitahují, zkusíme 2-3. Přitahují-li se také, jsou 1, 2, 3 druhu A a platí alternativa 1. Pokud se odpuzují, jsou 2, 3 druhu B a platí alternativa 2. A když se 1-3 odpuzují? Zkuste opravdu nejdříve sami, a až pak hledejte na str. 8.

Snažil jsem se, aby se vám příjemně a efektivně studovalo. Volím co nejsnadnější sloh a dávám přednost stručnému, byť i populárnímu či emotivnímu *náznaku* před plnou precisní formulací všude tam, kde by zejména začátečník mohl špatně odhadnout, co je vlastně podstatné v textu.

♣ Precizní formulace často začátečníka zmate a zasvěceného nudí. Mírně pokročilý si ji může sám vytvořit z náznaku („Škoda každého slova, …“, viz výše). S klidem tedy často vynechávám adjektivum „elektrický“. Příležitostně – v úvodním či motivačním textu – nerozlišuji mezi objektem, fyzikální veličinou (tj. vlastností objektu) a její číselnou hodnotou apod. Riskuji sice, že mne kritici budou pokládat za neználka či diletanta v terminologii, ale já už to nějak vydržím[1] – hlavně když čtenář vnikne co nejrychleji a správně do problematiky. Učíme fyziku, nikoli fyzikopis.

1.1.5 Značení

$$\boxed{\textit{Zvlášť důležitá sdělení jsou v rámečku.}}$$

Tučně jsou vysázeny **termíny**, *kurziva* jen *zdůrazňuje* text. Dodržuji naše *normy* [8] (mají stejný statut jako mezinárodní verze); najdete-li v textu odchylku nebo chybu, prosím upozorněte mne.

Používáme standardní značky. Aby vzorce s parciálními derivacemi byly graficky přehlednější, užíváme často následující zkrácený zápis:

$$\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t};\ \partial_{tt} \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2};\ \partial_r \equiv \frac{\partial}{\partial r};\ \partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x};\ \partial_{yz} \equiv \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \text{ apod., ale pro } i,\ j,\ k \text{ je } \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ atd.}$$

Značku ∂ užíváme také pro *hranici množiny*, např. $\partial\Omega$, zejména při zápisu oblasti integrace.

Zavádíme vektorový operátor „nabla“ $\vec{\nabla}$ a užíváme též označení[2]

$$\vec{\nabla} := \Big(\partial_x;\ \partial_y;\ \partial_z\Big) \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\vec{a} := \vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \partial_x a_x + \partial_y a_y + \partial_z a_z \tag{2}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{a} := \vec{\nabla}\times\vec{a} = \Big(\partial_y a_z - \partial_z a_x;\quad \partial_z a_x - \partial_x a_z;\quad \partial_x a_y - \partial_y a_x\Big) \tag{3}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}} := \vec{\nabla} \quad \text{ve všech ostatních případech:} \tag{4}$$

$$\text{funkce } \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\varphi = \vec{\nabla}\varphi; \quad \text{operátor } \varphi\,\overrightarrow{\mathbf{grad}} = \varphi\vec{\nabla} \quad \text{apod.} \tag{5}$$

1.2 Základní pojmy: hmota (látka) a pole

V tomto odstavci připomeneme základní pojmy z oblasti, kterou budeme studovat. Jak jsme uvedli už v mechanice, je občas dobré vědět, že objekt (např. nosič náboje, nabité těleso) není totéž co jeho atribut – veličina (např. náboj, hmotnost), i když se to často pro stručnost zaměňuje.

1.2.1 Hmota

Hmota V tomto slově (a ovšem také hmotné prostředí, hmotnost …) slyšíme *hmatat*; hmota je něco, na co si lze sáhnout a poznat i se zavřenýma očima, že „tady to je, tam to končí a dál už to není“. Hmota ve stavu pevné látky nebo kapaliny je dosti ostře vymezena v prostoru: někde je, jinde není. Hmota ve stavu plynu už tak snadno hmatatelná není, ale to nám teď nebude moc vadit: podstatnou vlastností každé hmoty v každém stavu totiž je, že je **substancí** – to znamená, že nemůže vzniknout z ničeho a nemůže zmizet jinak, než že se přemístí někam jinam, nebo že se přemění na jinou formu (opět hmoty). Matematický popis jejího pohybu a „nemizení“ nám dává rovnice kontinuity (např. kap. 4.3). Ta říká, že jestliže v libovolné oblasti někdy ubývá nebo přibývá hmoty, pak jenom tak, že tato hmota v tu dobu proudí přes hranici sledované oblasti.

[1] coby expert v IEC/TC 1 Terminology a tři roky předseda IEC/TC 25 Quantities and Units

[2] Obvykle se vektorový charakter vyznačuje tučným typem ∇ a ne už šipkou $\vec{\nabla}$. Zde užívám navíc šipku jen pro zdůraznění. Totéž platí pro vektorové operátory **rot** a **grad**, které zde proto značím $\overrightarrow{\mathbf{rot}}$ a $\overrightarrow{\mathbf{grad}}$.

Látka Termín **hmota** příliš připomíná veličinu hmotnost, a ta bude v elektrodynamice zpravidla nepodstatná[3]. Proto se častěji používá jiný termín, totiž **látka** (látkové prostředí apod.). Znamená totéž co hmota, jenom se jím nezdůrazňuje ona vlastnost – hmotnost. Při studiu elektrických vlastností se nevodiči také často říká **dielektrikum**, při studiu magnetických vlastností **magnetikum** (para-, dia-, fero-,. . .).

Zdroj pole, náboj Některé hmotné objekty (tělesa) na sebe působí na dálku, např. magnety nebo elektrony. Abychom toto působení popsali, zavedeme pojem **pole** v užším slova smyslu (1.2.2) jakožto prostředníka tohoto působení, a působící těleso v tomto kontextu nazveme **zdrojem** tohoto **pole** (v obou uvedených případech – magnety i elektrony – jde o elektromagnetické pole). Zdrojem elektromagnetického pole je **elektrický náboj**. Speciálním projevem pohybujícího se náboje je **elektrický proud** odpovědný za vznik magnetického pole. Obojí může být i na úrovni molekulární, atomární či subatomární; ***spin*** nabitých částic (kvarků) je zdrojem magnetického pole těchto částic.

Objekt – zdroj – se nazývá ***nosič náboje***; termín **náboj** popisuje fyzikální veličinu. (Často se však pro stručnost, srozumitelně, byť nepořádně, nazývá nábojem i nosič sám: „Dva náboje na sebe působí silou. . . “). **Bodový náboj** však popisuje objekt – trojslovné *bodový nosič náboje* by bylo zbytečně dlouhé. Zdrojem magnetického pole může být i **spin**, aditivní vektorová veličina s charakterem momentu hybnosti, atribut elementárních částic buď nabitých (např. elektron) nebo alespoň složených z nabitých částic (např. neutron jako celek neutrální, ale složený z nabitých kvarků).

Náboj se v úloze může vyskytovat dvojím způsobem:

- explicitně popsaný **volný** coby náboj, který dodáme sami a řídíme jeho pohyby — s výhradou uvedenou u vodičů.

- implicitně popsaný **vázaný** coby náboj těch částic (molekul, atomů, iontů, elektronových oblaků,. . .), které tvoří látku. *Fenomenologická* teorie Maxwellova ho popíše tím, že zavede **elektrickou polarizaci** $\vec{P}$, **magnetickou polarizaci** $\vec{J_\mathrm{m}}$ (či magnetizaci $\vec{M} = \vec{J_\mathrm{m}}/\mu_0$) a **konduktivitu** (vodivost) σ.
  Vázané náboje mohou být v látce *fixovány* (jádra atomů tvořících látku, pokud se předmět mechanicky nedeformuje), *posunutelné* na mikroskopickou vzdálenost (ty náboje tvořící dielektrikum, jejichž posun se projeví jako polarizace dielektrika, např. vnitřní elektrony) nebo *pohyblivé*, posunutelné na makroskopickou vzdálenost (např. vodivostní elektrony v kovu).

Pohybové rovnice pro zdroje Poloha zdrojů může být dána. Pokud by se měla měnit, pak to bude podle vhodných pohybových rovnice, v našem případě podle Newtonova pohybového zákona síly $m\vec{a} = \sum \vec{F}$. Ten ovšem bude obohacen o členy popisující působení pole na náboj – sílu Coulombovu $\vec{F} = q\vec{E}$ od elektrického pole $\vec{E}$ a sílu Lorentzovu $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$ od magnetického pole $\vec{B}$.

1.2.2 Pole

Pole obecně Z *matematického* hlediska popíšeme pole prostě funkcí, jejímž argumentem bude polohový vektor; může ovšem záviset i na dalších proměnných, třeba na čase, na teplotě aj.. Je-li tato funkce skalární (vektorová, tenzorová,. . .), budeme nazývat i takové pole skalární (vektorové, tenzorové,. . .). V širším smyslu budeme užívat i ve fyzice termín pole stejně volně jako v matematice, tedy např. pro teplotní pole či tlakové pole.

Pole v užším slova smyslu Toto vymezení pole bude nové; bude jakýmsi protikladem k pojmu látky. Budeme říkat, že někde v prostoru se nachází **pole**, jestliže se tam některý předmět, který v tomto kontextu zde budeme nazývat **akceptor** takového pole, bude chovat jinak, než když tam pole není. Předpokládáme, že toto pole vytvořil nějaký předmět, který v tomto kontextu zde budeme nazývat **zdroj** takového pole. **Pole** tedy zprostředkuje působení mezi dvěma objekty – zdrojem a akceptorem.

Pro elektromagnetické pole, kterým se zde zabýváme, platí princip superpozice (str. 18), tj. dílčí elektromagnetická pole všech zdrojů se sčítají; na akceptor působí tedy celkové pole ve smyslu součtu všech *ostatních* zdrojů.

[3] To samozřejmě platí jen, pokud se nebudeme výslovně zabývat dynamikou pohybu zdrojů pole.

Oddělením pojmů *zdroj* a *akceptor* zabráníme, aby ve výpočtu došlo k působení zdroje na sebe sama (tj. týž předmět by byl současně i zdroj, i akceptor pole), což by zpravidla vedlo k problémům typu nekonečně velké „vlastní“ energie takového akceptoru svého vlastního pole. Odstranění takovéto nekonečné, ale s časem neproměnné energie (která se tedy fyzikálně neprojevuje a jenom vadí při matematických výpočtech) se nazývá **renormalizací** v příslušné teorii.

♣ Konkrétní příklad: Proton v jádře vodíku působí elektrickou silou na elektron (přitahuje ho); zde je tedy proton zdrojem elektrického pole, elektron jeho akceptorem. Elektron ovšem (podle 3NZ) také působí elektrickou silou na proton; z tohoto hlediska je elektron zdrojem, proton akceptorem tohoto pole.

Tam, kde toto „zpětné působení“ nehrozí nebo nevadí, se pojmy akceptor a zdroj nerozlišují a mluví se prostě společně o zdrojích pole: jeden zdroj působí na druhý a naopak.

♣ Pole je, řekli bychom populárně, „všude v prostoru, ale nejvíc kolem svých zdrojů“.

¡ ! Odp. ze str.21: Toto tedy ***nečtěte*** při průběžném čtení. Sem se vrátíte až ze str. 21.
Rozviňte potenciál v bodě na ekvipotenciální ploše Taylorovou řadou ve třech souřadnicích.

$$\varphi(\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) + \vec{\nabla}\varphi\cdot\mathrm{d}\vec{r} + \mathcal{O}\left((\mathrm{d}r)^2\right) \qquad ,$$

Na ekvipotenciální ploše $\varphi(\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r}) = \varphi(\vec{r})$ je tedy v prvním přiblížení $\vec{\nabla}\varphi\cdot\mathrm{d}\vec{r} = 0$, tedy $\vec{\nabla}\varphi$ je kolmý k $\mathrm{d}\vec{r}$ ležícímu na ekvipotenciální ploše.

Elektromagnetické pole a jeho zdroje Elektromagnetické pole je společný název pro dvojici polí: **elektrická intenzita** $\vec{E}$ a **magnetická indukce** $\vec{B}$. Zdrojem elektromagnetického pole jsou

- *elektrické náboje* (vytvářejí elektrické pole),
- pohybem nábojů vytvořené *elektrické proudy* (vytvářejí magnetické pole),
- částice s nenulovým *spinem* a jím daným magnetickým momentem (vytvářejí magnetické pole). Tento moment souvisí s elektrickým nábojem částice nebo jejích složek,
- elektrické pole vzniká časovou změnou pole magnetického, a
- magnetické pole vzniká časovou změnou pole elektrického.

Obě pole jsou spolu tak úzce spjata, že proto mluvíme o poli elektromagnetickém.

♣ Příklad souvislosti obou polí: při studiu elektronu stojícího v inerciální soustavě **S** z této soustavy zjistíme jen pole elektrické (dokonce elektrostatické). Při popisu z jiné inerciální soustavy **S'** pohybující se vůči **S** však tentýž elektron vytváří i časově proměnné pole magnetické, i elektrické.

♣ Přívlastek „elektrický“ (magnetický, elektromagnetický) pro stručnost vynecháváme, je-li z kontextu zřejmý[4].

Magnetický náboj neexistuje.

Tím míníme toto (troška filosofie a jazyka fyziky):

- Všechna známá magnetická pole lze vytvořit výše uvedenými způsoby.
- K popisu známých magnetických polí *není nutné* něco typu magnetického náboje.
- Také nebylo nic jako magnetický náboj („monopól“) dosud v přírodě pozorováno, a to přes velkou snahu experimentátorů.

Nic nám však nebrání zkoumat, jak by se magnetický náboj choval (kdyby existoval), jak by se chovaly jeho pohybem tvořené magnetické proudy apod., případně ho používat jako vědomé zjednodušení v některých situacích („severní a jižní pól“ permanentního magnetu).

Pohybové rovnice pro elektromagnetické pole Pole se samozřejmě mění v prostoru a čase nikoli libovolně, ale řídí se svými pohybovými rovnicemi. V nejobecnějším případě nestacionárního elektromagnetického pole používáme při ***fenomenologickém*** popisu látky **Maxwellovy rovnice** rov. (10)-(13). Jde o soustavu lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu, obsahující různé členy s derivacemi podle souřadnic a podle času; derivace podle času v případě jednodušších polí (stacionárních, statických) můžeme vypustit, jak bude ukázáno.

Při ***mikroskopickém*** popisu látku popíšeme jako soustavu elektricky nabitých (elementárních) částic ve vakuu analogickými **Lorentzovými** rovnicemi; z nich dostaneme Maxwellovy rovnice vystředováním.

¡ ! Odp. ze str.6: Pokud se 1-3 odpuzují, zkusíme 2-3. Přitahují-li se, jsou 1, 3 téhož druhu (řekněme A) a platí alternativa 2. Pokud se odpuzují, jsou 1, 2 druhu řekněme A, 3 druhu B a platí alternativa 1. A stejně vím, že jste na to přišli taky, a jen se ujišťujete. A všimli jste si taky, že stačí vlastně jen 3 kuličky?

[4] Např. s jiným nábojem než elektrickým se ve fyzice nejspíš nesetkáte; „proud“ by případně mohl být vodní.

1.2.3 Co pole je a co není

Laici se často ptají, zda pole opravdu existuje, anebo zda je to jen „jakási umělá konstrukce“ (s pejorativním nádechem). V případné diskusi je dobře si upřesnit pojmy protiotázkou, zda číslo 3 opravdu existuje nebo je to jen jakási umělá konstrukce (tj. zda si je partner vědom významu a nutnosti modelu při poznávání a popisu světa).

(Elektromagnetické) pole je nový fyzikální objekt.

Vlastnosti (elektromagnetického) pole jsou (elektromagnetickými) vlastnostmi prostoročasu.

Elektromagnetické pole ***není substancí.*** Uvažujme např. elektrickou intenzitu $\vec{E}$. Při změně rozložení nábojů se pole všude v prostoru prostě změní taky, a v různých místech prostoru ho „ubylo“ nebo ho „přibylo“. Není ale pravda, že by se jen nějak „přelilo“ z dřívějšího rozložení do nového, jako to dělá voda či vzduch.

Konkrétně: Dva náboje stejné velikosti $q > 0$, ale opačného znaménka (tedy v obvyklém značení $+q$ a $-q$), daleko od sebe, mají každý své pole s intenzitou $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ a potenciálem φ_1, φ_2. Výsledné pole v celém prostoru je podle principu superpozice (str. 18) jejich součtem: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, resp. $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Budeme-li náboje přibližovat, bude se výsledné pole měnit: protože potenciály φ obou polí mají opačná znaménka, bude se jejich algebraický součet při přibližování zmenšovat, a to i v tom smyslu, že celková energie pole bude ubývat[5]. Pokud sbližování proběhne tak, že náboje zcela splynou, pak výsledné pole $\vec{E}$ bude nulové – pole tedy poctivě „zanikne“. Jeho *energie* se však přelévá do rukou toho, kdo brzdí přitahující se náboje, když se k sobě blíží.

$\hookleftarrow$ Toto *není* model vzniku elektrického dipólu (kap. 2.6.2). Při něm nejen klesá k nule vzdálenost l nábojů, ale také roste do nekonečna jejich velikost q tak, aby se součin ql blížil konečné veličině, momentu p dipólu.

Naproti tomu některé fyzikální veličiny z pole odvozené a s polem spjaté (např. energie pole) se při časovém vývoji zachovávají, a to dokonce nejen integrálně (energie pole jako celku), ale i diferenciálně. Konkrétně, hustota elektrické energie $u_{\mathrm{el}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D}$ se jakoby „přelévá“ v prostoru a pokud mizí, tak se ve zdrojích pole „mění“ do jejich kinetické či potenciální energie, jako tomu bylo v právě uvedeném příkladě.

♣ Ve volném příměru je pole spíše jako větrem vyvolaná vlna na jezeře. Zavane-li vítr, vlna prostě vznikne „z ničeho“. Sama voda se pohne jen nepatrně nahoru a dolů (jak je vidět na korku plovoucím na hladině), ale vlna přeběhne celé jezero. Vlivem ztrát energie v prostředí (postupnou změnou uspořádaného pohybu na neuspořádaný) časem vlna zanikne beze zbytku.

1.3 Částicový a polní popis

Částice Ze zkušenosti víme, že dvě nabité částice[6] na sebe působí silami: mají-li jejich náboje stejná znamení, částice se odpuzují, mají-li znamení opačná, přitahují se. Toto působení lze popsat kvantitativně Coulombovým zákonem (Charles-Augustin de Coulomb, 1785)

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{R^2}, \qquad \text{resp.} \qquad F = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{R^2}, \tag{6}$$

kde F je velikost síly působící mezi částicemi, q_i náboj i-té částice a R vzdálenost obou částic; součást konstanty úměrnosti ε je permitivita prostředí mezi nimi (pro vakuum je rovna elektrické konstantě ε_0).

Tato rovnice je (spolu s ostatními) základní součástí „staré“ *elektrodynamiky Ampérovy* pracující jen s částicemi a představující proto **částicový popis**. Všimněte si, že tato rovnice neobsahuje čas; podle ní by tedy náboje na sebe působily bezprostředně a okamžitě na libovolnou vzdálenost. Takové *působení na dálku* (actio in distans) bylo ale těžko přijatelné, ve své době hlavně filosoficky. (Dnes by nám spíše vadilo z hlediska teorie relativity nebo při výkladu záření.)

---

[5] Energie pole se bude přitom „přelévat“ do energie částic nesoucích tyto náboje – např. tyto (hmotné) nosiče se budou urychlovat nebo budou konat při svém pohybu práci.

[6] Částice nemusí být elementární. Je to jen tělísko tak malé, že jeho vlastní rozměry jsou v úloze zanedbatelné, aby jeho polohu šlo popsat samotným polohovým vektorem. (Tedy jako hmotný bod, jen s tím odstínem, že jeho případná hmotnost není podstatná.)

Pole Michael Faraday, vynikající experimentátor, zavedl pro výklad silového působení model: jakoby mezi náboji byly silové trubice, mající tendenci – podobně jako natažené gumové trubice – se podélně stahovat a v příčných směrech rozšiřovat. Faraday nebyl matematikem (uvádí se, že v jeho poznámkách nebyla jediná rovnice), a tak až James Clerk Maxwell rozšířil Faradayovy představy, doplnil o další jev a vypracoval plně konzistentní matematický popis elektromagnetických jevů ve formě dnes zvané *Maxwellova teorie elektromagnetického pole* **polní popis**. V ní se zavádí pojem (nehmotného vektorového) *pole*, které pro bodovou nabitou částici má tvar

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_2}{R^2}\frac{\vec{R}}{R}, \tag{7}$$

nejenom jako „pouhý matematický prostředek“ k popisu interakce mezi (hmotnými) částicemi, ale jako samostatný, plnohodnotný fyzikální objekt – objekt, který se sice na rozdíl od látkového prostředí nechová jako substance, ale má např. svou energii, hybnost atd.. Jeho časový vývoj (*pohyb* v obecném smyslu) je plně popsán soustavou Maxwellových rovnic. Toto pole (vytvořené zdrojem – částicí s nábojem q_2) působí na částici (akceptor) s nábojem q_1 silou

$$\vec{F}_{12} = q_1\vec{E} \quad . \tag{8}$$

Slepice nebo vejce? V našem modelu (všeobecně užívaném) vycházíme z představy, že primární jsou zdroje, jejich důsledkem je pole. Nic nám ovšem nebrání v duchu bonmotu Alana Wattse „*Pták je jen prostředníkem k tomu, aby se vejce opět stalo vejcem*“ prohlásit, že primární je pole, a jeho zdroje jsou jen singularity tohoto pole (Mie, 1920). Silným argumentem pro tento pohled je např. to, že neexistují náboje bez pole, zatímco existuje pole bez nábojů (např. monochromatická světelná vlna). Na praktických výpočtech to však nic nemění – budou stejné, jen jinak interpretované. My se zde podržíme klasického pojetí s primárními zdroji a s polem jako jejich důsledkem.

1.4 Co nás čeká (možná přijde vynechat)

♣ Celou kap. 1.4 shrnující vlastně výsledné rovnice možná vynechám a případně uvedu jen odkaz na kap. 7 podle *logické* výstavby teorie. Dal jsem ji teď zkusmo na začátem z důvodů *psychologických* – aby bylo zřejmé, kam až dojdeme a jak vlastně rámcově vypadá výsledek teoretických úvah formujících ucelenou teorii elektromagnetismu. Zajímá mne proto i Tvůj názor, čtenáři, zda je to zdá zcela předčasné, nebo zda se to už sem hodí.

1.4.1 Celkový pohled

Klasická elektrodynamika se zabývá elektromagnetickou interakcí a zejména elektromagnetickým polem, používaným k jejímu (klasickému) popisu. Elektromagnetické pole v látkovém prostředí je fenomenologicky popsáno Maxwellovými rovnicemi.

Vakuum Ve vakuu stačí pro popis elektromagnetického pole jen dvě části:

- **elektrická intenzita** $\vec{E}$;
- **magnetická indukce** $\vec{B}$.

Obě veličiny lze přímo měřit podle jejich účinku na částici s nábojem q a rychlostí $\vec{v}$; působí na ni totiž **Lorentzovou silou**

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \tag{9}$$

viz dále rov. (21). Tato dvě pole, $\vec{E}$ a $\vec{B}$, pro popis elektromagnetických jevů ve vakuu plně postačují.

Z rozměrových důvodů (vazba na mechaniku – síla) zavádíme k nim ještě další konstanty (vysvětlíme je podrobně později):

- **elektrická konstanta** $\varepsilon_0 \approx 8,854\,10^{-12}$ F/m (též **permivita vakua**, viz rov. (39));
- **magnetická konstanta** $\mu_0 \approx 1,256\,6\cdot10^{-6}$ H/m (též **permeabilita vakua**, viz rov. (185));

- **světelná rychlost**[7] $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ spojuje obě konstanty, a má fyzikální význam i rozměr velikosti rychlosti světla ve vakuu (obecně: je to velikost rychlosti šíření jakékoli změny v elektromagnetickém poli ve vakuu)

a pro symetrii zápisu zavedeme definitoricky další dvě pole odvozená jednoznačně z předchozích:

- elektrická indukce (ve vakuu) $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} \quad ;$
- magnetická intenzita (ve vakuu) $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 \quad .$

Látkové prostředí popíšeme fenomenologicky třemi makroskopickými veličinami[8] – materiálovými parametry:

- **konduktivita** σ (elektrická vodivost) vystihuje chování volných nábojů tvořících látku (str. 7);
- **elektrická polarizace** $\vec{P}$ vystihuje elektrické důsledky vázaných nábojů tvořících látku;
- **magnetizace** $\vec{M}$ (anebo **magnetická polarizace** $\vec{J}_\mathrm{m} = \mu_0\vec{M}$) vystihuje magnetické důsledky vázaných nábojů tvořících látku a případně spinu částic látky.

Z nich k $\vec{E}$, $\vec{B}$ zkonstruujeme další dvě pole, která umožní symetrický popis. Máme tedy čtyři pole:

- **elektrická intenzita** $\vec{E}$ (jako dříve);
- **elektrická indukce** $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$;
- **magnetická intenzita** $\vec{H} = (\vec{B} - \vec{J}_\mathrm{m})/\mu_0 = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$;
- **magnetická indukce** $\vec{B}$ (jako dříve).

♣ Názvy *magnetických* polí $\vec{H}$, $\vec{B}$ bohužel odpovídají starému pojetí magnetismu s magnetickými náboji. Dnes bychom tyto názvy prohodili, protože máme důvody spojovat spolu na jedné straně $\vec{E}$ a $\vec{B}$, na druhé straně $\vec{D}$ a $\vec{H}$.

V nejjednodušším případě měkkých lineárních látek lze zavést permitivitu ε a permeabilitu μ tak, že $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$; $\vec{B} = \mu\vec{H}$. Ve vakuu $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, konduktivita $\sigma = 0$. Použitelnost Maxwellových rovnic lze rozšířit, připustíme-li, že pro střídavá pole o úhlové frekvenci ω jsou tyto parametry na ní závislé: $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$, $\sigma(\omega)$.

1.4.2 Úplná soustava pohybových rovnic pole (Maxwellovy rovnice)

Pohybovými rovnicemi pro elektromagnetické pole jsou ***Maxwellovy rovnice***. V diferenciálním tvaru znějí v úplném tvaru (nalevo pole $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{H}$, $\vec{D}$, napravo jejich zdroje $\vec{J}$, ρ):

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{H} - \partial_t\vec{D} = \vec{J} \qquad \text{neboli} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H} - \partial_t\vec{D} = \vec{J} \tag{10}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \tag{11}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E} + \partial_t\vec{B} = \vec{0} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \partial_t\vec{B} = \vec{0} \tag{12}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{13}$$

Proudová hustota $\vec{J}$ na pravé straně rov. (10) sestává jednak z hustoty **vtištěného**, zvenku vnuceného proudu $\vec{J}_\mathrm{vt}$, jednak z hustoty spontánně vznikajícího **vodivostního** proudu $\sigma\vec{E}$:

$$\vec{J} = \vec{J}_\mathrm{vt} + \sigma\vec{E} \quad . \tag{14}$$

Hustota ρ **náboje** popisuje jen volný, „vnější“ náboj; není třeba zahrnovat náboj tvořící hmotné prostředí (ten je zahrnut v $\vec{D}$). Pro úplné řešení potřebujeme ještě zadat okrajové a počáteční podmínky (jde o diferenciální rovnice podle $\vec{r}$ a podle t).

[7] Normy ISO a IEC ji značí c_0 a ponechávají samotné c pro rychlost světla v obecném postředí.
[8] Analogická situace byla v mechanice kontinua, kde jsme hmotu popsali spojitě rozloženou hustotou hmotnosti ρ.

Okrajové podmínky Okrajové podmínky mají tvar analogický Maxwellovým rovnicím. Co se týká reálných zdrojů, lze očekávat nespojitosti v prostoru (látka a zdroje se mění v prostoru nespojitě), nikoli však nespojitosti v čase. Časové derivace v Maxwellových rovnicích se proto neuplatní a zavedeme-li pro skok vektorových složek na rozhraní symboliku

$$\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{v} := v_{\mathrm{t}\,1} - v_{\mathrm{t}\,2} \quad ; \tag{15}$$

$$\mathrm{Div}\,\vec{v} := v_{\mathrm{n}\,1} - v_{\mathrm{n}\,2} \quad , \tag{16}$$

a značíme-li $\vec{J}_\Sigma$ hustotu plošných proudů a $\vec{\eta}$ hustotu plošných nábojů, mají okrajové podmínky tvar

$$\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{H} = \vec{J}_\Sigma \tag{17}$$

$$\mathrm{Div}\,\vec{D} = \eta \tag{18}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{E} = \vec{0} \tag{19}$$

$$\mathrm{Div}\,\vec{B} = 0 \tag{20}$$

V často se vyskytující situaci, když nejsou ani plošné proudy (popisující permanentní magnety), ani plošné náboje, je zřejmé, že na rozhraní dvou prostředí se spojitě mění tečné složky elektrické i magnetické intenzity $(E_\mathrm{t}, H_\mathrm{t})$, a normálové složky elektrické i magnetické indukce $(D_\mathrm{n}, B_\mathrm{n})$.

Při konkrétním výpočtu v praxi často používáme jednoduššího popisu s elektromagnetickými potenciály φ, $\vec{A}$; ve statickém poli tuto úlohu podrobně rozebírá ***teorie potenciálu*** (konkrétně pro pole daných zdrojů Poissonovu rovnici $\Delta\varphi = -\rho/\varepsilon$ a pro pole beze zdrojů Laplaceovu rovnici $\Delta\varphi = 0$).

Počáteční podmínky předpokládají zadání hodnot všech polí v počátečním čase, kdy začínáme jejich sledování.

1.4.3 Vazba na mechaniku

Síla $\vec{F}$ působící v poli na bodovou částici s nábojem q a rychlostí $\vec{v}$ je rovna

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad ; \tag{21}$$

první člen v součtu nazýváme Coulombovou silou, druhý Lorentzovou silou. Při spojitě rozloženém náboji je ***hustota síly*** $\vec{f}$ působící na náboj rozložený s hustotou ρ rovna

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \quad . \tag{22}$$

1.4.4 Další rozvoj teorie elektromagnetického pole

Speciální teorie relativity nevnáší do teorie elektromagnetického pole žádnou změnu ani nový jev: Maxwellovy rovnice pro vakuum a Lorentzovy rovnice jsou už samy relativisticky invariantní.

♣ Čtenář dokonce již nejspíš ví, že naopak studium důsledků teorie elektromagnetického pole (rychlost světla) vedlo k objevu teorie relativity.

Mikroskopický popis podávají **Lorentzovy rovnice**. Ty popisují látku nikoli fenomenologicky (pomocí $\vec{P}$, $\vec{M}$, σ, event. ε, μ, jak bylo popsáno na str. 11), ale mikroskopicky – látka jako souhrn elementárních částic s jejich náboji, dipóly, proudy a spiny, toto vše ve vakuu. Používá proto jen dvě mikroskopická pole, $\vec{e}$ a $\vec{b}$. Středováním těchto polí a Lorentzových rovnic dojdeme k polím $\vec{E}$, $\vec{B}$ a Maxwellovým rovnicím. Část nábojů a proudů (ta, která popisuje látku) a jimi vytvořená pole $\vec{e}$ a $\vec{b}$ dají středováním ostatní fenomenologická pole ($\vec{D}$, $\vec{H}$, $\vec{P}$, $\vec{M}$).

♣ Proces středování Lorentzových rovnic na Maxwellovy není až tak jednoduchý, ale o tom opravdu až později.

Kvantová elektrodynamika vznikla rozpracováním Lorentzovy teorie kvantovými prostředky (fyzikální veličiny popisující částice a pole jsou popsány vlnovými funkcí a operátory a kvantovány).

1.4.5 Typy polí: pole statické, stacionární a příbuzné pojmy

Elektromagnetické pole je v nejobecnějším případě popsáno uvedenými Maxwellovými rovnicemi (10) až (13). Pokud je však pole buzeno zdroji s časem se neměnícími nebo měnícími se dostatečně „zvolna“, lze právem očekávat že se tyto rovnice nějak zjednoduší a že pak bude jednodušší i jejich řešení. Fyzikální rozbor i jeho matematické vyjádření tak vede k jednodušším typům: pole

- *statické*,
- *kvazistatické*,
- *stacionární*,
- *kvazistacionární*.

Zcela obecné pole budeme v případě potřeby k odlišení nazývat *nestacionární*.

1.4.6 Statické pole (stav)

Představme si elektricky nabitý kruhový disk se středem v počátku vztažné soustavy. Náboj na něm budiž rovnoměrně rozložen s hustotou[9] ρ; ta je tedy konstantní a platí

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) &= \rho_0 \qquad \text{na kruhu o poloměru } R, \\ \rho(\vec{r}) &= 0 \qquad \text{všude jinde.} \end{aligned} \tag{23}$$

Celkový náboj disku je pak $q = \rho\pi R^2$ a tato soustava budí elektrické pole $\vec{E}(\vec{r})$, které je ve větší vzdálenosti podobné poli bodového náboje o velikosti q. Je samozřejmě s časem neproměnné.

Toto je **statický** případ a mluvíme zde o **statickém poli**. Zdroje pole (náboje) nemění v čase své polohy a velikosti ani makroskopicky, ani mikroskopicky; nejsou tedy ani žádné toky ($\vec{J} = \vec{0}$). Čas t se proto nevyskytne ani v jejich popisu, a tím ani v pohybových rovnicích.

Rovnice pro statické pole:

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\, \vec{H} = \vec{0} \tag{24}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \tag{25}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\, \vec{E} = \vec{0} \tag{26}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \tag{27}$$

Zřejmě lze oddělit rov. (26), (25) pro $\vec{E}$, $\vec{D}$ od rov. (24), (27) pro $\vec{H}$, $\vec{B}$ a řešit je nezávisle samostatně; jevy elektrické a magnetické spolu ve statickém případě nesouvisejí.

1.4.7 Kvazistatické pole (děj)

Budeme-li v reálné situaci opakovat měření za několik minut, zjistíme patrně, že náboje (díky elektrickému svodu) jaksi ubylo a tím pádem pole příslušně zesláblo. Zatím se nezabývejme, proč, jak a kam se náboj ztratil; zatím jen konstatujme, že jeho hustota ρ s časem klesá, nejspíše exponenciálně $\rho(t) = \rho_0\, \mathrm{e}^{-\beta t}$ (detailní průběh teď není vůbec podstatný).

V takové situaci si můžeme dovolit zavést *čas jako parametr*. Je-li zdroj $\rho(t)$ závislý na čase, dostaneme jistě i pole $\vec{E}(t)$ stejně závislé (synchronně) na čase. Čas zde zřejmě hraje roli parametru; veličiny popisující zdroje na něm závisejí, ale sám čas se explicite nevyskytne v rovnicích. Zejména se podle něj nederivuje. Takový případ se nazývá **kvazistatický**, jeho výsledkem je **kvazistatické**

[9] Později bychom upřesnili, že jde o plošnou hustotu. Zde, v předběžné úvaze, formulujeme situaci zcela volně, abychom soustředili pozornost na ty nové pojmy, které zavádíme.

pole. Řídí se týmiž rov. (24) až (27) jako pole statické. Zřejmě lze i zde oddělit rovnice pro $\vec{E}$, $\vec{D}$ od rovnic pro $\vec{H}$, $\vec{B}$, takže jevy elektrické a magnetické spolu ani v kvazistatickém případě nesouvisejí.

♣ Kvazistatický děj můžu nafilmovat a každé políčko vyšetřovat jako samostatný statický případ.

Kvazistatický zdroj výše uvedený bude tedy popsán vztaky

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r},t) &= \rho_0\,\mathrm{e}^{-\beta t} && \text{na kruhu o poloměru } R, \\ \rho(\vec{r},t) &= 0 && \text{všude jinde.} \end{aligned} \tag{28}$$

1.4.8 Stacionární pole; tok, elektrický proud (stav)

Představme si nyní, že disk i s jeho náboji roztočíme. Byl-li nabit rovnoměrně, pak uvažte bedlivě, že i nadále bude v každém okamžiku nabit stejně, jako když byl v klidu. Hustota náboje se tedy vůbec nezměnila a je opět popsána rov. (23); mj. opět nezávisí na čase.

♣ Rychle tekoucí čirá řeka bez vlnek vypadá taky stále stejná a nevidíme, zda řeka stojí či teče, kam a jak rychle.

Přitom je ale zřejmé, že to není tatáž situace jako před tím. Elektrické pole je sice stále stejné jako v elektrostatickém případě předchozím, ale nově zjistíme, že se kolem disku vytvořilo magnetické pole. Disk se chová, jako by byl tvořen smyčkami, kterými protéká **elektrický proud** neboli **tok** nabitých částic. Tato situace se nazývá **stacionární**.

♣ Má-li být analogie s proudem ještě dokonalejší, představme si, že vedle záporného náboje je na disku i stejně hustý náboj kladný, který se však nějakým kouzlem netočí. Elektrická pole obou nábojů se navzájem vyruší a výsledné elektrické pole bude nulové. Magnetické pole buzené pohybem záporného náboje a nrušené klidnou kladně nabitou sítí atomových jader zůstává nezměněno. Pevná kladná mříž a v ní proudící záporné náboje dávají realistický model elektrického proudu ve vodiči.

Rovnice pro stacionární pole jsou

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{H} = \vec{J} \tag{29}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho \tag{30}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E} = \vec{0} \tag{31}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \tag{32}$$

Zde už je *magnetické* pole $\vec{H}$ vytvářeno *elektrickým* proudem hustoty $\vec{J}$; jiná vazba však není.

Proudová hustota $\vec{J}(\vec{r})$ v místě $\vec{r}$ je střední hodnotou součinu rychlosti $\vec{v}$ nosiče náboje a jeho hustoty ρ v tomto místě: $\vec{J} = \langle\rho\vec{v}\rangle$.

1.4.9 Kvazistacionární pole (děj)

Ve vodivém prostředí je v první Maxwellově rovnici (10) na pravé straně hustota $\vec{J}$ elektrického proudu zahrnující ve vodiči navíc člen $\sigma\vec{E}$, tj. proud tvořený volnými náboji ve vodiči. Pokud můžeme vůči těmto proudům zanedbat druhý člen levé strany $-\partial_t\vec{D}$ (zvaný někdy z historických důvodů hustota **Maxwellova proudu**, někdy příliš přesně **Maxwellova posuvného proudu** – tím se rozuměl posuv éteru coby nositele elektromagnetického pole), dostáváme prakticky velmi významný mezistupeň — pole *kvazistacionární*. Druhý člen levé strany poslední rovnice (13), tedy $+\partial_t\vec{B}$, však ponecháme (proti nule na pravé straně nechceme zanedbat nic). Tím připouštíme vliv změny magnetického pole na elektrické pole. Rovnice nyní budou znít

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{H} = \vec{J} \tag{33}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho \tag{34}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E} + \partial_t\vec{B} = \vec{0} \tag{35}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \tag{36}$$

Toto zjednodušení se zdá nekonzistentní, ale podrobnější rozbor ukáže, že rovnice z těchto plynoucí zůstávají dostatečně symetrické a uvedená úprava Maxwellových rovnic způsobí jen, že veškeré změny zdrojů se projeví ve všech polích *synchronně*, tj. formálně jako by rychlost změn v poli (fakticky: světelná rychlost) byla nekonečná. To ospravedlňuje uvedené zanedbání i v takovém dielektriku, v němž je $\sigma = 0$, a tedy i $\sigma\vec{E} = \vec{0}$.

1.4.10 Nestacionární pole; záření (děj)

Původní rov. (10) až (13), tedy

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{H} - \partial_t\vec{D} &= \vec{J}\\ \operatorname{div}\vec{D} &= \rho\\ \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E} + \partial_t\vec{B} &= \vec{0}\\ \operatorname{div}\vec{B} &= 0\end{aligned}$$

představují nejobecnější makroskopicky popsatelný případ. Náboje i proudy se pohybují a mění tak rychle, že se objevují jevy, které bychom na „fotopolíčkách“ nenašli. V elektromagnetismu se to projeví např. tím, že pole už nesleduje poslušně své zdroje, ale má zpoždění dané tím, že změny v poli se šíří nikoli ihned (synchronně), ale jen konečnou rychlostí (a to rychlostí světla v daném prostředí). Pole tedy „nestíhá“. Není určeno *okamžitým* stavem zdrojů, ale stavem zdrojů v dobách minulých. Objevuje se nový jev – **záření**.

$\hookleftarrow$ V detailním rozboru: Pole v místě $\vec{r}$ v okamžiku t závisí na konfiguraci zdrojů v jiném místě $\vec{r'}$ a v jiném, předchozím okamžiku t', kde prostoročasová vzdálenost zdroje ($\vec{r'}$,t') a jeho pole ($\vec{r}$, t) je právě taková, jakou potřebuje světlo, aby ji překonalo.

2 Elektrostatika

2019–01–02

Od začátku až do 2.12 včetně se zabýváme jen polem, náboji a vodiči ve vakuu; vliv látkového prostředí (dielektrikum) zahrneme až v 2.13.

2.1 Elektrický náboj – HRW 21 (22);

Elektrický náboj pokládáme za prvotní příčinu všech elektromagnetických jevů. Srov. též kap. 1.2.1.

Porovnáme-li **elektrický** náboj q s **hmotností** m coby zdrojem gravitační interakce, pak zjistíme, že s ním **souhlasí** v těchto vlastnostech:

1. je fyzikální *veličina* (stejně jako m);
2. projevuje se dalekodosahovou[10] *elektromagnetickou interakcí* a měří „mohutnost zdroje" (stejně jako m se projevuje dalekodosahovým gravitačním polem a měří „mohutnost" svého zdroje);
3. je *atributem* (neoddělitelnou vlastností) elementárních částic (stejně jako m);
4. je aditivní; soubor částic má tedy celkový součet rovný součtu nábojů všech částic tvořících soubor (stejně jako m v klasické mechanice);
5. platí pro něj zákon zachování, celkový náboj soustavy se s časem nemění, HRW 21-6 (22.6) (stejně jako m v klasické mechanice).

Naproti tomu se **liší** v těchto vlastnostech:

6. vyskytuje se kladný i záporný (na rozdíl od m);
7. je kvantován, HRW 21-5 (22.5); všechny částice, které známe, mají náboj, který je celistvým násobkem elementárního náboje $e \approx 1,6{\cdot}10^{-19}$ C (m takto jednoduše kvantována není).
   Kvarky mají sice třetinové náboje (u, c, t: $\frac{2}{3}$; d, s, b: $-\frac{1}{3}$), ale částice z nich stvořené už mají náboj jen celistvý (baryony: proton = uud, antiproton = $\bar{\mathrm{u}}\bar{\mathrm{u}}\bar{\mathrm{d}}$, neutron = udd, Λ = usd; mezony: $\pi^+ = \mathrm{u}\bar{\mathrm{d}}$, K = s$\bar{\mathrm{u}}$, $\mathrm{B}^0 = \mathrm{d}\bar{\mathrm{b}}$, $\eta_\mathrm{C} = \mathrm{c}\bar{\mathrm{c}}$;);
8. je relativisticky invariantní (na rozdíl od m).

2.2 Coulombův zákon – HRW 21-4 (22.4)

Dva nosiče náboje na sebe působí silou přímo úměrnou součinu $q_1 q_2$ svých nábojů a nepřímo úměrnou čtverci své vzdálenosti r:

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}. \tag{37}$$

Náboje stejného znaménka se odpuzují, náboje různých znamének přitahují. Tento zákon objevil už r. 1785 francouzský fyzik Charles Augustin Coulomb.

¿? Máte kuličky 1, 2, 3, 4. Víte, že 1-2 se přitahují, 3-4 odpuzují. Jsou prý dvojího druhu A, B a jsou dvě možnosti:
1: stejné druhy (tedy A-A nebo B-B) se přitahují (jako hmotnosti) a různé druhy (A-B) se odpuzují;
2: stejné druhy se odpuzují (jako náboje) a různé druhy se přitahují.
Jak poznáte, co je pravda? Odp. je na str.6.

Přesné experimenty (viz [2]) potvrzují platnost Coulombova zákona už od $r > 10^{-15}$ m. Pokud by exponent neměl být přesně -2, ale $-2{\pm}\delta$, pak už z Maxwellových pokusů plynulo, že $\delta < 5{\times}10^{-5}$; současné pokusy dávají $\delta < 6 \times 10^{-17}$ (viz [7]).

Chceme-li Coulombův zákon vyjádřit číselně, musíme zavést jednotky pro náboj a změřit konstantu úměrnosti. V soustavě SI byla zvolena za jednu ze základních jednotek jednotka elektrického proudu, ampér A. Z ní je odvozena jednotka náboje, coulomb, jako náboj q přenesený elektrickým proudem $I = 1\,\mathrm{A}$ za jednu sekundu: $[q] = 1\,\mathrm{A{\cdot}s} = 1\,\mathrm{C}$, coulomb (viz rov. (174)).

Coulombův zákon pak říká, že pro částice i s polohou $\vec{r}_i$ a nábojem q_i je síla $\vec{F}_{12}$, kterou působí částice 2 na částici 1 ve vakuu, rovna

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{R_{12}^2}\vec{R}_{12}^0 \tag{38}$$

[10] Dalekodosahové síly ubývají se vzdáleností polynomiálně ($1/r^n$), zatímco krátkodosahové (např. jaderné) síly ubývají exponenciálně (e^{-r}).

kde $\vec{R}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ je relativní polohový vektor částice 1 od částice 2, $\vec{R}^0_{12}$ je příslušný jednotkový vektor a konstanta ε_0 zvaná **elektrická konstanta** (nebo též **permitivita vakua**) je rovna

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c_0^2}\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{m}^{-3}\,\mathrm{s}^4\,\mathrm{A}^2 \approx 8,854\,10^{-12}\,\mathrm{F/m} \quad , \tag{39}$$

kde $c_0 = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$ je **světelná rychlost** (rychlost světla ve vakuu). Jednotku F, farad, pro kapacitu zavedeme v kap.3.3.

Přibližnou číselnou hodnotu (hlavně řád!) si pamatujte, to se hodí. Ale tu první jednotku se rozhodně neučte. Kdybyste ji snad někdy potřebovali, tak ji odvodíte jednoduchou rozměrovou úvahou z rozměrů ostatních veličin v rov. (38).

2.3 Elektrická intenzita – HRW 22-2 (23.2)

Částicové pojetí působení nábojů na sebe jsme právě předvedli: dvě nabité částice Q_1, Q_2 s náboji q_1, q_2 na sebe ve vakuu působí (bezprostředně) jistou silou podle rov. (38); tato síla je úměrná součinu nábojů a nepřímo úměrná čtverci jejich vzdálenosti, je centrální a je přitažlivá pro náboje opačných znamének, odpudivá pro náboje se stejnými znaménky.

Polní pojetí téže situace bude následující: Náboj q' v bodě $\vec{r}\,'$ kolem sebe vytváří pole $\vec{E}$ zvané **intenzita elektrického pole** neboli **elektrická intenzita**. Ta má v místě $\vec{r}$ hodnotu

$$\vec{E}(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{R^2}\vec{R}^0 \tag{40}$$

kde značíme $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$ a $\vec{R}^0 = \frac{\vec{R}}{R}$ je jednotkový vektor ve směru vektoru $\vec{R}$. Elektrická intenzita $\vec{E}(\vec{r})$ způsobuje, že na náboj o hodnotě q nacházející se v místě $\vec{r}$ působí síla $\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r})$. Připomeňme, že zatím jde o elektrostatiku, tedy o situaci, kdy se s časem nemění ani parametry zdroje (t'), ani pole (t).

2.3.1 Silokřivky (siločáry)

Vektorové pole – zde $\vec{E}$ – často znázorňujeme soustavou **silokřivek** (hovorově **siločar**), tedy křivek popisujících toto pole

- vždy co do směru tím, že tečna k silokřivce udává směr pole;
- někdy i co do velikosti; tu naznačíme tím, že velikost pole v daném bodě je úměrná počtu silokřivek v jeho okolí.

Má-li diferenciální tečný vektor k silokřivce v daném bodě $\vec{r}$ složky $\mathrm{d}\vec{r} \equiv (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$, pak rovnoběžnost s $\vec{E}$ zapíšeme pomocí skalární veličiny λ (s potřebným rozměrem) jako

$$\vec{E} = \lambda \mathrm{d}\vec{r} \quad , \tag{41}$$

odkud rozpisem do složek a eliminací λ dostaneme

$$E_y \mathrm{d}z - E_z \mathrm{d}y = 0 \tag{42}$$
$$E_z \mathrm{d}x - E_x \mathrm{d}z = 0 \tag{43}$$
$$E_x \mathrm{d}y - E_y \mathrm{d}x = 0 \tag{44}$$

kde samozřejmě každá ze tří složek $\vec{E}$ je obecně funkcí všech tří proměnných x, y, z. Ekvivalentní zápis je užitím vektorového součinu

$$\vec{E} \times \mathrm{d}\vec{r} = \vec{0} \quad . \tag{45}$$

Pojem silokřivky je dostatečně znám z mechaniky (v mechanice tekutin odpovídá pojmu proudnice), proto ho zde nebudeme podrobněji rozebírat. Připomeňme jen, že silokřivky mají smysl hlavně lokální; globální výroky o jejich tvaru předpokládají hluboké znalosti o chování funkce $\vec{E}$ a zpravidla nejsou moc potřebné. (Např. nepatrná změna na jednom místě může podstatně změnit průběh silokřivky ve vzdálenějších místech; silokřivka magnetického pole $\vec{B}$ proudové smyčky obvykle hustě vyplňuje plochu apod.)

♣ K terminologii: **silo**křivky (či siločáry) popisují názorně rozložení vektorového pole a právě silové pole bylo první; odtud název. Obecně lze mluvit o **vektorových liniích**, ale nehrozí-li nedorozumění, zůstaneme u silokřivek. Obdobně u pole rychlosti proudící kapaliny byly zavedeny proudočáry, nyní zvané **proudnice**.

2.4 Princip superpozice – HRW 21-4, 13-3 (22.4, 14.3)

Řečeno stručně a přesto pravdivě, popisuje princip superpozice tuto situaci:

Nastane-li několik příčin najednou, vyvolají součet svých důsledků (a nic navíc).

Matematickým popisem principu superpozice je přímá úměra, lineární závistost.

♣ Tři závažíčka způsobí na siloměru výchylku rovnou součtu výchylek jednotlivých závažíček; princip superpozice platí. Tisíc závaží by siloměr nejspíš poškodilo; princip superpozice by neplatil. Princip superpozice také neplatí v situaci, o které se říká „Stokrát nic umořilo osla“.

Pro silové působení nábojů princip superpozice platí. Platí i pro pole vytvářené náboji . Máme-li tedy N nábojů $q_k = q_1, \dots q_N$ s polohami $\vec{r}_k$ a značíme-li $\vec{R}_{ik} = \vec{r}_i - \vec{r}_k$, pak síla působící na první náboj od ostatních je rovna

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \cdots + \vec{F}_{1N} = \sum_{k=2}^{N} \vec{F}_{1k} \quad \text{, což zapisujme} \quad {\sum_k}' \vec{F}_{1k}, \quad \text{resp. podle rov. (38)}$$

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} {\sum_k}' \frac{q_1 q_k}{R_{1k}^2} \vec{R}_{1k}^0 \tag{46}$$

Čárka u značky sumy ${\sum_k}'$ značí, že při sčítání vynecháme jeden index (zde $k = 1$) tak, abychom neuvažovali působení náboje (zde prvního) sama na sebe.

Stejně tak platí princip superpozice pro elektrickou intenzitu:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{12} + \vec{E}_{13} + \cdots + \vec{E}_{1N} = \sum_{k=2}^{N} \vec{E}_{1k} \quad \text{neboli} \quad {\sum_k}' \vec{E}_{1k}, \quad \text{resp. podle rov. (40)}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} {\sum_k}' \frac{q_k}{R_{1k}^2} \vec{R}_{1k}^0 \tag{47}$$

2.4.1 Rovnováha

Lze vymyslet konfiguraci nábojů, které budou v elektrostatické rovnováze. Jsou to např. dva kladné náboje $+4e$ a uprostřed mezi nimi elektron $-e$ (klasický Buridanův osel mezi dvěma otýpkami sena). Spočítejte si, že opravdu výsledná síla působící na každý z těchto tří nábojů je nulová. Uvažte ale také, že tato rovnováha není stálá. Energie $\mathcal{E}(\vec{r}\,')$ soustavy jako funkce polohy $\vec{r}\,'$ jednotlivých nábojů má sedlovitý tvar: vždy najdete sice směry, v nichž se náboj po vychýlení vrací zpět (elektron: kolmo ke spojnici nábojů), ale také směry, v nichž se náboj vychýlí ještě více (elektron: ke kterémukoliv z kladných nábojů). Rovnováha je tedy úhrnem vratká. Obecně platí **Earnshowova věta**:

Libovolná soustava nábojů (i s dipóly, multipóly, vodiči atd.) se neudrží ve stabilní rovnováze jen elektrickými, případně gravitačními silami.

$\hookleftarrow$ Důkaz Earnshowovy věty plyne z vlastností harmonických funkcí, tj. funkcí φ, pro něž platí $\triangle\varphi = 0$. Tyto mohou mít maximum jen na hranici $\partial\Omega$ množiny Ω, na níž jsou definovány. A funkce $\mathcal{E}(\vec{r}\,')$ je harmonická v proměnných souřadnic $\vec{r}\,'$ zdrojů pole. Argument v [2], str. 49, je mylný, např. pro funkci $\varphi = x^4 + y^4 + z^4$).

♣ Klasická fyzika proto nedokáže vysvětlit stabilitu atomů, molekul, pevných látek apod. U samotných gravitačních sil lze situaci zachránit *dynamickou rovnováhou*, kde částice kolem sebe obíhají po stabilních drahách jako planety kolem slunce. To však u náboje není možné, protože v teorii elektromagnetismu se ukazuje, že náboj pohybující se jinak než rovnoměrně přímočaře musí vyzařovat, a tedy ztrácet energii.

Earnshowovu větu lze stejně dokázat i pro magnetostatická pole, ale jen tehdy, pokud v soustavě *nejsou diamagnetika*; ta mají $\mu_\mathrm{d} < \mu_0$. Proto pro supravodiče (která jsou ideální diamagnetika a je v nich $\vec{B} = \vec{0}$), věta neplatí a supravodič v magnetickém a gravitačním poli může stabilně levitovat.

2.4.2 Hustota náboje

Extenzivní veličina Q je definována na oblasti Ω a platí pro ni princip superpozice, tj.

$$Q_\Omega = \sum_i \Delta Q_i = \int_\Omega \mathrm{d}Q \quad , \tag{48}$$

kde Ω je sjednocení disjunktních oblastí Ω_i a Q_i je hodnota Q na oblasti Ω_i. Pak má smysl zavádět hustotu $\rho\,(x, y, z)$ veličiny Q takovou, že

$$\mathrm{d}Q = \rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad , \tag{49}$$

takže celková hodnota Q v oblasti Ω je rovna součtu – v tomto případě integrálu – z dílčí veličiny (hustoty) přes tuto oblast:

$$Q_\Omega = \int_\Omega \rho(\vec{r})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \text{, často zapisovaný } \int \rho\mathrm{d}V, \int \rho\mathrm{d}^3r, \int \rho\mathrm{d}^3\vec{r} \tag{50}$$

- Zápis $\mathrm{d}V$ je zde ovšem zkratkou za $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, nikoli diferenciálem samostatné proměnné V, jako např. v termodynamice.
- Poslední zápisy připomínají, že $\mathrm{d}^3\vec{r}$ má rozměr L^3, nikoli L.

Je-li veličinou Q náboj q rozdělený v prostorové oblasti Ω či na povrchové oblasti Σ či na části Γ křivky, pak takto zavádíme **objemovou hustotu ρ náboje** (zvanou zpravidla jen **hustota náboje**) či **plošnou hustotu η náboje** či **délkovou**[11] **hustotu náboje** λ. Platí

$$q_\Omega = \int_\Omega \rho(\vec{r})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{51}$$

$$q_\Sigma = \int_\Sigma \eta(\vec{r})\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2 \tag{52}$$

$$q_\Gamma = \int_\Gamma \lambda(\vec{r})\mathrm{d}\xi \tag{53}$$

kde integrační proměnné x, y, z, ξ_1, ξ_2, ξ procházejí příslušnou integrační doménu (tj. Ω či Σ či Γ). S použitím aparátu δ-funkce (str. 29) můžeme však použitím objemové hustoty popsat všechny ostatní hustoty, i bodové náboje; např. bodový náboj q ležící v místě $\vec{r}\,'$ má v bodě $\vec{r}$ hustotu

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{R}) = q\delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') \quad \text{(hustota bodového náboje)} \tag{54}$$

2.4.3 Elektrická intenzita libovolně rozloženého náboje

Podle principu superpozice můžeme „složit“ dílčí infinitezimální pole. Budeme-li značit polohu $\vec{r}$ bodu v poli a polohu $\vec{r}\,'$ náboje budícího pole, potom platí

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Omega \frac{\rho(\vec{r}\,')}{R^2}\vec{R}^0\mathrm{d}^3\vec{r}\,' \quad \text{stručně} \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho'}{R^2}\vec{R}^0\mathrm{d}^3\vec{r}\,' \tag{55}$$

kde značíme $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$ a $\vec{R}^0 = \frac{\vec{R}}{R}$ je jednotkový vektor ve směru vektoru $\vec{R}$. Často se pro stručnost značí $\rho' = \rho(\vec{r}\,')$, jak je uvedeno v posledním výrazu, a vynechává se integrační obor Ω (lze ostatně integrovat přes celý prostor, když tam, kde náboj není, položíme $\rho' = 0$).

[11] Dříve občas užívaný termín **lineární** (lat. linea = křivka) není vhodný, protože se kříží s pojmem lineární závislosti v matematice.

2.5 Potenciál – HRW 24 (25)

2.5.1 Zavedení potenciálu – HRW 24-3 (25.2)

Pro popis elektrické interakce – síly $\vec{F}$ působící mezi náboji – jsme zavedli v kap. 2.3 elektrickou intenzitu $\vec{E}$. Je to vektorové pole, tedy trojice nezávislých funkcí. Ukazuje se však, že popis můžeme zjednodušit. V mechanice existuje k vektorovému poli konzervativní síly $\vec{F}(\vec{r})$ (např. tíhové síly) skalární pole potenciální energie $U(\vec{r})$ a k vektorovému poli intenzity[12] $\vec{I}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m}$ pole potenciálu $\varphi(\vec{r}) = \frac{U(\vec{r})}{m}$ tak, že platí

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}\, U(\vec{r}) \equiv -\vec{\nabla} U(\vec{r}) \tag{56}$$

$$\vec{I}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}\, \varphi(\vec{r}) \equiv -\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \quad . \tag{57}$$

♣ Operátor nabla $\vec{\nabla}$ je vektor, proto ho zde pro připomenutí píšu se šipkou. V literatuře je zpravidla místo šipky tištěn tučně.

Podobně i v elektrostatice lze zavést k elektrostatické síle potenciální energii a zejména lze k poli elektrické intenzity $\vec{E}(\vec{r})$ zavést **elektrický potenciál** $\varphi(\vec{r})$ takový, že platí

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}\, \varphi(\vec{r}) \equiv -\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \tag{58}$$

Z uvedené definice je zřejmé, že potenciál je definovaný až na aditivní konstantu, tj. vyhovuje-li potenciál $\varphi(\vec{r})$ dané úloze, pak potenciál $\varphi'(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) + \mathsf{konst}$ jí vyhovuje také.

Konkrétně pro energii soustavy dvou bodových[13] nábojů Q, Q' s náboji q, q' a polohami $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$ platí

$$U(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{R} + \mathsf{konst} \tag{59}$$

kde $R = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$, a pro potenciál φ bodového náboje Q ve vzdálenosti $R = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$ od něj platí

$$\varphi(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R} + \mathsf{konst}. \tag{60}$$

Protože měřitelnou veličinu (sílu či intenzitu) z energie či potenciálu získáme derivací, může být tato konstanta libovolná. Volíme ji tak, aby potenciál měl vhodnou hodnotu (např. 0) ve vhodném místě (např. v nekonečnu, na vhodném vodiči apod.). Princip superpozice platí i pro potenciál, takže pro soustavu bodových nábojů s náboji q_k a s danými polohami $\vec{r}_k$ platí

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_k \frac{q_k}{R_k} + \mathsf{konst} \tag{61}$$

a pro spojitě rozložený náboj s hustotou $\rho(\vec{r}\,')$ je potenciál

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\Omega \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \mathrm{d}^3\vec{r}\,' + \mathsf{konst}, \qquad \text{často stručně psáno (srv.rov. (55))} \tag{62}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho'}{R} \mathrm{d}^3\vec{r}\,', \qquad \text{aditivní konstanta a integrační obor se rozumějí samy sebou.} \tag{63}$$

Jednotkou potenciálu je joule na coulomb, J/C. Vyskytuje se tak často, že má své jméno, a to *volt*[14] (italský fyzik Alessandro Volta):

$$1\,\mathrm{V} = 1\,\mathrm{J/\,C} \tag{64}$$

[12] která je u gravitačního či tíhového pole totožná s gravitačním či tíhovým zrychlením

[13] Zde cvičně rozlišujeme *objekt* Q (nosič náboje, bodový náboj) a jeho *vlastnost* – fyzikální *veličinu*, náboj q.

[14] Připomeňme pravidlo, že jednotky odvozené od jmen osob mají název s malým písmenem a značku s velkým: volt V, ampér A. Výjimkou je povolen litr i jako L pro možnou záměnu malého písmene l s číslovkou 1.

Připomeňme, že **potenciál** určujeme v jednom bodě (a je určen jednoznačně, až na volitelnou konstantu, jak víme); **rozdíl potenciálů** zvaný **napětí** je vždy mezi dvěma body (a ona konstanta už se v něm nevyskytne).

Rov. (58) určí neznámou intenzitu z daného potenciálu. Máme-li obráceně určit neznámý potenciál k dané intenzitě, dostaneme ho křivkovým integrálem:

$$\varphi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{\xi}) \cdot \mathrm{d}\vec{\xi} + \varphi(\vec{r}_0) \tag{65}$$

Tři poznámky:

1. konstanta ve vzorci (59) a následujících je dána volbou výchozího bodu $\vec{r}_0$;

2. pokud je $\vec{F}$ nebo $\vec{E}$ konzervativní, tak integrál v rov. (65) nezávisí na integrační cestě. Pokud není, pak budou hodnoty integrálů pro různé cesty obecně různé a potenciál nelze zavést;

3. toto vše platí v elektrostatickém poli. V obecném poli, kde $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E} \neq \vec{0}$, jsou potenciál i napětí definovány přiměřeně této okolnosti (str. 53).

Správnost rov. (65) nahlédneme dosazením z rov. (58):

$$-\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{\xi}) \cdot \mathrm{d}\vec{\xi} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\varphi(\vec{\xi}) \cdot \mathrm{d}\vec{\xi} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z \right) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \mathrm{d}\varphi = \varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r}_0) \tag{66}$$

Je také zřejmé, co by se stalo u pole nekonzervativního: tam by výraz v závorce nebyl úplným diferenciálem a integrace po různých cestách by obecně vedla k různým výsledkům.

2.5.2 Ekvipotenciální plochy – HRW 24-4 (25.3)

Podobně jako vektorové pole jsme znázorňovali vektorovými liniemi (silokřivkami), můžeme názorně zobrazit skalární pole **ekviskalárními plochami**. V případě potenciálu se jim říká ekvipotenciální a jsou to plochy, na nichž má potenciál tutéž hodnotu: $\varphi = \varphi_0$ (viz např. obr. 24-2 (25.2) a další v HRW). Mají tedy stejný význam jako vrstevnice, spojující na mapě místa se stejnou hodnotou nadmořské výšky.

¿? Silokřivky jsou kolmé k ekvipotenciálním plochám; dokažte to! Odp. je na str.8.

2.5.3 Energie nábojů a pole

Nejprve hrubou úvahou projdeme od energie soustavy bodových nábojů přes nabité kontinuum k polnmu pojetí; dodatečně rozebereme problematiku podrobněji.

Soustava bodových nábojů Uvažujme soustavu N bodových[15] nábojů q_i v místech $\vec{r}_i$; první leží v bodě $\vec{r}_1$, ostatní zatím v nekonečnu[16].

Označme pro zkrácení zápisu potenciál v místě $\vec{r}_k$ vyvolaný jednotkovým nábojem ležícím v $\vec{r}_j$:

$$\varPhi_{jk} \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|r_j - r_k|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_{jk}} \qquad ;\ \text{zřejmě} \quad \varPhi_{jk} = \varPhi_{kj} \quad . \tag{67}$$

Potenciál φ_{jk}, který v místě $\vec{r}_k$ budí náboj q_j, je tedy roven

$$\varphi_{jk} = q_j \varPhi_{jk} \quad . \tag{68}$$

První náboj budí v místě $\vec{r}_2$ potenciál $\varphi_{12} = q_1\varPhi_{12}$, takže pro přenesení náboje q_2 z nekonečna do $\vec{r}_2$ musíme vykonat práci

$$W_{21} = q_2\varphi_{12} = q_2 q_1 \varPhi_{12} \tag{69}$$

[15] Zde pro změnu a pro stručnost nerozlišujeme bodový náboj (objekt) od jeho náboje q (fyzikální veličiny). Zkuste si to ale – rekreačně – rozlišit sami!

[16] tj. při měření s konečnou přesností tak daleko, kde už je interakce zanedbatelná a kde volíme $\varphi = 0$

a energie soustavy prvních dvou nábojů bude tedy

$$U_{12} = q_1 q_2 \Phi_{12} \quad . \tag{70}$$

Stejnou energii $U_{21} = U_{12}$ by ovšem měla také soustava vzniklá tak, že bychom nejprve uvažovali náboj Q_2, a k němu z nekonečna přisunuli náboj Q_1; platí tedy

$$U_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_1}{R_{21}} = U_{12} = \frac{1}{2}(U_{12} + U_{21}) \quad . \tag{71}$$

K této soustavě přisuneme další náboj q_3 z nekonečna do $\vec{r}_3$, a tím vykonáme práci $q_3\varphi_3$. Podle principu superpozice je $\varphi_3 = \varphi_1(\vec{r}_3) + \varphi_2(\vec{r}_3) = \varphi_{13} + \varphi_{23}$ a soustava má nyní energii

$$U_{123} = U_{12} + q_1 q_3 \Phi_{13} + q_2 q_3 \Phi_{23} = q_1 q_2 \Phi_{12} + q_1 q_3 \Phi_{13} + q_2 q_3 \Phi_{23} \tag{72}$$

$$= \frac{1}{2}\left(q_1 q_2 \Phi_{12} + q_1 q_3 \Phi_{13} + q_2 q_1 \Phi_{21} + q_2 q_3 \Phi_{23} + q_3 q_1 \Phi_{31} + q_3 q_2 \Phi_{32}\right) \tag{73}$$

Je zřejmé, že pro obecný celý počet N nábojů dostaneme výslednou energii soustavy ve tvaru

$$U_{1..N} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{k=1\\ j\neq k}}^{N}\sum_{j=1}^{N} q_j q_k \Phi_{jk} \equiv \frac{1}{2}\sum_k{}' \sum_j q_j q_k \Phi_{jk} = \frac{1}{2}\sum_k{}' \sum_j q_j \varphi_{kj} \quad . \tag{74}$$

Čárka u sumy znamená, že vylučujeme sčítance se stejnými indexy, protože by představovaly interakci částice se sebou samou – energii, kterou by měla částice ve svém vlastním poli. Ta má (s nulovým jmenovatelem) nekonečnou hodnotu; k tomu se vrátíme za chvilku.

Spojitě rozložený náboj Uvažujme zdroj nikoli bodový, ale spojitě rozdělený s hustotou $\rho(\vec{r})$. Namísto q_j zavedeme $\mathrm{d}q = \rho(\vec{r}_j)\mathrm{d}V$, namísto q_k zavedeme $\mathrm{d}q' = \rho(\vec{r}\,'_k)\mathrm{d}V'$ a sčítání přejde v integraci. Rov. (74) získá tvar

$$U_{1..N} = \frac{1}{2}\int_\Gamma\int_\Gamma \rho(\vec{r})\mathrm{d}V\ \rho(\vec{r}\,')\mathrm{d}V' \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{2}\int_\Gamma \rho(\vec{r})\left(\int_\Gamma \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}V'\right)\mathrm{d}V \tag{75}$$

$$= \int_\Gamma \frac{1}{2}\rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})\mathrm{d}V \quad . \tag{76}$$

První (dvojnásobný) trojrozměrný integrál je konečný i s nulovým jmenovatelem pro $\vec{r} = \vec{r}\,'$ a není tedy nutno tuto singularitu samostatně ošetřovat, jak jsme museli u diskrétních nábojů. Poslední (jednoduchý, trojrozměrný) integrál konverguje už zcela bez problémů. Jsou-li náboje vesměs v konečné oblasti Γ, jsou obě funkce konečné, omezené.

Poslední integrand lze interpretovat jako energii soustavy, rozloženou na ***nábojích*** (majících hustotu ρ) a danou tím, že náboj $\rho\mathrm{d}V$ leží ve více nebo méně energií bohaté oblasti (potenciál φ). Odpovídá staršímu pojetí elektromagnetismu s polem jako pouhým prostředníkem interakce (Coulomb).

Polní pojetí Pro přehlednost nevypisujeme u φ, ρ argument $\vec{r}$. Rov. (76) upravíme dosazením z rov. (11): $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$, a následující úpravou $\vec{\nabla}\cdot(a\vec{b}) = \vec{\nabla}a\cdot\vec{b} + a\vec{\nabla}\cdot\vec{b}$:

$$U = \frac{1}{2}\int_\Gamma \rho\,\varphi\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_\Gamma (\vec{\nabla}\cdot\vec{D})\,\varphi\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_\Gamma \left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{D}\varphi\right) - \vec{D}\cdot\vec{\nabla}\varphi\right)\mathrm{d}V \tag{77}$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Gamma \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{D}\varphi\right)\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int_\Gamma \vec{D}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V \tag{78}$$

$$= \frac{1}{2}\oint_\Sigma (D_\mathrm{n}\varphi)\,\mathrm{d}\Sigma + \int_\Gamma \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V \quad . \tag{79}$$

První integrál (získaný podle Gaussovy věty) do nekonečna vymizí, protože D ubývá jako r^{-2}, φ jako r^{-1}, zatímco povrch Σ roste jen jako r^2. Druhý integrand, zřejmě vždy nezáporný, lze interpretovat jako hustotu energie elektrického pole:

$$u = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} \tag{80}$$

Tento výraz naopak nepostihuje náboje, ale připisuje energii elektrickému ***poli*** (intenzita $\vec{E}$, indukce $\vec{D}$), které náboje vytvořily (moderní polní pojetí; Faraday, Maxwell).

↩ Uvedený postup naznačuje problematiku, není ovšem exaktní. Bylo by nutno analogicky zahrnout i jiné druhy nábojů: nabité plochy apod. Zájemce se o problematice dozví v každé podrobnější učebnici, např. [6].

↩ **Vlastní energie bodového náboje; renormalizace** Popisovaný postup má jeden principiální problém: bodový náboj je sice velice výhodný a praktický model, ale má neodstranitelný nedostatek, že jeho vlastní energie je nekonečně veliká („Electron je cizinec v klasické elektrodynamice“, Lorentz). Energie nabité koule o poloměru r je totiž řádově rovna $U_r \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r}$ (koeficient úměrnosti závisí na rozložení náboje, zda homogenně v celém objemu či jen na povrchu apod.) a diverguje tedy pro bodový zdroj ($r \to 0$) jako $U_0 \approx 1/r \to \infty$. Na druhou stranu: tato energie U_0 je sice nekonečná, ale pokud bodový náboj jen přemísťujeme a „neštěpíme ho“ ani „neslepujeme s jiným“, zůstává jeho energie stále stejná.

Protože pole $\vec{E}$ je aditivní a pro hustotu energie platí $u \approx E^2$, můžeme psát pro soubor $[1+2]$ tvořený bodovými náboji ${}^1\mathrm{Q}$, ${}^2\mathrm{Q}$ ve vakuu, mající pole $\vec{E}_{[1+2]}$ a hustotu energie $u_{[1+2]}$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{[1+2]} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 && (81)\\ u_{[1+2]} &\approx (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)\cdot(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) && (82)\\ &\approx E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2 && (83)\\ u_{[1+2]} &= u_1 + u_2 + u_{12} && (84) \end{aligned}$$

kde u_1, resp. u_2 představuje hustotu energie prvního resp. druhého náboje, a jen samotné u_{12} je vlastní interakční energie, tj. energie, kterou mají zkoumané bodové náboje „tím, že jsou si na dosah“. Integrály přes celý prostor $\int u_1\,\mathrm{d}V = U_0$ i $\int u_2\,\mathrm{d}V = U_0$ divergují, ale $\int u_{12}\,\mathrm{d}V$ je konečný a má zřejmě rozumný smysl – je to „vzájemná“ energie soustavy dvou bodových nábojů.

V další práci tedy neuvažujeme nekonečnou vlastní energii bodového náboje. Jako energii soustavy dvou bodových nábojů bereme nikoli celé $u_{[1+2]}$, ale jen část u_{12}. Tento proces se nazývá **renormalizace**.

↩ Není jistě třeba přesvědčovat, že přesnější metoda, na to, aby byla korektní, je o dost komplikovanější. Princip je ale stejný a podstatné je to, že je tato metoda nakonec úspěšná a souhlasí s experimenty.

2.6 Pole významných zdrojů

2.6.1 Bodový náboj – HRW 24-6 (25.5)

Pole bodového náboje je určeno Coulombovým zákonem, viz kap. 2.2, s potenciálem rov. (60):

$$\varphi(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} + \mathsf{konst.} \qquad (85)$$

kde q je náboj, $R := |\vec{r} - \vec{r}\,'|$ a ε_0 je elektrická konstanta.

Praktickou realizací bodového náboje je elektron (pro $R > 10^{-15}$ m), v molekulové fyzice též ionty (mají rozměr molekul).

Vzhledem k dalším úvahám zaveďme označení

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)}(R) &:= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} && (86)\\ p^{(0)} &:= q && (87) \end{aligned}$$

takže potenciál bodového náboje q o náboji q je roven $\varphi = q\varphi^{(0)} = p^{(0)}\varphi^{(0)}$.

2.6.2 Dipól – HRW 24-8 (25.7)

Dipólem se nazývá soustava elektrických nábojů s nulovým úhrnným nábojem, tj.

$$\sum_k q_k = 0 \quad \text{, resp.} \quad \int_V \rho' \mathrm{d}^3\vec{r}\,' = 0 \qquad (88)$$

a nenulovým **dipólovým momentem**

$$\sum_k q_k \vec{r}_k \neq \vec{0} \quad \text{, resp.} \quad \int_V \rho' \vec{r}' \mathrm{d}^3\vec{r}' \neq \vec{0} \quad . \tag{89}$$

Elementární dipól (také **bodový dipól**) je velice významným typem zdroje a dostaneme ho touto konstrukcí:

Bodový náboj o hodnotě q umístěný v bodu $\vec{r}'$ budí pole $q\,\varphi^{(0)}$. Nyní tento náboj posuneme o $\vec{l}$ do bodu $\vec{r}'' = \vec{r}' + \vec{l}$ a na uvolněné místo $\vec{r}'$ umístíme náboj o hodnotě $-q$. Při označení $\vec{R}'' = \vec{r} - \vec{r}''$ tedy naše soustava budí pole

$$\varphi(\vec{r},\vec{r}',\vec{r}'') = q\left(\varphi^{(0)}(R'') - \varphi^{(0)}(R')\right) = q\left(\varphi^{(0)}(|\vec{r}-\vec{r}'+\vec{l}|) - \varphi^{(0)}(|\vec{r}-\vec{r}'|)\right) \tag{90}$$

což můžeme upravit rozvojem podle $\vec{l}$ pomocí Taylorovy věty:

$$\varphi(\vec{r},\vec{r}',\vec{l}) = q\left(\varphi^{(0)} + \vec{l}\cdot\vec{\nabla}'\varphi^{(0)} + \mathcal{O}(|\vec{l}|^2) - \varphi^{(0)}\right) \tag{91}$$

$$= \left(q\vec{l}\cdot\vec{\nabla}'\varphi^{(0)}\right) + \mathcal{O}(|q\vec{l}|^2) \quad , \tag{92}$$

a to[17] pro $\lim l \to 0, \lim q \to \infty$ za podmínky $\lim q\vec{l} \to \vec{p}^{(1)}$ přechází na

$$\varphi^{(1)} \equiv \varphi(\vec{r},\vec{r}',\vec{p}^{(1)}) := \vec{p}^{(1)}\cdot\vec{\nabla}'\varphi^{(0)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}^{(1)}\cdot\vec{R}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \quad . \tag{93}$$

Uvědomíme-li si ještě, že $\vec{\nabla}' = -\vec{\nabla}$ a označíme-li $\vec{l}_0^{(1)} \equiv \vec{l}/l$, můžeme potenciál nového typu bodového zdroje – elementárního dipólu – zapsat tvarem

$$\varphi^{(1)} = p\,\vec{l}_0^{(1)}\cdot\vec{\nabla}'\varphi^{(0)} = -p\,\vec{l}_0^{(1)}\cdot\vec{\nabla}\varphi^{(0)} \quad \left(= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{R^3}\right) \quad \text{(potenciál elementárního dipólu)} \ . \tag{94}$$

Potenciál dipólu ubývá tedy se vzdáleností jako R^{-2}, o řád rychleji než u náboje („monopólu“).

Praktickou realizací elementárního dipólu je mnoho neutrálních molekul (tzv. **polární molekuly**, jako H_2O apod.), případně původně nepolární molekuly (He, CO_2) ve vnějším elektrickém poli, které jim částečně přesune elektronový oblak jedním směrem.

2.6.3 Kvadrupól, multipóly

Analogickým způsobem dojdeme k multipólům vyššího řádu (obecně řádu 2^n). Kvadrupól dostaneme z dipólu s momentem $\vec{p}$, který opět přesuneme poblíž, o $\vec{l}$ do $\vec{r}'''$ a na uvolněné místo uložíme dipól s opačným momentem. Poté opět provedeme limitní přechod $l \to 0$, $p \to \infty$ a $\lim pl = \frac{1}{2}p^{(2)}$ a přeznačíme $\vec{l} \equiv l\vec{l}_0^{(2)}$, $p \equiv p^{(2)}$. Tak vznikne elementární kvadrupól charakterizovaný svou velikostí $p^{(2)}$ a dvěma směry $\vec{l}_0^{(1)}$, $\vec{l}_0^{(2)}$, mající potenciál

$$\varphi^{(2)} := \frac{1}{2}p^{(2)}\ (\vec{l}_0^{(2)}\cdot\vec{\nabla}')\ (\vec{l}_0^{(1)}\cdot\vec{\nabla}')\ \varphi^{(0)} \quad \text{(potenciál elementárního kvadrupólu)} \ . \tag{95}$$

Praktickou realizací elementárního kvadrupólu je většina nepolárních molekul.

Analogickým postupem odvodíme multipól 2^n-tého řádu charakterizovaný svou velikostí $p^{(n)}$ a n směry $\vec{l}_0^{(1)}, \vec{l}_0^{(2)}, \ldots, \vec{l}_0^{(n)}$, mající potenciál

$$\varphi^{(n)} = \frac{p^{(n)}}{n!}\ (\vec{l}_0^{(n)}\cdot\vec{\nabla}')\ (\vec{l}_0^{(n-1)}\cdot\vec{\nabla}')\ldots(\vec{l}_0^{(1)}\cdot\vec{\nabla}')\varphi^{(0)} \quad \text{(potenciál elementárního } 2^n\text{-pólu)} \ . \tag{96}$$

Axiálním multipólem nazýváme takový, v jehož zápisu mají všechny vektory $\vec{l}_0^{(k)}$ stejný směr.

[17] Tady matematik právem namítne, že φ v rov. (93) je úplně jiná funkce než stejně značené φ v rov. (91) či (90); má pravdu, protože tyto funkce mají různou třetí proměnnou. Fyzik oponuje, že jde o totéž pole – tentýž potenciál; taky má pravdu. Společné řešení by bylo odlišit tyto funkce třeba čárkou nebo vhodným indexem apod. V praxi (ve fyzikální literatuře) se to nikdy nedělá a nechci to dělat ani zde, protože by to odtahovalo pozornost jinam: čtenář by se snadno mohl domnívat, že index rozlišuje různá pole a nikoli funkce sice různých proměnných, ale popisující totéž pole. Toto znáte ovšem i z mechaniky, kde např. E značilo energii, ať byla vyjádřena v jakýchkoli proměnných.

2.6.4 Věta o multipólovém rozvoji

Pokládáme-li bodový náboj za multipól řádu 0, platí následující věta (analogická Taylorovu rozvoji):

> *Potenciál libovolné soustavy nábojů umístěné uvnitř koule* K *se středem* S *je vně této koule stejný jako potenciál jednoznačně určené soustavy elementárních multipólů řádů* $n = 0, 1, \ldots$ *ležících vesměs v bodě* S.

Moment multipólu nejnižšího řádu je přitom týž, zvolíme-li jiný bod S' a jinou kouli K', která rovněž obsahuje všechny uvažované náboje. Momenty vyššího řádu se však obecně změní.

2.7 Pole jednoduchých soustav

Při známém rozdělení zdrojů lze určit pole integrací přes $\mathrm{d}q' = \rho'\, dV'$, tedy intenzitu $\vec{E}$ podle rov. (55) a potenciál φ podle rov. (62). Zpravidla bude výpočet potenciálu jednodušší prostě proto, že jde o jedinou funkci a integrand je jednodušší. Integrál však může divergovat, pokud je náboj rozložen v neomezené oblasti (např. homogenně nabitá přímka či rovina). Pak je nutno použít vhodnou **renormalizaci**, tedy odečtení jistého nekonečného, ale konstantního výrazu s vědomím, že fyzikální význam mají stejně jen rozdíly potenciálů ve dvou místech, a při nich by nepříjemná konstanta stejně vypadla. (Podobně je tomu, vyjde-li energie stavů jisté soustavy nekonečná: měřitelný je však jen rozdíl energií ve dvou stavech, a ten bude konečný.)

V příkladech s nejvyšší symetrií lze s výhodou počítat podle Gaussovy věty přímo intenzitu $\vec{E}$ (resp. později indukci $\vec{D}$), jak také ukážeme.

2.7.1 Pole rovnoměrně nabité úsečky a přímky – HRW 22-6, 24-9 (23.6, 25.8)

Potenciál φ úsečky ležící v ose x od $x = 0$ do $x = L$, rovnoměrně nabité s délkovou hustotou náboje τ lze řešit přímou integrací podle rov. (62), jak je provedeno např. v HRW. Potenciál $\varphi(x, r)$ v bodě s polární souřadnicí r je roven (subst. $\sqrt{x^2 + r^2} = x + \xi$)

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{\tau}{\sqrt{x^2+r^2}}\mathrm{d}x = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^{L+\sqrt{L^2+r^2}} \frac{2\xi}{r^2+\xi^2}\frac{r^2+\xi^2}{2\xi^2}\mathrm{d}\xi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{L+\sqrt{L^2+r^2}}{r}\right| + \mathsf{konst} \tag{97}$$

S aditivní konstantou nulovou je potenciál v nekonečnu ($r \to \infty$) nulový, jak je zřejmé; argument logaritmu se blíží jedné.

Pro nekonečnou polopřímku tuto úlohu vyřešíme limitou $L \to \infty$ z předchozího vzorce. Jakmile však sahá náboj do nekonečna, nelze obecně očekávat nulový potenciál v nekonečnu. Zvolíme libovolnou (ale pevnou) délku L_0 jako jednotku; jejím zavedením[18] se vyhneme problému logaritmu veličiny r s rozměrem délky. Rozvineme-li výraz asymptoticky pro malá $\alpha = r/L = (r/L_0)/(L/L_0)$, dostaneme

$$\varphi(r) = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1+\sqrt{\alpha^2+1}}{r/L} + \mathsf{konst} \tag{98}$$

$$\simeq \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln(2+\frac{1}{2}\alpha^2) - \ln\frac{r}{L_0} + \ln\frac{L}{L_0}\right) + \mathsf{konst} \tag{99}$$

$$\simeq -\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{L_0} + \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2L}{L_0} + \mathsf{konst} \quad . \tag{100}$$

Druhý člen pro $L \to \infty$ roste do nekonečna, ale nezávisí na r. Lze ho tedy pro každé L zahrnout do konst. Pro celou přímku složenou ze dvou polopřímek zvolíme konst tak, že anuluje druhý člen:

$$\varphi(r) = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{L_0} \quad . \tag{101}$$

[18] Pro matematika je primitivní funkcí k funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ funkce $F(x) = \ln|x| + \mathsf{konst}$. Fyzik raději volí tvar $F(x) = \ln\frac{x}{x_0}$, kde x_0 je vhodná „typická“ délka (zde L_0). Vyřeší tím rozměrový problém „kolik je logaritmus 1 metru“, na kterou vtipálek odpoví „logaritmus 100 plus logaritmus centimetru“.

Volba L_0 určuje vzdálenost, v níž je potenciál nulový.

Výraz pro intenzitu dostaneme odtud snadno derivací, ale lze ho díky vysoké symetrii dostat mnohem snadněji, bez výpočtu potenciálu, jakmile poznáme Gaussův zákon, rov. (113). Intenzita má zřejmě nenulovou jen radiální část směrem kolmo od nabité přímky a velikost

$$E(r) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \tag{102}$$

2.7.2 Pole rovnoměrně nabité roviny a na ose disku – HRW 22-7, 24-9 (23.7, 25.8)

Homogenně nabitý ($\rho > 0$) disk o poloměru R v rovině xy se středem v počátku souřadnic budí na ose z potenciál φ a pole o velikosti E (viz např. HRW)

$$\varphi(z) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(\sqrt{z^2+R^2} - z) \tag{103}$$

$$E(z) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}), \quad \text{směr } \vec{E} \text{ kolmo od roviny xy} \tag{104}$$

Rovina xy rovnoměrně nabitá nábojem hustoty ρ budí na ose z pole

$$\varphi(z) = \frac{\rho|z|}{2\varepsilon_0} \tag{105}$$

$$E(z) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}, \quad \text{směr } \vec{E} \text{ kolmo od roviny xy.} \tag{106}$$

I tuto úlohu je možno řešit integrací a limitou (zkuste si sami), a i zde je díky vysoké symetrii mnohem jednodušší užití Gaussova zákona podle rov. (113).

2.7.3 Přehled

Závislost potenciálu φ a velikosti $E = |\vec{E}|$ intenzity různých typů zdrojů na vzdálenosti r od zdroje ukazuje následující tabulka:

zdroj	φ	E
nabitá rovina	r	konst
nabitá přímka	$\ln r$	r^{-1}
bodový náboj	r^{-1}	r^{-2}
dipól	r^{-2}	r^{-3}
multipól řádu 2^n	r^{-n-1}	r^{-n-2}

Na bodový náboj působí v elektrickém poli síla, na bodový dipól v *homogenním* poli jen otáčivý moment (ale v nehomogenním poli působí navíc i síla, a to úměrná gradientu pole).

2.8 Tok vektoru plochou – HRW 23-2 (24.2)

V hydrodynamice můžeme popsat proudící tekutinu (i stlačitelnou) skalárním polem hustoty $\rho(\vec{r})$ a vektorovým polem rychlosti $\vec{v}(\vec{r})$. Představa tekutiny nám pomůže osvětlit řadu pojmů. Jedním z nich je tok vektorového pole $\vec{v}$ orientovanou[19] plochou Σ o obsahu $\mathit{\Sigma}$ a s hranicí $\Gamma \equiv \partial\Sigma$.

Na orientované ploše Σ zavedeme vnější a vnitřní normálu; jde-li o plochu uzavřenou, je jejich orientace jasná, pokud ne, zvolíme je libovolně. Spočítejme nyní, jaký je tok tekutiny touto plochou „zevnitř ven“, tj. směrem vnější normály.

Sledujme nejprve u bodu $\vec{r}$ elementární obdélníček $\mathrm{d}\Sigma$ o obsahu $\mathrm{d}\mathit{\Sigma}$ rovnoběžný s rovinou xy, o stranách délky $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$, s vnější normálou ve směru osy z a zobrazený vektorem $\overrightarrow{\mathrm{d}\mathit{\Sigma}}$. Za dobu $\mathrm{d}t$ jím proteče „šikmý hranolek“ tekutiny o objemu

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}t\,\vec{v}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{d}x}\times\overrightarrow{\mathrm{d}y}) = \vec{v}\cdot\vec{z}_0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = v_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = v_z\,\mathrm{d}\mathit{\Sigma}\,\mathrm{d}t \quad . \tag{107}$$

[19] Möbiův list či Kleinova láhev jsou příklady neorientovatelných ploch majících za hranici topologickou kružnici. Ale při jakékoli 3D reprezentaci takové plochy a blány uzavírající její hranici prochází část plochy touto blánou. V dalším se nebudeme takovými situacemi zabývat a většinou nebudeme ani požadavek orientovatelnosti zmiňovat.

Objemovou rychlost $\frac{dV}{dt} = \vec{v} \cdot \overrightarrow{d\Sigma}$ lze interpretovat jako infinitezimální tok $d\psi$ vektoru $\vec{v}$ orientovanou ploškou $\overrightarrow{d\Sigma}$. Snadno nahlédneme, že tento tok je roven $d\psi = \vec{v} \cdot \overrightarrow{d\Sigma}$ při libovolné prostorové orientaci uvažovné plošky $\overrightarrow{d\Sigma}$. Z aditivity plyne, že má smysl definovat **tok vektorového pole** $\vec{v}$ obecnou orientovatelnou plochou Σ jako součet (integrál) dílčích toků:

$$\psi = \int_\Sigma d\psi = \int_\Sigma \vec{v} \cdot \overrightarrow{d\Sigma} \qquad (\text{tok } \psi \text{ vektoru } \vec{v} \text{ plochou } \Sigma) \tag{108}$$

♣ Všimněte si, že doba dt, užitečná pro názornou interpretaci toku tekutiny, se v definici toku už nevyskytuje. To nám umožňuje užít pojem toku i na vektorové pole nemající charakter rychlosti nějakého pohybu.

2.8.1 Tok uzavřenou plochou

Uvažujme nyní plochu Σ, která je uzavřená a vymezuje jistou 3D vnitřní doménu Ω o objemu $\varOmega$ (je zřejmě $\partial\Omega \equiv \Sigma$). Pak celkový tok uzavřenou plochou Σ bude roven objemovému množství tekutiny, které v objemu Ω ubyde. (Na tomto úbytku není nic mystického, ani když tekutina je substancí: plyn tam prostě zřídne, klesne jeho hustota ρ, ale jeho celková hmotnost se při proudění bude zachovávat.)

Gaussova věta z matematiky vysvětluje termín „divergence“ pole (lat.: rozbíhání, úbytek):

$$\int_\Omega \operatorname{div} \vec{v}\, dV = \oint_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \overrightarrow{d\Sigma} = \oint_{\partial\Omega} v_n d\varSigma \tag{109}$$

Kroužek na značce integrálu připomíná, že integrační plocha je uzavřená.

2.9 Gaussův zákon – HRW 23 (24)

2.9.1 Gaussův zákon pro $\vec{E}$ a bodový náboj

Aplikujme Gaussovu větu na pole $\vec{E}$ elektrické intenzity.

Uvažujme nejprve pole jediného bodového náboje Q o náboji $q > 0$ v počátku souřadnic a kolem něj kouli K_r o poloměru r. Vytýčíme z náboje elementární kužel mající vrcholový úhel $d\varOmega$. Ten na kouli K_r vytíná plošku $d\Sigma$ s obsahem $d\varSigma = r^2 d\varOmega$. Ploška má zřejmě vnější normálu v radiálním směru $\vec{r}_0$ souhlasně rovnoběžnou s intenzitou $\vec{E}$ pole buzeného nábojem. Tok pole $\vec{E}$ ploškou $d\Sigma$ je tedy roven

$$d\psi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} r^2 d\varOmega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\varOmega \quad . \tag{110}$$

Tok intenzity $\vec{E}$ celou koulí K_r (a to s libovolným poloměrem r) bude tedy

$$\psi = \int_K d\psi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_K d\varOmega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad , \tag{111}$$

protože plný prostorový úhel má velikost 4π.

Nezávislost toku na poloměru koule dává tušit, že uzavřená plocha obklopující náboj může mít libovolný tvar, nejen koule s (libovolným) poloměrem r. Opravdu, šikmá ploška $d\Sigma$ odpovídající elementárnímu kuželu, jejíž normála svírá úhel θ s radiálou $\vec{r}_0$, má sice obsah větší (a to $\frac{d\varSigma}{\cos\theta}$), ale tento „zisk“ se přesně ztratí skalárním součinem. Tok ψ elektrické intenzity $\vec{E}$ bodového náboje q, který je uvnitř uzavřené plochy Σ, je roven $\frac{q}{\varepsilon_0}$:

$$\psi = \oint_\Sigma \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\Sigma} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad . \tag{112}$$

Bodový náboj q', který by byl *vně* objemu uzavřeného plochou Σ, se však v celkovém toku neuplatní: jeho elementární kužel protíná plochu uvažovanou dvakrát, a to v opačných orientacích, takže se oba příspěvky navzájem vyruší.

Nyní stačí použít princip superpozice na libovolnou soustavu nábojů unitř oblasti vymezené plochou Σ a dostaneme závěrečnou formulaci:

Tok ψ elektrické intenzity $\vec{E}$ uzavřenou plochou Σ je úměrný celkovému náboji q uvnitř Σ:

$$\psi = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad . \tag{113}$$

2.9.2 Elektrická indukce ve vakuu, Gaussův zákon elektrostatiky

Zaveďme, zatím jen ve vakuu, nové pole **elektrické indukce** $\vec{D}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \qquad \text{(zatím)}. \tag{114}$$

Pak z rov. (113) triviálně plyne

Tok Ψ elektrické indukce $\vec{D}$ uzavřenou plochou Σ je roven celkovému náboji q uvnitř Σ:

$$\Psi = \oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma} = \int_{\Omega} \rho \,\mathrm{d}V = q \qquad \text{(Gaussův zákon elektrostatiky ve vakuu)} \tag{115}$$

$\hookleftarrow$ Nově zavedené pole $\vec{D}$ se vám nejspíš zdá zbytečné, když je prostě násobkem („osvědčeného“) pole elektrické intenzity $\vec{E}$. Tak tomu opravdu je ve vakuu. Pole $\vec{D}$ oceníme až tehdy, až se budeme zabývat situací ve hmotném prostředí v kap. 2.13. To bude navíc tvořeno vázanými nabitými částicemi tvořícími látku, ale těch si nebudeme chtít všímat. Budeme je chtít fenomenologicky popsat vhodnou makroskopickou vlastností materiálu (polarizací), a pracovat explicitně jen se zbývajícími (volnými) náboji. Vázané náboje pak zahrneme do elektrické indukce $\vec{D}$ v rov. (136).

2.10 Obrácená úloha. Poissonova a Laplaceova rovnice

Coulombův zákon ve tvaru rov. (55) a vzorec pro potenciál *libovolně* rozloženého náboje rov. (62) řeší úlohu nalézt pole, je-li zadáno libovolné rozložení zdrojů ρ; přitom náboje, jak bodové, tak i rozložené s hustotou délkovou či plošnou, postihneme v prostorové hustotě použitím δ-funkce (str. 29). Nyní se budeme zabývat úlohou obrácenou – najít, jaké musí být rozložení *zdrojů*, aby vytvořilo v oblasti Ω *předepsané pole*. Uvidíme, že i tato úloha je vždy řešitelná, a to jednoznačně např. v tomto smyslu: k libovolnému potenciálu φ uvnitř oblasti Ω najdeme takové rozložení náboje ρ uvnitř Ω a plošnou hustotu nábojů a dipólů na $\partial\Omega$, které vytvoří uvnitř Ω požadovaný potenciál.

♣ Podobnými úlohami se v matematice zabývá **teorie potenciálu**, široká oblast s širokou praktickou aplikací. My jí přenecháme existenční důkazy a omezení kladená na zadávané funkce z matematického hlediska. Omluvou nám bude nejen *praktický* požadavek, kdy všechny veličiny jsou *změřeny* jen s konečnou přesností, ale i *principiální* fakt, že v makroskopické fenomenologické teorii elektromagnetismu se setkáme jen s dostatečně hladkými funkcemi (vzniklými vystředováním funkcí mikroskopických), a nanejvýš s modelovým skokem na rozhraní dvou prostředí.

Použitím Gaussovy věty z matematiky na Gaussův zákon ve tvaru rov. (115) dostaneme, že platí rovnice $\int_\Omega \operatorname{div} \vec{D} \mathrm{d}V = \int_\Omega \rho \mathrm{d}V$. Jsou-li si však rovny integrály přes *libovolnou* dílčí oblast Ω, pak předpokládáme, že si budou rovny i integrandy, tedy že v celé oblasti Ω bude platit

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad . \tag{116}$$

♣ Toto tvrzení je ekvivalentní tvrzení, že z platnosti rovnice $\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x = 0$ pro libovolnou oblast Ω plyne $f(x) = 0$. To by si ovšem vyžádalo hlubšího rozboru; protipříkladem by byla např. funkce $f(x)$ nenulová na množině míry 0, jinde nulová. Spokojme se však např. s požadavkem spojitosti funkce f; pak věta platí.

Připomeňme dále, že intenzita $\vec{E}$ byla konzervativním polem, protože měla potenciál φ:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}\, \varphi \quad . \tag{117}$$

Pak zřejmě platí také, že $\vec{D} = -\varepsilon_0 \overrightarrow{\mathbf{grad}}\, \varphi$. Z těchto rovnic plyne, že

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\, \vec{E} = 0 \tag{118}$$

a také $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{D} = 0$.

Spojením obou rovnic (116) a (117) dostaneme konečně pro potenciál φ buzený ve vakuu nábojem s hustotou ρ v oblasti Ω vztah

$$\operatorname{div}\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\varphi \equiv \triangle\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{(Poisson)} \quad . \tag{119}$$

Tato rovnice se nazývá **Poissonova**.

Pokud v uvažované oblasti náboje nejsou, dostáváme homogenní rovnici zvanou **Laplaceova**:

$$\triangle\varphi = 0 \qquad \text{(Laplace)} \quad . \tag{120}$$

K jednoznačnému určení potenciálu potřebujeme v obou případech ještě okrajové podmínky, např. hodnotu funkce φ nebo normálové složky $\vec{\nabla}_\mathrm{n}\varphi$ jejího gradientu na hranici $\partial\Omega$ zkoumané oblasti Ω. Funkce splňující Laplaceovu rovnici se nazývají často **funkcemi harmonickými**.

2.11 δ-funkce

2017−09−30

„Jó, když se nechce, tak je to mnohem těžší, než když to jenom nejde.“ Toto životní moudro, spolu se zjištěním, že člověk konstruktivní se ptá JAK (to udělat), zatímco lenoch hledá PROČ (to nejde), budeme teď potřebovat pro pojem δ-funkce.

Jak zapsat hustotu $\delta(\vec{r})$ jednotkového bodového náboje umístěného v počátku souřadnic? Jak přecházet mezi spojitým a diskrétním rozložením náboje? Máme dva protichůdné požadavky:

1. $\delta(\vec{r}) = 0$ pro $\vec{r} \neq \vec{0}$, protože náboj je bodový;
2. $\int_\Omega \delta(\vec{r})\mathrm{d}\vec{r} = 1$ pro libovolnou množinu Ω obsahující počátek, protože náboj je jednotkový.

„Funkce δ“ je tedy všude mimo počátek nulová, a v počátku musí mít tak obrovskou hodnotu (nekonečnou), aby se zachránila druhá podmínka. Ovšem jak brát uvedený integrál? Riemannův integrál se nehodí, bude nekonečný, Lebesgueův zase nulový, protože hodnota funkce v jediném bodě (obecně: na množině míry 0) nemůže změnit jeho hodnotu. Tedy funkce $\delta(\vec{r})$ (v obvyklém slova smyslu) neexistuje.

Zkusíme na to jít jinak. Ze známého rozložení náboje ρ dostaneme pole (např. potenciál φ) principem superpozice rov. (62): $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho'}{R}\mathrm{d}\vec{r}\,'$, zatímco naopak ze známého pole φ dostaneme rozložení náboje z Gaussova zákona ve tvaru rov. (119): $\triangle\varphi = -\rho/\varepsilon_0$. Zkusíme-li si to ověřit na případu jednotkového bodového náboje v počátku souřadnicové soustavy, vyjde nám

$$\delta(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) = -\varepsilon_0\triangle\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\triangle\frac{1}{4\pi r} \tag{121}$$

Derivace dá všude nulu, kromě počátku, kde není definována (a akceptovali bychom, že je nekonečná). Výsledek vypadá rozumně a vede nás k tomu, že „na tom něco je“. Zřejmě ale formulace byly natolik vágní, že jim doslova vyhovět nelze.

Druhý požadavek zaručuje další potřebnou vlastnost δ-funkce:

$$\int_{\infty}^{-\infty} f(x)\delta(y-x)\mathrm{d}x = f(y) \tag{122}$$

tedy že δ-funkci lze pokláat za jádro jednotkové konvoluce. Matematicky zcela korektní zpracování δ-funkce podává teorie distribucí. Zde však vystačíme s přibližným, intuitivním postupem: budeme uvažovat posloupnost funkcí $\delta_n(x)$ se zmenšujícím se nosičem polem počátku $x = 0$ a s plochou rovnou jedné (nebo aspoň s plochou blížící se jedné pro $n \to \infty$). Pak např. přechozí rovnici lze psát zápisem

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\infty}^{-\infty} f(x)\delta_n(y-x)\mathrm{d}x = f(y) \tag{123}$$

a je mnoho posloupností funkcí $\delta_n(x)$ splňujících tuto rovnici, např.:

* „obdélník“ $\delta_n(x) = n/2$ pro $x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, $\delta_n(x) = 0$ jinde;
* „trojúhelník“ $\delta_n(x) = 1 + nx$ pro $x \in [-\frac{1}{n}, 0]$, $\delta_n(x) = 1 - nx\frac{1}{n}$ pro $x \in [0, \frac{1}{n}]$, $\delta_n(x) = 0$ jinde;
* „zvon“ $\delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}\exp(-nx^2)$ pro $n \in]-\infty, \infty[$;

Podobně z integrálních transformací např. plyne

* Fourier: $\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\,\mathrm{i}\,k(x-x'))\mathrm{d}k$,

* z ortogonálních funkcí (Bessel) $\delta(\rho-\rho') = \rho\int_0^{\infty} kJ_m(k\rho)J_m(k\rho')\mathrm{d}k$ apod.

Pro δ-funkci více proměnných použijeme jakobiánu $J = |J_{ij}| = |\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}|$ transformace:

* $\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) = \frac{1}{J}\delta(\xi_1)\delta(\xi_2)\delta(\xi_3)$ apod.

2.12 Greenova věta. Obecné řešení Poissonovy úlohy. Greenova funkce

Ukážeme, že libovolné požadované pole φ v oblasti Ω můžeme vytvořit jako superpozici pole nábojů s jistou objemovou hustotou ρ uvnitř Ω, a dále nábojů a dipólů s jistými plošnými hustotami η_n a η_d na hranici $\partial\Omega = \Sigma$ této oblasti. Speciálně, pole buzené zdroji libovolně rozloženými v celém prostoru můžeme uvnitř této oblasti Ω vytvořit (týmiž) zdroji uvnitř oblasti Ω doplněnými výše popsanou superpozicí nábojů a dipólů na hranici oblasti Ω.

Připomeňme: pro $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$ platí $\vec{\nabla}R^n = -\vec{\nabla}'R^n = nR^{n-2}\vec{R}$; $\triangle\frac{1}{R} = \triangle'\frac{1}{R} = -4\pi\delta(\vec{R}) = -4\pi\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$

Z Gaussovy věty $\int_\Omega \operatorname{div}\vec{v}\,\mathrm{d}V = \oint_{\partial\Omega}\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma}$ pro $\vec{v} = \left(\varphi\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\varphi\right)$ dostaneme **Greenovu větu**

$$\int_\Omega (\varphi\triangle\psi - \psi\triangle\varphi)\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega}\left(\varphi\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\varphi\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma} \tag{124}$$

Přejděme od $\vec{r}$ k $\vec{r}\,'$, dosaďme $\psi = \frac{1}{R}$ a uvažme, že $\vec{\nabla}'\psi = -\frac{\vec{R}}{R^3}$, $\triangle'\psi = -4\pi\delta(\vec{R})$ a $\triangle'\varphi' = -\frac{\rho'}{\varepsilon_0}$; pak

$$-4\pi\int_{\Omega'}\left(\varphi(\vec{r}\,')\delta(\vec{R}) - \frac{1}{R}\frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0}\right)\mathrm{d}\Omega' = \int_{\partial\Omega'}\left(-\varphi(\vec{r}\,')\frac{\vec{R}}{R^3} - \frac{\vec{\nabla}'\varphi(\vec{r}\,')}{R}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma'} \quad\text{, odkud} \tag{125}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Omega'}\frac{\rho(\vec{r}\,')}{R}\mathrm{d}\Omega' + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega'}\left(\varphi(\vec{r}\,')\frac{\vec{R}}{R^3} + \frac{\vec{\nabla}'\varphi(\vec{r}\,')}{R}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma'} \quad . \tag{126}$$

První člen je potenciál generovaný nábojem rozloženým s hustotou ρ v oblasti Ω', druhý a třetí popisují potenciály generované normálově orientovanými dipóly s plošnou hustotou $\varphi(\vec{r}\,')$ a náboji s plošnou hustotou $\vec{\nabla}'_\mathrm{n}\varphi(\vec{r}\,')$, obojí na povrchu $\partial\Omega'$ sledované oblasti Ω'.

Zkuste si jako cvičení co nejpečlivěji všechno odvodit s přesným rozlišováním, co a proč je funkcí $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$, R nebo $\vec{R}$.

2.13 Gaussův zákon v dielektriku; ±HRW 25-8 (26.8) 2013–10–26

2.13.1 Gaussův zákon obecně

Vyjdeme z rov. (115) svazující tok indukce $\vec{D}$ uzavřenou plochou $\Sigma \equiv \partial\Omega$ s celkovým nábojem uvnitř ve vakuu. A když je uvnitř látkové prostředí, tak budeme sledovat ionty a elektrony a „pro samé stromy neuvidíme les“.

Z molekulové struktury látek je nám známo, že i navenek neutrální látka, pro níž platí tedy $\langle q\rangle = \int_{\Omega'}\rho'\mathrm{d}V' = 0$ pro každou makroskopickou oblast Ω', obsahuje uvnitř Ω' nabité částice (**vázané náboje** s hustotou $\rho_\text{váz}$) a lze ji přerozdělením těchto nábojů polarizovat (vnějším polem či mechanickou deformací u piezoelektrických látek s nízkou symetrií stavební buňky). To se dodatečně projeví i na elektrické intenzitě i indukci. Neradi bychom ovšem popisovali vázané náboje, na které „nemůžeme“, které se přemístí samy, a spolu s volnými náboji o hustotě ρ_vol vytvářejí úhrnnou hustotu náboje ρ ve zkoumané oblasti:

$$\rho = \rho_\text{celk} = \rho_\text{vol} + \rho_\text{váz} \quad . \tag{127}$$

Zkusme proto popsat jen fenomenologicky, co se děje.

Procesem polarizace vznikly v neutrální látce dipóly; označme jejich hustotu $\vec{P}'$ (jde o zdroje, proto jejich poloha je popsána čárkovanou proměnnou). Elementární dipól $\vec{p}$ budí pole s potenciálem $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}\cdot\vec{R}/r^3$ (podle rov. (94)), takže podle principu superpozice bude potenciál daný polarizací látky

$$\varphi_\text{váz} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\vec{P}'\mathrm{d}V'\cdot\vec{\nabla}'\frac{1}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\vec{P}'\cdot\vec{R}}{R^3}\mathrm{d}V' \quad . \tag{128}$$

Integrand upravíme zavedením hustoty objemových a plošných vázaných nábojů relacemi

$$\rho'_{\text{váz}} := -\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}' = -\operatorname{div} \vec{P}' \tag{129}$$

$$\eta'_{\text{váz}} := P'_{\text{n}} = -\operatorname{Div} \vec{P}' \quad , \tag{130}$$

čímž dostaneme

$$4\pi\varepsilon_0\varphi_{\text{váz}} = \int_{\Omega'} \vec{P}' \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{R} \mathrm{d}V' = \int_{\Omega'} -\frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}'}{R} \mathrm{d}V' + \int_{\Omega'} \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{P}'}{R} \right) \mathrm{d}V' \tag{131}$$

$$= \int_{\Omega'} -\frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}'}{R} \mathrm{d}V' + \int_{\partial\Omega'} \left(\frac{P'_{\text{n}}}{R} \right) \mathrm{d}V' \tag{132}$$

$$= \int_{\Omega'} \frac{\rho'_{\text{váz}}}{R} \mathrm{d}V' + \int_{\partial\Omega'} \left(\frac{\eta'_{\text{váz}}}{R} \right) \mathrm{d}V' \quad . \tag{133}$$

Tím jsme popsali vnitřní, vázané náboje a můžeme formulovat rovnice pro zbývající, volné náboje. Intenzita $\vec{E}_{\text{váz}}$ buzená vázanými náboji je rovna $\vec{E}_{\text{váz}} = -\vec{\nabla}\varphi_{\text{váz}}$, a dále platí uvnitř Ω'

$$\operatorname{div} \varepsilon_0 \vec{E} = \rho_{\text{váz}} + \rho_{\text{vol}} = -\operatorname{div} \vec{P} + \rho_{\text{vol}} \quad , \tag{134}$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{\text{vol}} \quad . \tag{135}$$

Zavedeme-li veličinu $$\vec{D} := \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad , \tag{136}$$

dostáváme konečně $$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{vol}} \quad . \tag{137}$$

Elektrická indukce $\vec{D}$ tedy zahrnuje příspěvek vystihující polarizaci $\vec{P}$ látky tak, že divergence $\vec{D}$ dává hustotu už jenom *volných* nábojů. (Ve vakuu byl tento příspěvek pochopitelně nulový.) Gaussův zákon elektrostatiky pak říká toto:

Tok elektrické indukce uzavřenou plochou = celkový volný *náboj uvnitř této plochy:*

$$\Psi = \oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma} = \int_{\Omega} \rho \, \mathrm{d}V = q \qquad \text{(Gaussův zákon elektrostatiky)} \tag{138}$$

2.13.2 Elektrická indukce $\vec{D}$ v látce; elektrická polarizace $\vec{P}$

Právě jsme nejobecněji zavedli (rov. (136)) elektrickou indukci:

$$\vec{D} := \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad . \tag{139}$$

Speciální případy: elektrická polarizace je u mnoha látek (zvaných **měkká dielektrika**) přímo úměrná elektrické intenzitě; koeficient úměrnosti χ se nazývá elektrická **susceptibilita**:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \tag{140}$$

a lze psát

$$\vec{D} = (\varepsilon_0 + \varepsilon_0\chi)\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_{\text{rel}}\vec{E} = \varepsilon\vec{E} \quad , \tag{141}$$

kde $\varepsilon_{\text{rel}} := 1 + \chi$ se nazývá **relativní permitivita** a $\varepsilon := \varepsilon_0\varepsilon_{\text{rel}}$ **(absolutní) permitivita**. Další jednoduché (a stále ještě lineární) zobecnění je pro anisotropní látky (s nízkou krystalovou symetrií), kde $\vec{E}$ a $\vec{P}$ mají různé směry; pak susceptibilita i obě permitivity jsou tenzory a platí

$$P_j = \sum_k \chi_{jk} E_k \quad . \tag{142}$$

Vedle těchto látek existují i takové, které mají polarizaci nenulovou i v nulovém vnějším poli intenzity; samy molekuly mají dipólový moment a jsou v krystalu převážně uspořádané. Nazývají se **tvrdá** dielektrika (též **elektrety**) a lze je ve vhodné oblasti aproximovat vztahem

$$\vec{P} = \vec{P}_0 + \varepsilon_0 \chi \vec{E} \quad . \tag{143}$$

Zpravidla je však situace ještě složitější a takové látky jeví také hysterezi, tedy $\vec{P}$ závisejí nejen na okamžité hodnotě $\vec{E}$, ale i na historii látky: $\vec{P}(t_0) = f(\vec{E}(t))$ pro $t < t_0$. Částečně to lze zachránit předpokladem závislosti materiálové veličiny na frekvenci působícího pole (disperze), ale tím se zde zabývat nebudeme. A nakonec, pro velmi silná pole není závislost polarizace na intenzitě lineární.

2.13.3 Okrajové podmínky

Na rozhraní dvou různých prostředí splňuje elektrické pole tyto podmínky:

- elektrická *intenzita* má *vždy* spojitou *tečnou* složku $\vec{E}_\mathrm{t}$;
- elektrická *indukce* má na *nenabitém* rozhraní *spojitou normálovou* složku $\vec{D}_\mathrm{n}$;
- na *nabitém* rozhraní v normálové složce *skok* rovný právě plošné hustotě η náboje.

Můžeme je zapsat ve výhodném tvaru, jestliže zavedeme

- plošnou divergenci Div jako skok normálových složek vektoru na rozhraní: $\mathrm{Div}\,\vec{v} \equiv v_{\mathrm{n}1} - v_{\mathrm{n}2}$ (případně skok 1D-průmětu vektoru do přímky kolmé k rozhraní)
- plošnou rotaci $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}$ jako skok tečných složek vektoru na rozhraní: $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{v} \equiv \overrightarrow{v_{\mathrm{t}1}} - \overrightarrow{v_{\mathrm{t}2}}$ (skok 2D-průmětu vektoru do roviny tečné k rozhraní).

♣ Plošnou rotaci zde píšeme vektorově $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}$, protože je to 2D vektor. Plošnou divergenci píšeme Div, i když by i zde šlo zdůvodnit vektorové psaní: fakticky jde o rozklad (skoku) 3D vektoru na 1D a 2D.

Pak mají okrajové podmínky tvar

$$\mathrm{Div}\ \vec{D} \equiv D_{\mathrm{n}1} - D_{\mathrm{n}2} = \eta \tag{144}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\ \vec{E} \equiv \vec{E}_{\mathrm{t}1} - \vec{E}_{\mathrm{t}2} = \vec{0} \tag{145}$$

Okrajové podmínky odvodíme

- z Gaussova zákona, (138) (skok normálové složky $\vec{D}_\mathrm{n}$), a
- z existence a spojitosti potenciálu, (58) (spojitost tečné složky $\vec{E}_\mathrm{t}$).

3 Elektrostatické pole

2017–09–07

V elektrostatice se zabýváme časově nepromĕnnými stavy. Látky můžeme rozdělit do dvou skupin:

- **vodič** obsahuje volné náboje;
- **nevodič** (izolátor, dielektrikum) neobsahuje volné náboje .

Rovnováha v rozložení nábojů se vždy ustaví natolik rychle, že přechodové jevy nestačíme sledovat a popisujeme tedy jen ustálené, statické stavy (kap. 1.4.6), nanejvýš kvazistatické děje (kap. 1.4.7).

Prakticky řečeno: jestliže na předmět v měřené úloze vložíme náboj, pak

- náboj se rozuteče dříve, než stihneme měřit: předmět je vodič;
- náboj po dobu měření zůstane, kam jsme ho dali: předmět je nevodič;
- náboj změní polohu během měření: úloha není elektrostatická.

Nezabýváme se **supravodičem**, jímž může téct elektrický proud bez odporu. Pro něj je typické $\rho = 0$ a $\vec{B} = \vec{0}$.

3.1 Samotné náboje ve vakuu – HRW 24-12 (25.11)

2018–11–28

Podle Coulombova zákona kap. 2.2 je pro soustavu N částic $i = 1 \dots N$ s polohami $\vec{r}_i$ a náboji q_i elektrostatická síla $\vec{F}_{ik}$, kterou působí k-tá částice na i-tou částici, ve vakuu rovna (rov. (38))

$$\vec{F}_{ik} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_k}{R_{ik}^2} \vec{R}_{ik}^0 \tag{146}$$

kde $\vec{R}_{ik} = \vec{r}_i - \vec{r}_k$ je relativní polohový vektor i-té částice od částice k-té, $\vec{R}_{ik}^0$ je příslušný jednotkový vektor a konstanta ε_0 je elektrická konstanta. V polním pojetí vysvětlujeme silové působení polem elektrické intenzity (rov. (40)): náboj q' v bodě $\vec{r}\,'$ kolem sebe vytváří pole $\vec{E}$, které má v místě $\vec{r}$ hodnotu

$$\vec{E}(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q'}{R^2} \vec{R}^0 \tag{147}$$

kde značíme $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$ a $\vec{R}^0 = \frac{\vec{R}}{R}$ je jednotkový vektor ve směru vektoru $\vec{R}$.

3.2 Vodič v poli – HRW 24-12 (25.11)

Připomeňme si základní vlastnost vodiče a její důsledky v elektrostatice: Uvnitř vodiče se mohou některé elektricky nabité částice (**volné náboje**) pohybovat na makroskopické vzdálenosti. Jsou to záporné *elektrony*, v polovodičích také kladné *díry* (což jsou „chybějící elektrony“), v tekutině (např. v roztoku) i *ionty* obou polarit – kladné i záporné. Z pohyblivosti volných nábojů plyne:

1. Volné náboje se rozloží tak, aby soustava měla minimální potenciální energii.
2. Uvnitř vodiče je potenciál konstantní a rovný potenciálu na povrchu.
3. Povrch vodiče je ekvipotenciální plochou ($\varphi = \mathsf{konst}$).
4. V dutině uvnitř vodiče je potenciál konstantní a elektrická intenzita nulová (stínění!).
5. Také uvnitř vodiče je elektrické pole nulové ($\vec{E} = \vec{0}$).
6. Volné náboje se rozloží (obecně nerovnoměrně) po vnějším povrchu vodiče. Hustota volných nábojů uvnitř vodiče je nulová.
7. Silokřivky jsou kolmé k vnějšímu povrchu vodiče.
8. Potenciál vně nabité konečné plochy S (se známým celkovým nábojem q) splňuje následující podmínky a je jimi jednoznačně určen:
   a) Vně S platí $\triangle\varphi = 0$
   b) Pro $r \to \infty$ klesá φ k nule alespoň jako $1/r$, tj. $\lim_{r\to\infty} r\varphi(r) < \infty$
   c) Na ploše S má φ konstantní (zatim neznámou) hodnotu
   d) $\oint_{\mathrm{S}} \vec{\nabla}\varphi \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -q/\varepsilon_0$

Z tvrzení 3 plyne, že se pole vytvořené např. soustavou nábojů a nabitých vodičů nezmění, jestliže do něj vložíme další vodič, mající tvar některé ekvipotenciální plochy (nebo její části), zajistíme-li, aby měl týž potenciál, jaký měla tato ekvipotenciální plocha. To nám usnadní řešení některých úloh na určení elektrostatického pole za přítomnosti nabitých vodičů.

3.3 Kapacita soustavy vodičů

3.3.1 Potenciálové koeficienty

Uvažujme nejprve jeden konečný vodič V, který nese volný náboj q a má potenciál φ; volíme $\varphi \to 0$ pro $r \to \infty$. Z podmínek jednoznačnosti potenciálu 8 a z principu superpozice plyne, že bude-li na vodiči náboj k-krát větší, bude i jeho potenciál k-krát větší.

Uvažujme dále soustavu n vodičů V_1, V_2, ..., V_n, které mají potenciály φ_1, φ_2, ..., φ_n a nesou volné náboje q_1, q_2, ..., q_n. Podobně z principu superpozice plyne, že potenciály vodičů budou lineárními funkcemi nábojů na nich rozmístěných, tj.

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^{n} q_k b_{ki} \quad . \tag{148}$$

Veličiny b_{ki} se nazývají **potenciálové koeficienty** této soustavy vodičů.

3.3.2 Kapacitní a influenční koeficienty

Vyřešíme-li soustavu danou rov. (148) vůči q_k, dostaneme opět lineární soustavu

$$q_k = \sum_{l=1}^{n} \varphi_l c_{lk} \tag{149}$$

Veličiny c_{lk} se nazývají

- **kapacitní koeficienty** pro $l = k$;
- **influenční koeficienty** pro $l \neq k$.

3.4 Kondenzátor, kapacita – HRW 25 (26)

3.4.1 Zavedení kondenzátoru; označení

Soustava dvou vodičů 1, 2 taková, že všechny silokřivky vycházející z vodiče 1 končí na vodiči 2, se nazývá **kondenzátor**. V elektrických schématech ji značíme –||– . Vodičům se říká **elektrody**, často také (z historických důvodů) **desky** nebo **polepy** kondenzátoru.

Uvažujme jednoduchou situaci, kdy všechny silokřivky z 1 končí na 2 a také naopak, všechny silokřivky z 2 končí na 1. Pak mají nutně oba vodiče v absolutní hodnotě stejné náboje $+Q$, $-Q$. V této situaci řekneme, že kondenzátor je (jako celek) nabitý nábojem Q, neboli že nese náboj Q.

> *Věta „Kondenzátor nese náboj Q“ znamená, že jedna jeho deska nese náboj Q a druhá $-Q$.*

↩ Zdánlivou výjimkou je osamocený vodivý předmět, třeba koule. Teorii statického pole a potenciálu je totiž nejlépe konzistentně vybudovat tak, že celkový náboj ve vesmíru je nulový: kolik „přebývá“ v naší sledované soustavě, tolik se pošle s opačným znaménkem do okolí, případně do nekonečna. Tam také putují příslušné „přebytečné“ silokřivky. Koule tvoří tedy kulový kondenzátor mající druhý „polep“ v nekonečnu jako nekonečně velkou vodivou kouli s nábojem doplňujícím do nuly vnitřní náboj sledované soustavy.

3.4.2 Kapacita kondenzátoru

Z principu superpozice je zřejmé, že kondenzátor nabitý nábojem Q ponese mezi deskami napětí U, které bude přímo úměrné náboji:

$$Q = CU \tag{150}$$

Součinitel úměrnosti C je daný konstrukcí kondenzátoru a nazývá se **kapacita** tohoto kondenzátoru.

Pozor: slovo „kapacita“ tu má jiný význam než třeba u nádob; je-li kapacita termosky 2 litry, pak se do ní prostě nevejde víc než 2 litry. Kapacita C kondenzátoru naproti tomu neomezuje, kolik náboje Q se do něj vejde, ale udává poměr, jak velké napětí U tento náboj na něm vyvolá. Stejně to bude (o hodně později v termodynamice) s tepelnou kapacitou; ta zase určí úměru mezi zvýšením teploty a teplem k tomu potřebným.

Jednotkou kapacity je zřejmě 1 C/V , coulomb na volt, a vyskytuje se tak často, že pro ni byl určen název: 1 C/V = 1 F, farad (podle M. Faradaye). Běžně užívané jednotky pro běžné kondenzátory jsou mikrofarad μF, nanofarad nF, pikofarad pF.

Pro praktický odhad: kulový kondenzátor výše zmíněný o poloměru koule $r = 1\,\mathrm{cm}$ má kapacitu asi 0,9 pF.

3.4.3 Výpočet kapacity obecně – HRW 25-3 (26.3)

Z definice intenzity a potenciálu plyne, že napětí mezi body A, B je rovno křivkovému integrálu

$$U \;= \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{151}$$

Elektrická intenzita $\vec{E}$ souvisí s nábojem Q podle Gaussova zákona:

$$Q = \varepsilon_0 \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma} \qquad , \tag{152}$$

což umožňuje snadno vyřešit některé úlohy s velmi vysokou symetrií.

Uvažujme kondenzátor s rovinnými deskami. Za Gaussovu plochu vezmeme válec kolem jedné elektrody, o základně rovnoběžné s deskou a mající obsah S; je-li povrchová hustota náboje η, pak náboj $Q = \eta S$ uvnitř válce vytvoří tok Ψ intenzity $\vec{E}$ rovný ES, a tedy

$$\varepsilon_0 \Psi = \varepsilon_0 E S = Q \quad (= \eta S) \tag{153}$$

Integrál z rov. (151) z jedné desky kondenzátoru kolmo na druhou desku ve vzdálenosti d dává

$$U = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = Ed \tag{154}$$

a protože kapacita C je definována jako podíl $C = Q/U$, dostaneme dosazením pro kapacitu jednoduchý vztah

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \tag{155}$$

- Opět se můžete přesvědčit, že jednotkou elektrické konstanty ε_0 je opravdu $[\varepsilon_0] =$ F/m, jak jsme uvedli v rov. (39).
- V praxi samozřejmě deska není nekonečná. Předpokládáme jen, že můžeme zanedbat nepravidelnosti pole u okrajů desky (rozptyl siločar).

3.4.4 Výpočet kapacity kulového kondenzátoru a osamocené koule

Z kap. 2.6.1 známe potenciál $\varphi(R)$ bodového náboje q a víme, že vně homogenně nabité koule s celkovým nábojem q je průběh potenciálu stejný; pro $\varphi(R) \to 0$ při $R \to \infty$ je podle rov. (60)

$$\varphi(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R} \quad . \tag{156}$$

Tvoří-li tedy kondenzátor dvě soustředné koule o poloměrech a, $b > a$ a nese-li vnitřní koule náboj Q, pak bude mezi nimi napětí

$$U = \varphi(a) - \varphi(b) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q}{a} - \frac{q}{b} \right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{b-a}{ab} \tag{157}$$

a kapacita tohoto kondenzátoru je dána vztahem $Q = UC$, tedy

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a} \quad . \tag{158}$$

Pro jedinou kouli pak zřejmě platí limita $b \to \infty$

$$C = 4\pi\varepsilon_0 a \quad . \tag{159}$$

Kapcita osamocené koule je přímo úměrná jejímu poloměru a.

3.4.5 Výpočet kapacity válcového kondenzátoru

Podle kap. 2.7.1: v poli nabité přímky s nábojem Q na délku L (neboli s délkovou hustotou náboje $\tau = Q/L$) jsou ekvipotenciálními plochami souosé válce; podle rov. (101) je mezi válci o poloměrech a, $b > a$ napětí

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{b}{a} \tag{160}$$

a kapacita válcového kondenzátoru o délce L je

$$C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln b - \ln a} \quad . \tag{161}$$

3.4.6 Zapojování kondenzátorů: seriové a paralelní – HRW 25-4 (26.4)

Zapojení paralelní neboli **vedle sebe** (obr. 25-8): na všech kondenzátorech je stejné napětí, tedy náboje na soustavě se sčítají, a z toho plyne

$$C = \sum_k C_k \qquad \text{zapojení paralelní} \tag{162}$$

Zapojení sériové neboli **za sebou**: –||–||–||– na všech kondenzátorech jsou stejné náboje Q, tedy $U = \sum_k U_k$, a proto

$$\frac{1}{C} = \sum_k \frac{1}{C_k} \qquad \text{zapojení sériové} \tag{163}$$

Doplňme popravdě, že jsou i jiná zapojení, neredukovatelná na tyto dva prototypy (můstky, pentagon). Pro jejich výpočet nutno jednak poctivě vyřešit soustavu n lineárních rovnic pro n proměnných, viz Kirchhoffovy zákony, jednak předem vybrat tyto rovnice tak, aby nebyly lineárně závislé. Tím vším se mj. zabývá **teorie lineárních obvodů**, viz zmínka u kap. 4.9.

3.5 Energie soustavy nabitých vodičů – HRW 25-5 (26.5)

Nabitý kondenzátor má oproti nenabitému jistou elektrickou (elektrostatickou) energii. Je to zřejmé z toho, že k procesu nabíjení, tj. přenášení náboje z jednoho polepu kondenzátoru na druhý, je potřeba dodávat energii: mají-li už polepy náboje $\pm Q$ a je-li tedy mezi nimi již napětí $U = Q/C$, je pro přenos dalšího náboje dQ třeba dodat práci

$$đW = U\mathrm{d}Q = \frac{Q}{C}\mathrm{d}Q = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right) \quad , \tag{164}$$

odkud plyne, že nabitý kondenzátor získal nabitím energii

$$E_{\mathrm{el}} = \int \mathrm{d}W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2 \quad . \tag{165}$$

Podle nábojové představy je tato energie spojena s náboji (mají „vznešenější“ polohy).

Podle polní představy je energie naopak rozložena v poli mezi elektrodami, a to s hustotou, kterou dále odvodíme.

3.6 Energie elektrostatického pole; hustota energie – HRW 25-5 (26.5)

Připomeňme si situaci v deskovém kondenzátoru: mezi deskami o ploše S ve vzdálenosti d nabitými náboji $\pm Q$ je (zanedbáme-li okrajové jevy) homogenní elektrické pole a platí:

- $U = Ed$ je napětí na kondenzátoru;
- $Q = \varepsilon_0 ES$ je náboj podle Gaussova zákona
- $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$ je kapacita kondenzátoru;
- $V = Sd$ je objem prostředí mezi polepy;
- $E_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}CU^2$ je elektrická energie kondenzátoru

Odtud dostaneme dosazením celkovou energii

$$E_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d}(Ed)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Sd \tag{166}$$

a lze zavést hustotu energie jako

$$w_{\mathrm{el}} = \frac{E_{\mathrm{el}}}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}ED \qquad \text{(hustota elektrické energie ve vakuu)} \tag{167}$$

Stejný postup při kondenzátorem s dielektrikem vede rovněž k výrazu

$$w_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}ED \qquad \text{(hustota elektrické energie v dielektriku)} \tag{168}$$

4 Stacionární děje. Elektrický proud – HRW 26, 27 (27, 28) 2015−11−16

4.1 Stacionární děje

Připomeňme z kap. 1.4.8, že za stacionární označujeme takové jevy či děje, kdy se stav s časem nemění, ale kdy – na rozdíl od statických jevů – existují **proudy**, tedy toky vhodné substance. Zde budeme zkoumat v čase stálý pohyb elektrického náboje (stacionární proud).

4.2 Elektrický proud – HRW 26-2, 3 (27.2, 3)

Pro náboj Q rozložený v prostoru s hustotou $\rho(\vec{r}\,')$ a pohybující se rychlostí $\vec{v}(\vec{r}\,')$ zavedeme novou fyzikální veličinu – **objemovou**[20] **hustotu elektrického proudu** $\vec{J}(\vec{r}\,')$:

$$\vec{J} = \rho\vec{v} \quad , \tag{169}$$

Je to fyzikální pole v širším smyslu, analogické poli hustoty toku hmotnosti $\rho_m\vec{v}$, kde ρ_m je hustota hmotnosti, známé z mechaniky kontinua. Tato analogie je velmi názorná a jistě i nám prospěje.

Příbuzný pojem je **plošná hustota elektrického proudu** $\vec{J}_\Sigma(\vec{r}\,')$

$$\vec{J}_\Sigma = \eta\vec{v} \tag{170}$$

v situaci, kdy elektrický náboj teče rychlostí $\vec{v}(\vec{r}\,')$ nikoli celým objemem tělesa, ale pouze po jeho povrchu, a to s plošnou hustotu náboje $\vec{\eta}(\vec{r}\,')$. Plošným proudem nahrazujeme permanentní magnetismus (např. magnetické pole homogenního permanentního válcového magnetu je shodné s polem homogenního plošného proudu tekoucího po plášti válce kolem jeho rotační osy).

Celkový **elektrický proud** I tekoucí plochou Σ (např. příčným průřezem vodiče) získáme pak při zadané orientaci („vnější normála“ $\overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma}$) integrací

$$I = \int_\Sigma \vec{J} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma} \quad . \tag{171}$$

Může být kladný, záporný či nulový.

Podobně celkový **plošný elektrický proud** I tekoucí přes křivku Γ (např. přes úsečku spojující dolní a horní základnu válcového magnetu) získáme při zadané orientaci vnější normály $\overrightarrow{\mathrm{d}\Gamma}$ integrací

$$I = \int_\Gamma \vec{J}_\Sigma \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\Gamma} \quad . \tag{172}$$

Může také být kladný, záporný či nulový.

Představíme-li si infinitezimální proudovou trubici o průřezu $\mathrm{d}\Sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, pak $\overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma} = \overrightarrow{\mathrm{d}x} \times \overrightarrow{\mathrm{d}y}$ je rovnoběžné s $\overrightarrow{\mathrm{d}z}$ a můžeme upravit

$$I = \vec{J} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma} = \rho\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \rho\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}z}}{\mathrm{d}t} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}x} \times \overrightarrow{\mathrm{d}y} = \rho\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \quad , \tag{173}$$

takže

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \quad . \tag{174}$$

Jednotkou elektrického proudu je jeden **ampér**, A (André-Marie Ampère, 1775-1836, franc. fyzik). Je jednou ze sedmi základních jednotek SI (Système International, Mezinárodní soustava fyzikálních jednotek) při ISQ (International System of Quantities, Mezinárodní soustava veličin).

Směr proudu byl zvolen konvenčně takový, v jakém by se pohybovaly *kladné* náboje.
Bohužel, většinou jsou nosičem proudu záporné elektrony, a ty se tedy pohybují ve směru opačném, než ve kterém konvenčně teče proud. V praxi to ale nijak nevadí.

[20] Přívlastek *objemová* se obvykle vynechává, pokud se nevyskytne současně *plošná* hustota zavedená zde dále.

4.3 Rovnice kontinuity

Rovnici kontinuity odvodíme pro elektrický proud přesně stejně, jako jsme ji odvozovali v mechanice kontinua. Tam byla diferenciálním vyjádřením zákona zachování hmotnosti $\mathrm{d}m = \rho_m \mathrm{d}V$ při hustotě hmotnosti ρ_m, zde je diferenciálním vyjádřením zákona zachování elektrického náboje $\mathrm{d}q = \rho\mathrm{d}V$ při hustotě elektrického náboje ρ.

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{J} + \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{(rovnice kontinuity elektrického proudu)} \qquad (175)}$$

4.4 Elektrický proud mikroskopicky – HRW 26-2, 3 (27.2, 3)

Přenos náboje q v *látkovém* prostředí je vždy doprovázen přenosem příslušného nosiče náboje - elektronu, iontu apod. (Může být i poněkud abstraktní: v polovodiči **díra** = chybějící elektron, ale i to je ovšem pohyb okolních elektronů coby nosičů náboje.) Interakce nosičů náboje s okolím (s krystalickou mřížkou, s okolním plynem – supravodičí se zde nezabýváme) však způsobuje, že nosič předává část své hybnosti i energie tomuto okolí, a proto pro udržení stálého elektrického proudu je nutno neustále dodávat energii. (Ta se předává okolí, které se vedením proudu zahřívá **Joulovým teplem**.) Máme tedy analogii např. volného pádu v odporujícím prostředí, kdy stálá působící síla vede *nikoli* ke zrychlenému pohybu, ale k pohybu s konstantní rychlostí (v mechanice jsme ji nazývali mezní rychlost). Větší síla tedy způsobí větší výslednou rychlost, nikoli zrychlení.

Toto vše se vlastně rozumí v ustáleném stavu; k němu dojde v případě vedení elektrického proudu nesmírně rychle. Máme před očima to, co viděl Aristoteles; my si však uvědomujeme i sílu tření, kterou on nezapočítával.

Za elektrický proud pokládáme tedy *vystředovanou* hodnotu součinu náboje a jeho rychlosti. K tomu dvě poznámky:

- Mikroskopická rychlost může být velmi vysoká, ale její směr se velmi rychle mění; vystředované hodnotě tedy zdaleka nepřispěje tolik, jak by se mohlo zdát;
- Elektrický náboj může být kladný i záporný. Přenos neutrální hmoty tedy představuje přenos obojího náboje, což se ve výsledku vyruší.

Hezký model k popisu tohoto středování skýtá hejno velmi rychlých komárů téměř stojící na místě, které mírný vánek jen pozvolna posouvá. Rychlost tohoto posuvu se nazývá driftová rychlost neboli **drift**. Za obvyklých podmínek, např. v měděném vodiči domovní instalace, je driftová rychlost cca 10^{-5} m/s. Naproti tomu je individuální rychlost chaoticky se pohybujících elektronů cca 10^6 m/s, tedy o 11 řádů větší. Rychlost přenosu informace, tedy „za jak dlouho se po zapojení vypínače dozví druhý konec drátu, že je pod proudem", je přitom řádově rychlost světla, tedy o další 2 řády větší.

Připomeňme si zahradní hadici plnou vody, kterou pomalu – v milimetrech za sekundu – teče (ukapává) voda. Zarazíme-li však náhle přívod, skončí téměř současně ukapávání. Krátká doba je dána jednak vysokou rychlostí zvuku ve vodě (obdoba světelné rychlosti šíření pole), jednak tuhostí gumové hadice (obdoba indukčnosti vodiče).

V dalším se budeme zabývat situacemi, kdy vodiče elektrického proudu jsou dráty a podobné struktury, v nichž je v podstatě možný přenos náboje jen v jediném směru (neorientovaném, tedy tam i zpátky, ale nemá smyslu třeba směr kolmý k drátu).

4.5 Odpor, rezistivita, konduktivita (vodivost) – HRW 26-4, 5 (27.4, 5)

Každý materiál více (měď) nebo méně (sklo) ochotně nechává sebou procházet nosiče náboje - vlastní nebo zvnějšku dodávané. Tato vlastnost se nazývá **rezistivita** ρ (též **měrný elektrický odpor**):

$$\rho = \frac{E}{J} \qquad \text{(definice rezistivity } \rho\text{)} \qquad (176)$$

kde E je velikost elektrické intenzity a J je velikost proudové hustoty způsobené přiloženým polem. Rezistivita má jednotku $[\rho] = \frac{\mathrm{V/m}}{\mathrm{A/m^2}} = \Omega \cdot \mathrm{m}$, tedy ohm metr. Obrovský rozsah hodnot ρ (pro měď $1,8 \times 10^{-8}\,\Omega \cdot \mathrm{m}$, pro polystyren $> 10^{16}\,\Omega \cdot \mathrm{m}$) je dán exponenciální závislostí a vysvětluje ho kvantová mechanika. Pro elektricky izotropní materiály platí

$$\vec{E} = \rho\vec{J} \qquad \text{(Ohmův zákon v diferenciálním tvaru)} \qquad (177)$$

V anizotropních materiálech je rezistivita tenzorem: $E_k = \rho_{kl} J_l$. Ohmův zákon v diferenciálním tvaru (tedy pro homogenní materiály, nikoli součástky!) platí prakticky bez výjimky, i pro polovodiče. Jeho hlavním fyzikálním obsahem je však ani ne tak linearita, jako to, že ρ je vlastností materiálu, nikoli jev způsobený polem v materiálu. (Jakožto vlastnost materiálu závisí na teplotě; u vodičů obecně s teplotou roste, u polovodičů a nevodičů s teplotou klesá.)

Převrácenou hodnotou rezistivity je **konduktivita** σ (měrná vodivost):

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad \left(= \frac{J}{E}\right) \qquad \text{(definice konduktivity } \sigma) \tag{178}$$

4.6 Ohmův zákon – HRW 26-5 (27.5)

Rezistor (dříve **odpor**) je elektrický prvek, tedy objekt; má vlastnost zvanou **rezistance** R (dříve také zvanou odpor), což je fyzikální veličina. Určíme ji poměrem napětí U přiloženého na rezistor a proudu I tekoucího tímto odporem. Rezistance je vlastností rezistoru, nikoli procházejícího proudu či přiloženého napětí, i když v některých případech na nich může záviset (nelineární rezistor). Obvykle však platí **Ohmův zákon**, podle něhož (v integrálním tvaru):

$$R = \frac{U}{I} \qquad \text{(definice } R) \tag{179}$$

Součástky vytvořené z polovodičů (diody, obecně prvky s PN přechody) se jako celek integrálním zákonem rov. (179) neřídí; jsou to **nelineární** prvky.

4.7 Joulův zákon, výkon – HRW 26-7 (27.7)

Energie předaná od nosičů náboje do okolní látky se zpravidla projeví jako zahřátí látky, tj. víceméně chaotické rozkmitání krystalové mřížky nebo zvýšení rychlosti částic plynu či plazmy; takto dodaná energie se nazývá **Joulovo teplo** (James Prescott Joule [džúl], 1818-1889, angl. fyzik). Elektrickou energii dodávanou nosičům spočteme snadno:

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{el}} = \mathrm{d}Q\,U = I\mathrm{d}tU = IU\mathrm{d}t \tag{180}$$

čímž je dán výkon P spotřebovaný vodičem, kterým pod vlivem napětí U protéká proud I:

$$P = UI \tag{181}$$

Ověřte si, že rozměr odpovídá: jednotkou výkonu je watt, W:

$$1\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{A} = 1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}\cdot\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}} = 1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{W} \tag{182}$$

Pro výkon disipovaný *rezistorem* („rozptýlený“, „ztracený“ na rezistoru) tedy platí

$$P = UI = I^2R = \frac{U^2}{R} \tag{183}$$

což se někdy nazývá **Joulův zákon**.

4.8 Polovodiče, supravodiče – HRW 26-8, 9 (27.8, 9)

Chování obou typů materiálů lze vysvětlit jen kvantově.

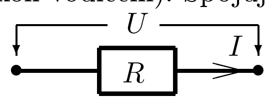
Polovodiče jsou vlastně izolátory (tj. mezi posledním plně obsazeným pásem a prázdným vodivostním pásem mají mezeru – např. $\mathrm{Si}^{\mathrm{IV}}$, $\mathrm{Ge}^{\mathrm{IV}}$ či $\mathrm{Ga}^{\mathrm{III}}\,\mathrm{As}^{\mathrm{V}}$ apod.), ta je však narušena příměsmi typu N (P^{V}, As^{V}) či typu P ($\mathrm{B}^{\mathrm{III}}$). Příměsi vytvoří v zakázaném pásu prázdnou hladinu blízko nad obsazeným pásem (P) nebo obsazenou hladinu blízko pod prázdným vodivostním pásem (N). Přeskokem elektronu pak buď zbyde díra v obsazeném pásu (děrová vodivost P) nebo volný elektron ve vodivostním pásu (elektronová vodivost N).

Supravodič umožňuje elektronům pohyb mřížkou tak, že jejich interakce s mřížkou je pružná (pohybová energie elektronů se na mřížku při srážce převádí zcela vratně). Jde nejen o nulovou rezistivitu, ale při přechodu do supravodivého stavů se také ze supravodiče vytlačí magnetické indukce, takže v něm je $B = 0$. První byly objeveny supravodiče nízkoteplotní zvané též měkké (1911, Heike Kamerlingh Onnes, rtuť pod 4,2 K, poté olovo a další kovy, za obvyklých teplot poměrně špatně vodivé), nově i vysokoteplotní (1986, Karl Alexander Müller a Johannes Georg Bednorz, ve sloučenině La-Ba-Cu-O, tedy normálně nevodivá keramika, pod 13 K supravodič; 1986, Chu Ching-wu, Y-Ba-Cu-O, nad 90 K). Jde o keramické materiály s teplotou přechodu nyní až 100 K, tzn. k supravodivosti stačí ochlazení kapalným vzduchem). Při výkladu se předpokládá, že se dva elektrony (fermiony) udržují spolu a pohybují v páru, a tato dvojice se proto chová jako boson.

4.9 Lineární obvody – HRW 27-1 až 8 (28)

Každý elektrický prvek má dva nebo více uzlů. Elektrickou síť vytvoříme tím, že tyto uzly různých prvků spolu spojíme. Značky součástí se časem vyvíjely, dnes jsou sjednoceny normami [9].

Základní „stavební elementy“:

- **vodič** (týž potenciál U na celém vodiči; týž proud I kdekoli vodičem). Spojuje 2 uzly;
- **rezistor** (rezistivita: R; platí $U = RI$). Spojuje 2 uzly; 

- **zdroj** napětí. Ideální: emn $\mathcal{E}$. Aproximace reálného zdroje: ideální zdroj a s ním v sérii vnitřní odpor R_{int}. **Svorkové napětí** zdroje při odběru proudu I je pak $U = \mathcal{E} - R_{\text{int}}I$;

a dále **uzel**, v němž se stýkají vodiče, rezistory a zdroje;

- **smyčka** je uzavřená křivka tvořená obecně vodiči, rezistory i zdroji, navzájem oddělenými uzly.

Další prvky – zdroje proudu (i neideální zdroje, s paralelním odporem), kondenzátory, indukčnosti, indukčnosti spojené vlastním magnetickým polem, transformátory atd. uvedeme až při výkladu kvazistacionárního pole (kap. 6).

4.9.1 Jednoduchá zapojení a jejich převody

Sériové zapojení za sebou, společný proud. $R = \sum R_i \quad ; \quad \dfrac{1}{C} = \sum \dfrac{1}{C_i}$

Paralelní zapojení vedle sebe, společné napětí. $\dfrac{1}{R} = \sum \dfrac{1}{R_i} \quad ; \quad C = \sum C_i.$

Trojúhelník na hvězdu: $R_a = (R_{ab}R_{ac})/(R_{ab} + R_{ac} + R_{bc})$;

Hvězda na trojúhelník: $R_{ab} = (R_aR_b + R_aR_c + R_bR_c)/R_c$
Hvězdu s libovolným počtem n ramen lze převést na n-úhelník, naopak však ne. Tyto návody stačí na rozbor veliké části běžných zapojení, nikoli však na všechna. Obecnými zákony a pravidly pro všechny případy jsou Kirchhoffovy zákony.

Théveninův teorém a Nortonův teorém tvrdí toto:

> *Z hlediska jediné větve jakkoli složité lineární sítě zdrojů napětí, proudů a rezistorů lze celý zbytek sítě nahradit jediným neideálním zdrojem napětí (tj. ideálním a sériovým rezistorem,* ***Thévenin****) nebo neideálním zdrojem proudu (tj. ideálním a paralelním rezistorem,* ***Norton****).*

4.9.2 Kirchhoffovy zákony

Zákon uzlů (1. Kirchhoffův zákon): Algebraický součet všech proudů protékajících uzlem je roven nule: $\sum I_k = 0$

Zákon smyček (2. Kirchhoffův zákon): Algebraický součet všech napětí v uzavřené smyčce je roven nule: $\sum U_k = 0$

Výklad: Zákon uzlů plyne ze zákona zachování celkového náboje přicházejícího elektrickým proudem do uzlu během pevné doby. Zákon smyček lze nahlédnout analogií „potenciál v uzlu“ $\sim$ „nadmořská výška uzlu“.

Řešení sítě zákonem smyček vede obecně na soustavu lineárních rovnic: 1 smyčka = 1 rovnice. Je potřeba ale zvolit nezávislé rovnice:

1. Vybereme jednu **kostru grafu**, tj. největší strom (acyklický graf, graf neobsahující uzavřené smyčky).
2. Každá doplněná větev uzavře nějakou smyčku; ta poskytne podle zákona smyček jednu rovnici.
3. Takto získané rovnice jsou navzájem nezávislé.

Měřicí přístroje:

Měřič proudu (ampérmetr) se řadí v sérii s měřeným proudem. Má mít co nejmenší rezistanci, aby způsobil co nejmenší úbytek napětí.

Měřič napětí (voltmetr) se řadí paralelně s měřeným napětím. Má mít co největší rezistanci, aby jím protékal co nejmenší proud a nezatěžoval tak měřený zdroj napětí.

5 Stacionární magnetické pole – HRW 28, 29 (29, 30)

2018–11–28

5.1 Magnetické pole, jeho zdroje a účinky – HRW 28 (29)

5.1.1 Permanentní magnet

Vedle výhradně přitažlivé interakce gravitační se v makrosvětě setkáme s interakcí elektrickou (často zvanou elektrostatickou), která je přitažlivá i odpudivá, a magnetickou, která je podobně jako elektrická jak přitažlivá, tak odpudivá. Tuto vlastnost vykazují látky permanentně magnetické (**magnet**), např. přírodní minerál magnetovec, tvrdá ocel, umělé magnety – slitiny kovů Fe, Ni, Co, Gd, Mn, event. s dalšími příměsmi, ale i chemicky zcela odlišné látky, např. ferity. Jiné látky (měkké železo) vykazují podobné vlastnosti, ale jen v přítomnosti permanentních magnetů. Dosud jmenované látky nazýváme feromagnetické (**feromagnetikum**). Na ostatní látky má magnetické pole mnohem slabší vliv. Obecně jsou ze silnějšího magnetického pole vytlačovány (**diamagnetikum**), někdy je ale diamagnetismus překryt vlastnostmi paramagnetickými (**paramagnetikum**) a látka je do silnějšího magnetického pole vtahována.

Toto je velmi hrubá charakteristika. Teorie pevných látek vedle toho rozeznává (a zdůvodňuje) antiferomagnetismus (dvě stejně „vydatné“ opačně orientované feromagnetické mřížky v krystalu), ferimagnetismus (dvě různě „vydatné“ opačně orientované feromagnetické mřížky v krystalu) atd.

Podrobnější pozorování ukáže, že všechna tělesa s těmito vlastnostmi se chovají jako analogie nikoli elektrických nábojů, ale *dipólů*: nejjednodušší magnetickou strukturou je destička se **severním pólem** (S; angl. N) na jedné straně a jižním pólem (J; angl. S) na straně druhé. Stejné póly se odpuzují, opačné přitahují[21], na elektricky náboj, který je v klidu, magnet nepůsobí. Tyčový magnet se chová jako složený z takových destiček a nejde proto získat magnetické póly jeho rozlomením.

Podstatně později se zjistilo, že jako permanentní magnety se chovají i mnohé elementární částice mající spin, např. záporný elektron, i složené částice, např. kladný proton či neutrální neutron (oba jsou složené z nabitých kvarků).

5.1.2 Proudová smyčka

Zatímco magnety byly známy od pradávna (i to, že Země se také chová jako velký magnet, např. kompasy ze staré Číny nebo pojednání W. Gilberta z r. 1600), magnetické účinky elektrického proudu objevil až v r. 1820 dánský fyzik Hans Christian Ørsted (1777-1851, často přepisováno Oersted) a Ampère záhy na to (1822) popsal interakci dvou vodičů protékaných elektrickým proudem jako interakci magnetickou. Připomeňme, že homogenně zmagnetovaná kruhová destička budí stejné pole jako smyčka tvořená jejím obvodem a protékaná vhodně velkým elektrickým proudem.

5.1.3 Silové účinky magnetického pole. Magnetická indukce a intenzita

Vedle toho, že na sebe silově působí (v libovolných kombinacích) permanentní magnety i proudové smyčky, působí magnetické pole na pohybující se elektrický náboj, a to zásadně silou kolmou na jeho rychlost, tedy kolmou na okamžitý směr pohybu (1889 O. Heaviside, poté H. A. Lorentz, možná už i J. C. Maxwell 1865).

V duchu polního přístupu zavedeme k popisu interakce magnetická pole $\vec{H}$, $\vec{B}$. Bohužel, z historických důvodů[22] je terminologie obrácená, než bychom zvolili dnes, takže tato pole nazýváme **magnetická indukce** $\vec{B}$ a **magnetická intenzita** $\vec{H}$. Síla působící na bodový náboj q pohybující se rychlostí $\vec{v}$ je pak

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \tag{184}$$

(viz rov. (21)), první člen se nazývá Coulombova síla, druhý Lorentzova síla. Odtud také plyne *jednotka* magnetické indukce 1 tesla, T, kde 1 T = N/(C·m/s) = N/(m·A). Dříve (v soustavě CGS) se užívala jednotka 1 gauss, 1 G = 10^{-4}T.

Jednotkou magnetické intenzity, jak bude zřejmé z rov. (212), je $[H]$ = A/m, ampér na metr.

Ve vakuu spolu souvisí magnetická indukce a intenzita vztahem $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$, kde μ_0 je **magnetická konstanta**, dříve zvaná **permeabilita vakua**:

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{N\cdot m\cdot A^{-2}} \approx 1{,}256\,6\cdot 10^{-6}\,\mathrm{H/m} \tag{185}$$

[21] Připomeňme ze zeměpisu, že poblíž severního geografického pólu tedy leží fakticky jižní magnetický pól; nazývá se však z pochopitelných důvodů severním *geomagnetickým* pólem.

[22] podle analogie předpokládající magnetické monopóly k bodovým elektrickým nábojům

(Připomeňme, že elektrická a magnetická konstanta jsou s rychlostí světla ve vakuu spojeny vztahem $\varepsilon_0\mu_0 c_0^2 = 1$.)

Síla působící na náboj je vždy kolmá ke směru jeho pohybu a nekoná tedy práci – nemění energii náboje, jen zakřivuje jeho dráhu.

Sílu působící na permanentní magnet a na vodič protékaný proudem v poli odvodíme později.

5.1.4 Pohyb nabité částice v magnetickém poli – HRW 28-6, 7 (29.5, 6)

Uvažujme pro jednoduchost částici kladně nabitou $q > 0$ (abychom nemuseli u velikostí ostatních veličin psát absolutní hodnoty) letící rychlostí $\vec{v}$ v magnetickém poli s indukcí $\vec{B}$.

Letí-li částice *podél* silokřivky $\vec{B}$, nepůsobí na ni od magnetického pole žádná síla, částice tedy pokračuje stálou rychlostí ve stejném směru dále.

Letí-li však *kolmo* k silokřivce, působí na ni síla o velikosti qvB kolmo ke směru pohybu. Tato síla však nedodává energii (velikost v rychlosti $\vec{v}$ částice se proto nemění). Je-li magnetické pole homogenní, bude se v něm částice pohybovat po kružnici o poloměru r takovém, aby dostředivá síla byla právě realizována Lorentzovou sílou:

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \qquad \text{a tedy} \tag{186}$$

$$r = \frac{mv}{qB} \qquad \text{poloměr kružnice} \tag{187}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \qquad \text{doba oběhu} \tag{188}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m} \qquad \text{úhlová frekvence} \tag{189}$$

(tzv. **cyklotronová frekvence**).

Při obecném směru se částice pohybuje v magnetickém poli po šroubovici kolem silokřivky. Při dostatečném zhuštění silokřivek se náboj pohybuje po menších kružnicích a dá se dokázat, že má natolik menší stoupání, že od dostatečně velkého zesílení pole se bude po šroubovici odrážet (princip **magnetických nádob** neboli magnetických **pastí**).

5.1.5 Ampérova síla – HRW 28-8 (29.7)

Protože elektrický proud I souvisí s pohybem náboje vztahy

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \int_S \rho\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \quad , \tag{190}$$

je zřejmé, že na elektrický proud I (přesněji: na přímý vodič délky L protékaný proudem o velikosti I) bude v magnetickém poli působit síla

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B} \quad , \tag{191}$$

kde vektor $\vec{L}$ má velikost L a směr podél vodiče ve směru toku proudu. V diferenciálním tvaru – pro infinitezimální úsek $\mathrm{d}\vec{r}'$ vodiče – má tato **Ampérova síla** tvar

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{r}' \times \vec{B} \qquad \text{(Ampérova síla).} \tag{192}$$

5.1.6 Proudová smyčka – HRW 28-9, 10 (29.8, 9)

(Obr. 28(29)-21 a 28(29)-22.) V homogenním magnetickém poli $\vec{B}$ ve směru osy x leží obdélníková smyčka o délce a ve směru osy y a šířce b v rovině xz pod úhlem θ k rovině yz, protékaná proudem I, otáčivá kolem osy symetrie smyčky ve směru osy y. Smyčka má obsah $S = ab$. Na její i-tou stranu působí síla $\vec{F}_i$ kolmá k této straně a ležící v rovině yz (tedy kolmo k $\vec{B}$). Je-li smyčka pevná, pak se síly na šířky b navzájem vyruší, ale síly působící na délky a mají obecně různá umístění x, a proto vytvářejí silovou dvojici (s ramenem b) působící na smyčku momentem síly $\vec{M}$ o velikosti

$$M = IabB\sin\theta = ISB\sin\theta \tag{193}$$

hledícím stočit smyčku do polohy s $\theta = 0$ (tj. do roviny yz kolmé k poli $\vec{B}$).

Je-li takových navzájem rovnoběžných smyček N, bude výsledná síla N-krát větší, tedy také

$$M_N = (NIS)B \sin\theta \tag{194}$$

kdy veličiny v závorce jsou konstanty dané konstrukcí cívky. Na tomto principu pracovaly analogové galvanoměry měřící (neznámý) proud I cívkou (než je vytlačily digitální měřidla) a jsou i podstatou elektromotorů (tam je potřeba zajistit, např. setrvačností, přeběhnutí „mrtvé“ polohy s $\theta = 0$ a současně změnit orientaci proudu I cívkou).

Z tohoto hlediska se zkoumaná cívka chová jako obdélníkový permanentní magnet mající **magnetický moment** $\vec{m}$ se směrem v ose cívky a s velikostí

$$m = NIS \qquad \text{(magnetický moment)} \tag{195}$$

s jednotkou $[m] = 1\,\mathrm{A{\cdot}m^2}$ a rov. (194) můžeme vektorově zapsat tvarem

$$\overrightarrow{M}_N = \vec{m} \times \vec{B} \tag{196}$$

podobně jako moment síly, kterým působilo elektrické pole na elektrický dipól. Analogicky odvodíme potenciální energii magnetického dipólu ve vnějším magnetickém poli jako

$$E_\mathrm{p} = -\vec{m} \cdot \vec{B} \tag{197}$$

odkud je zřejmý i jiný zápis *jednotky magnetického momentu*

$$[m] = 1\,\mathrm{A{\cdot}m^2} = 1\,\mathrm{J/T} \tag{198}$$

♣ Teď asi rozumíte, proč jsme jako elementární magnet volili raději magnet destičkový než tyčový.

5.2 Magnetické pole elektrického proudu ve vakuu – HRW 29 (30)

5.2.1 Biotův-Savartův zákon – HRW 29-2 (30.1)

Vzorec pro magnetické pole $\vec{B}$ elekrického proudu „navrhneme“ analogicky jako vzorec pro elektrické pole elektrického náboje, jen s pár potížemi:

1. půjde o vektorový proudový element $\mathrm{d}\vec{I} = I\mathrm{d}\vec{r}\,'$, nikoli o skalární element náboje $\mathrm{d}q'$;

2. zatímco elementární náboj je fyzikálně přijatelný, je elementární proudový element lehce obskurní (odkud teče a kam?). Ale nějak to zvládneme (vždycky ho nakonec zintegrujeme podél uzavřené smyčky);

3. z historických důvodů (analogie magnetu a elektretu) jsou prohozeny názvy polí $\vec{B}$ a $\vec{H}$. Pole $\vec{B}$ by se mělo jmenovat „magnetická *intenzita*“, protože přímo určuje sílu. Jeho vlivem se také magnetikum mění a indukuje se v něj magnetická polarizace. Přesto se nazývá magnetickou *indukcí.*

Jako přijatelný se pro magnetické pole ve vakuu jeví tvar analogický Coulombovu zákonu rov. (40); (to μ_0 by vlastně patřilo jinam, a to k $\vec{H}$ do vztahu $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ ve vakuu)

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\mathrm{d}\vec{r}\,' \times \vec{R}^0}{R^2} \qquad \text{(Biotův-Savartův zákon)} \tag{199}$$

s obvyklým $\vec{R} = \vec{r}\,' - \vec{r}$ a jednotkovým vektorem $\vec{R}^0$; HRW namísto našeho $\vec{r}\,'$ užívá s.

5.2.2 Magnetické pole přímého vodiče NRW 29-2

Napravíme potíž 2 z minulého odstavce tím, že spočteme magnetické pole nekonečného přímého vodiče v ose x (proud přichází z nekonečna a do nekonečna se taky vrací, což taky není zrovna ideální, ale pořád lepší než odnikud nikam). Pole zřejmě bude záviset jen na vzdálenosti r od osy x a stačí ho určit na ose z; bude mít směr y a velikost

$$|\vec{B}(\vec{r})| = \left|\int \mathrm{d}\vec{B}\right| = \frac{\mu_0}{4\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{I\mathrm{d}\vec{r}\,' \times \vec{R}}{R^3}\right| = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\mathrm{d}x}{(x^2+z^2)^{3/2}}\right| \tag{200}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi|z|}\left[\frac{x}{(x^2+z^2)^{1/2}}\right]_0^{\infty} \tag{201}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi|z|} \qquad \text{(mg. pole na ose z, buzené přímým vodičem ležícím v ose x)} \tag{202}$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad \text{(mg. pole přímého vodiče ve vzdálenosti } r \text{ od vodiče)} \tag{203}$$

Směr indukčních čar plyne z vektorového součinu a lze ho tedy popsat pravidlem pravé ruky (zvaným někdy **Maxwellovo pravidlo vývrtky** ({*Maxwell's corkscrew rule*}):

Položíme-li palec pravé ruky ve směru toku proudu, ukazují zahnuté prsty směr magnetických indukčních čar.

5.2.3 Síla mezi rovnoběžnými vodiči protékanými proudem – HRW 29-3 (30.2)

Ze známého magnetického pole $\vec{B}$ jednoho vodiče (rov. (203)) a ze známé síly (rov. (191)) působící na druhý vodič ve známém magnetickém poli $\vec{B}$ určíme i směr, i velikost síly působící na rovnoběžné vodiče protékané proudem:

Dva rovnoběžné vodiče ve vzdálenosti d protékané proudy I_1 a I_2 se při stejné *orientaci proudů přitahují, při* opačné *se odpuzují. Velikost síly na délku L je rovna*

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi d} \tag{204}$$

5.2.4 Pole závitu, cívky, toroidu – HRW 29-3, 5, 6 (30.4, 5)

Pole *uprostřed* závitu cívky spočítáme snadno:

$$B = \oint_\Gamma \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\Gamma}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{R} \tag{205}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \qquad \text{(pole ve středu kruhové smyčky)} \tag{206}$$

Má-li **solenoid** (dlouhá, hustě vinutá cívka s délkou L podstatně větší než poloměr R) N závitů protékaných proudem I, bude pole uvnitř homogenní. Šlo by ho ovšem rovněž spočíst integrací (princip superpozice), ale mnohem jednodušeji dostaneme záhy z Ampérova zákona vztah

$$B = \mu_0 I n \qquad \text{(pole v ideálním, nekonečném solenoidu)} \tag{207}$$

kde $n = N/L$ je počet závitů na jednotku délky. Solenoid umožňuje jednoduše vytvořit celkem homogenní magnetické pole.

Stočením solenoidu do kružnice (prstenec, „pneumatika“) dostaneme **toroid**, důležitý např. při návrhu „nádoby“ na vysokoteplotní plazmu tvořenou rychlými nabitými částicemi (např. TOKAMAK = rus. toroidaľnaja magnitnaja katuška). Opět z Ampérova zákona dostaneme celkem snadno, že velikost pole uvnitř toroidu o celkovém počtu závitů N (mírně) klesá se vzdáleností r od středu toroidu podle vzorce

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi\ r} \qquad \text{(pole v toroidu)} \tag{208}$$

a vně ideálního toroidu je magnetické pole nulové: $B = 0$.

5.3 Ampérův zákon ve vakuu. Intenzita magnetického pole – HRW 29-4 (30.3)

Podobně jako je Coulombův zákon (určení pole známého náboje) ekvivalentní Gaussovu zákonu (určení náboje ze známého pole), je i Biotův-Savartův zákon ekvivalentní **Ampérovu zákonu**:

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 I_\Sigma \tag{209}$$

kde I_Σ je úhrnný proud protékající plochou Σ, která má za hranici smyčku Γ. Orientaci určí **Ampérovo pravidlo pravé ruky**:

Ukazují-li prsty sevřené pravé ruky ve směru silokřivek $\vec{B}$ podél Ampérovy křivky, pak palec ukazuje kladný směr elektrického proudu.

Zavedeme další pole, magnetickou intenzitu $\vec{H}$, ve vakuu vztahem

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \tag{210}$$

a tím dostaneme vztahy pro pole v solenoidu

$$H = In \tag{211}$$

a Ampérův a Biotův-Savartův zákon

$$\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \;=\; I \qquad \text{(Ampér, pro } \vec{H}\text{)} \tag{212}$$

$$\mathrm{d}\vec{H} \;=\; \frac{1}{4\pi} \frac{I \mathrm{d}\vec{r}\,' \times \overrightarrow{R^0}}{R^2} \qquad \text{(Biot, Savart, pro } \vec{H}\text{)} \tag{213}$$

5.4 Ampérův zákon v látkovém prostředí – HRW 32-3, 32-4

Podobně jako v elektrickém poli, chceme i v magnetickém poli oddělit zdroje magnetického pole námi řízené od spontánních či indukovaných zdrojů magnetického pole přítomných už „od narození“ v látkovém prostředí. Mikroskopický rozbor je zde mnohem složitější a méně názorný než u (prostých) elektrických nábojů a dipólů, přesto celkový výsledek lze zapsat analogicky.

Z elektrického hlediska stačilo k elektrické intenzitě $\vec{E}$ doplnit jako charakteristiku látky pole elektrické polarizace $\vec{P}$. S definičním vztahem $\vec{D} := \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ pak bylo pole v elektrostatice popsáno rovnicemi $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\, \vec{E} = \vec{0}$ a div $\vec{D} = \rho$.

(Ve vakuu bylo $\vec{D} = \vec{0}$, v častém případě lineárního „měkkého“ dielektrika existoval materiálový parametr χ, elektrická susceptibilita, takový, že $\vec{P} = \chi \vec{E}$, takže stačilo zavést permitivitu $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi)$ a pak pro dvě klíčová pole, tj. elektrickou intenzitu $\vec{E}$ a indukci $\vec{D}$ platilo prostě $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$.)

Analogicky se ukazuje, že z magnetického hlediska stačí k magnetické indukci $\vec{B}$ doplnit jako charakteristiku látky pole **magnetické polarizace** $\vec{J}_\mathrm{m}$, resp. **magnetizaci** $\vec{M} = \vec{J}_\mathrm{m}/\mu_0$. S definičním vztahem $\vec{H} := \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$ – neboli $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ – pak bude magnetické pole v látce (zatím) popsáno rovnicemi $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\, \vec{H} = \vec{J}$ a div $\vec{B} = 0$; rov. (212), (213) budou platit i v látkovém prostředí.

6 Kvazistacionární elektromagnetické pole

Kvazistacionární pole je „předposledním“ zobecněním: popisuje elektromagnetické děje, ale stále se všechny změny pole odehrávají synchronně se změnami jeho zdrojů – tedy formálně, jako by se světlo (coby změna v elmg. poli) šířilo nekonečně rychle.

6.1 Zákon elektromagnetické indukce – HRW 30-3

Mění-li se magnetické pole $\vec{B}$ v čase, vytváří tím prostorovou změnu elektrického pole $\vec{E}$.

Vyjádřeno kvantitativně:

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E} + \partial_t \vec{B} = \vec{0} \tag{214}$$

Časová změna magnetické intenzity tedy vyvolá prostorovou změnu elektrické intenzity. (Připomeňme, že doposud, v kvazistatickém poli, bylo $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$.)

Je-li v uvažovaném místě vodič, pak podle Ohmova zákona v něm elektrická intenzita vyvolá elektrický proud s hustotou $\vec{J} = \sigma\vec{E}$.

Pokud vodič tvoří smyčku[23] Γ s rezistancí R, pak časová změna celkového **magnetického toku** Ψ procházejícího smyčkou Γ vyvolá ve smyčce indukované elektromotorické napětí $\mathcal{E} = \oint_\Gamma \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$ a proud I tekoucí touto smyčkou bude podle Ohmova zákona roven $I = \mathcal{E}/R$, kde

$$\mathcal{E} = \oint_\Gamma \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} \quad . \tag{215}$$

Jednotkou magnetického toku je weber; $[\Psi] =$ Wb $=$ J/A $=$ V $\cdot$ s.

6.2 Vlastní a vzájemná indukčnost vodičů

Zajímavá a prakticky i teoreticky významná situace nastane, když magnetické pole (a tedy i jeho změny) je vyvoláno vodivou smyčkou Γ_1, případně když ještě změnu touto smyčkou vyvolaného magnetického toku měříme druhou smyčkou Γ_2.

Uvažujme nejprve smyčku Γ tvořenou vodičem protékaným elektrickým proudem $I(t)$, a to ve vakuu. Tato smyčka vytváří magnetické pole $\vec{B}(\vec{r},t)$, které lineárně závisí na proudu I. Zřejmě je tedy na proudu I lineárně závislý magnetický tok $\Psi = \int_\mathrm{A} \vec{B}\cdot \mathrm{d}A$ smyčkou, kde A značí úsek 2D plochy mající Γ za hranici, a lze psát

$$\Psi = LI \quad , \tag{216}$$

kde veličina L zvaná **vlastní indukčnost smyčky** závisí jen na geometrickém tvaru smyčky Γ. Přítomnost *lineárního* látkového prostředí (např. paramagnetika či diamagnetika) změní hodnotu L, neovlivní ale funkční závislost – linearitu; rov. (216) platí nadále, jen jinou hodnotou L'.

Pojem vlastní indučnosti lze zobecnit na libovolný vodič či jeho úsek (nemusí být ani uzavřený), pokud uvažujeme celkový magnetický tok Ψ tímto úsekem vytvořený. Uvažujeme-li soustavu N smyček $\Gamma_i, i = 1\ldots N$ protékaných proudy i_i, bude vždy celkový magnetický tok Ψ_i procházející i-tou smyčkou lineárně záviset na proudech ve *všech* smyčkách a lze psát

$$\Psi_i = \sum_k L_{ik} I_k \quad , \tag{217}$$

kde veličiny L_{ik} opět závisejí jen na geometrickém tvaru všech smyček Γ_k a jejich vzájemné poloze, nikoli na protékajících proudech. A opět, přítomnost *lineárního* látkového prostředí změní hodnoty L_{ik}, neovlivní však funkční závislost – linearitu rovnic rov. (217). Koeficient L_{ik} se stejnými indexy

[23] Připomeňme, že smyčkou bude vždy topologická kružnice, tedy uzavřená křivka, kterou lze „stáhnout do bodu“. Předpokládáme dále, že 2D oblast Σ, která má smyčku coby hranici, je orientovatelná, tj. „dvoustranná“, nikoli typu Möbiova listu či Kleinovy láhve. Cívku jako část smyčky zpravidla aproximujeme více samostatnými uzavřenými závity; plocha Σ by jinak byla značně nenázorná.

$i = k$ představuje zřejmě dříve zavedenou vlastní indukčnost i=té smyčky; koeficienty pro $i \neq k$ se nazývají **vzájemnými indukčnostmi** soustavy smyček.

Uvažujeme-li nyní situaci, kdy se mění s časem proud $I_k(t)$ tekoucí k-tou smyčkou, nemění se však geometrická konstelace, bude každá změna proudu vyvolávat ve smyčce indukované elektromotorické napětí $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\mathrm{d}\Psi_i}{\mathrm{d}t} = -\sum_k L_{ik} \frac{\mathrm{d}I_k}{\mathrm{d}t} \tag{218}$$

Jednotkou vlastní i vzájemné indukčnosti je henry: $[L_k] = [L_{ik}] = \mathrm{H} = \mathrm{Wb/A} = \mathrm{V \cdot s/A}$.

6.3 Obvody RLC – HRW 27-9 (28.8)

U stacionárního pole jsme probrali obvody a sítě tvořené rezistory a zmínili jsme se o paralelním a sériovém zapojení kondenzátorů. Jako další prvky sítí přibereme nyní kondenzátory (charakterizované kapacitou C) a cívky (charakterizované indukčností L).

Opět budeme vycházet z Kirchhoffova zákona smyček; okamžité napětí U_X na prvku X a okamžitý proud I jím tekoucí budou spojeny vztahy

- $U_R = RI$ pro rezistor s odporem R
- $U_L = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ pro cívku s indukčností L
- $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}$ pro kondenzátor s kapacitou C.

Lze snadno nahlédnout, že lineárními kombinacemi uvedených prvků v obecné síti dostaneme Obvodem složeným ze sériově zapojeného zdroje ($\mathcal{E}$), rezistoru (R) a kondenzátoru (C) protéká proud I a nabíjí kondenzátor, na němž je napětí U a náboj Q:

$$-\mathcal{E} + IR + \frac{Q}{C} = -\mathcal{E} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = 0 \tag{219}$$

s řešením

$$Q = C\mathcal{E}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}) \tag{220}$$

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathcal{E}}{R}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \tag{221}$$

$$U = \frac{Q}{C} = \mathcal{E}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}) \tag{222}$$

Veličina $\tau = RC$ se nazývá **časová konstanta**, lépe **časový parametr**.

Pro vybíjení kondenzátoru je $\mathcal{E}$= 0 a rovnice $IR + Q/C = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}R + Q/C = 0$ má řešení

$$Q = Q_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \tag{223}$$

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{Q_0}{RC}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \tag{224}$$

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Q_0}{C}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \tag{225}$$

6.4 Energie magnetického pole – HRW 30-10,11 (31-10,11)

V elektrostatickém poli (str. 37) jsme uvedli pro elektrostatické pole v rov. (166)=(226) energii $\mathcal{E}_{\mathrm{el}}$, a v rov. (168)=(228) její hustotu w_{el}. Ukážeme, že podobné relace platí i pro magnetické pole. Analogicky k elektrickému procesu nabíjení kondenzátoru v kap. 3.6 budeme zde studovat magnetismus zaváděním proudu do cívky. Situace je poněkud složitější tím, že „elementárním zdrojem“ magnetického pole není nějaký „bodový magnet“. Biotův-Savartův zákon rov. (213) vztah $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ nám dává

$$\mathcal{E}_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \tag{226}$$

$$\mathcal{E}_{\mathrm{mg}} = \frac{1}{2}LI^2 \tag{227}$$

$$w_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \tag{228}$$

$$w_{\mathrm{mg}} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \tag{229}$$

7 Nestacionární elektromagnetické pole

2016–12–08

Nestacionární pole je nejobecnějším typem elektromagnetického pole. V něm se již projeví konečná rychlost šíření světla (tj. elmg. vln) a z ní plynoucí důsledky.

7.1 Maxwellovy rovnice

Maxwellovy rovnice spojují elektromagnetické pole a jeho zdroje. Tvoří soustavu vektorových lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu. Uvádíme-li polní veličiny na levé straně a zdroje na pravé, mají Maxwellovy rovnice uvnitř zkoumané oblasti V tvar:

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{H} - \partial_t\vec{D} = \vec{J} = \vec{J}_{\mathrm{vt}} + \sigma\vec{E} \qquad \text{(první série Mxw. r.)} \tag{230}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho \tag{231}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E} + \partial_t\vec{B} = \vec{0} \qquad \text{(druhá série Mxw. r.)} \tag{232}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \tag{233}$$

První série je tedy obecně nehomogenní, druhá série je vždy homogenní díky neexistenci magnetických nábojů a proudů.

Aby se zachovával elektrický náboj (viz kap. 2.1; 7.2.1), musejí zdroje (náboje a proudy na pravé straně první série) vyhovovat *rovnici kontinuity* 4.3:

$$\operatorname{div}\ \vec{J} + \partial_t\rho = 0. \tag{234}$$

7.1.1 Okrajové podmínky

K diferenciálním rovnicím patří nezbytně i okrajové podmínky (počáteční a okrajové). Na hranici ∂V (resp. při přechodu přes ni) splňuje pole podmínky, které můžeme zapsat výhodně ve tvaru analogickém Maxwellovým rovnicím, jestliže zavedeme

plošnou divergenci Div jako skok normálových složek vektoru na rozhraní: $\operatorname{Div}\vec{v} \equiv v_{\mathrm{n1}} - v_{\mathrm{n2}}$ (případně skok 1D-průmětu vektoru do přímky kolmé k rozhraní)

plošnou rotaci $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}$ jako skok tečných složek vektoru na rozhraní: $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{v} \equiv v_{\mathrm{t1}} - v_{\mathrm{t2}}$ (skok 2D-průmětu vektoru do roviny tečné k rozhraní):

$$\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\ \vec{H} \equiv \vec{H}_{\mathrm{t1}} - \vec{H}_{\mathrm{t2}} = \vec{\imath} \tag{235}$$

$$\operatorname{Div}\ \vec{D} \equiv D_{\mathrm{n1}} - D_{\mathrm{n2}} = \eta \tag{236}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\ \vec{E} \equiv \vec{E}_{\mathrm{t1}} - \vec{E}_{\mathrm{t2}} = \vec{0} \tag{237}$$

$$\operatorname{Div}\ \vec{B} \equiv B_{\mathrm{n1}} - B_{\mathrm{n2}} = 0. \tag{238}$$

♣ Plošnou rotaci píšeme vektorově $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}$, je to 2D vektor. Plošnou divergenci píšeme obyčejně Div, i když by šlo zdůvodnit i vektorové psaní: fakticky jde o rozklad (skoku) 3D vektoru na 1D a 2D.

¿? Proč se rozdíly tečných resp. normálových složek pole na obou stranách plochy nespojitosti označují jako plošná rotace $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}$ resp. plošná divergence Div? Odp. je na str.51.

¿? Proč v rov. (235) a rov. (237) není člen analogický časové derivaci? Odp. je na str.51.

¡! Odp. ze str.51: WWW

¡! Odp. ze str.51: WWW

¡! Odp. ze str.57: Zdroj takto popsaný nevyhovuje rovnici kontinuity: vznikne a vzápětí zanikne. Je to ale jen mezivýsledek. Skutečné zdroje z něj vytvoříme tak, že budou rovnici kontinuity vždy vyhovovat.

7.2 Zákony zachování, rovnice kontinuity

7.2.1 Náboj

Zopakujme: z Maxwellových rovnic plyne omezení na možné typy zdrojů, tj. elektrických nábojů a proudů: musejí splňovat rovnici kontinuity. Pokud totiž na Maxwellových rovnicích

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{H} - \partial_t\vec{D} = \vec{J} \qquad (230)$$
$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho \qquad (231)$$
$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E} + \partial_t\vec{B} = \vec{0} \qquad (232)$$
$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad (233)$$

provedeme operace $\operatorname{div}(230) + \partial_t(231)$, dostáváme přímo rovnici kontinuity pro elektrický proud:

$$\operatorname{div}\vec{J} + \partial_t\rho = 0 \qquad (4.3),$$

protože $\operatorname{div}\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{V} = 0$ pro libovolný vektor $\vec{V}$.

7.2.2 Energie

V elektrostatice jsme rozborem procesu nabíjení kondenzátoru zjistili, že v elektricky měkkém lineárním homogenním prostředí energie rozložená spojitě s hustotou

$$u_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} \qquad (239)$$

(tedy „nesedí na nábojích“, ale naopak je rozložena v poli kolem nich). Analogický výraz

$$u_{\mathrm{mg}} = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} \qquad (240)$$

vyjadřuje hustotu magnetické energie v magneticky měkkém lineárním prostředí a získáme ho rozborem průchodu elektrického proudu cívkou při vytváření magnetického pole.

Proveďme nyní s Maxwellovými rovnicemi operaci

$$-\vec{E}\cdot(230) + \vec{H}\cdot(232)$$

a použijme linearit, tj. $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{H} = \vec{B}/\mu$. Pak lze výsledek s uvážením identity

$$\operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{H}) = \vec{H}\cdot\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E} - \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{H}$$

zapsat ve tvaru

$$\operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{H}) + \partial_t\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}) = -\vec{J}\cdot\vec{E}. \qquad (241)$$

První člen bude mít význam „odtoku“ energie, jestliže výraz

$$\vec{S} = (\vec{E}\times\vec{H}) \quad \text{(Poyntingův vektor)} \quad , \qquad (242)$$

zvaný **Poyntingův vektor**, budeme interpretovat jako hustotu toku elektromagnetické energie. (Integrací rov. (241) přes objem V pomocí Gaussovy věty přejde tento výraz na tok energie hranicí ∂V oblasti V.) Druhý člen má, jak již víme, význam časové změny hustoty u elektromagnetické energie v poli. Výraz na pravé straně odpovídá hustotě $\mathcal{Q}$ energie Joulova tepla vyloučeného při průchodu elektrického proudu prostředím s konečnou vodivostí:

$$\vec{J}\cdot\vec{E} = \vec{J}^2/\gamma, \qquad (243)$$

značíme-li zde γ vodivost prostředí. Rov. (241) tím dostává tvar

$$\operatorname{div}\vec{S} + \partial_t u = -\mathcal{Q}, \qquad (244)$$

což je diferenciální tvar zákona zachování energie, opět vyjádřený formou rovnice kontinuity.

7.3 Potenciály

7.3.1 Vektorový potenciál

Podle analogie s elektrostatikou (starší pohled) by elektrické indukci $\vec{D}$ odpovídala magnetická indukce $\vec{B}$; nulovost její divergence (poslední z Maxwellových rovnic, rov. (13))

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad , \tag{245}$$

vyjadřovala neexistenci magnetického náboje. Z této rovnice novější pojetí vychází, ale bere ji hlouběji. Z jednoznačného určení pole jeho divergencí, rotací a okrajovými podmínkami lze dokázat, že k poli $\vec{B}$, pro něž platí rov. (245), existuje pole $\vec{A}$ zvané **vektorový potenciál** takové, že platí

$$\vec{B} = \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{A} \quad \text{(vektorový potenciál)} \tag{246}$$

U vektorového potenciálu je volnost podstatně větší, než byla u skalárního: je určen až na gradient libovolné funkce $\lambda(\vec{r})$, tzn., je-li nějaká funkce $\vec{A}(\vec{r})$ vektorovým potenciálem pole $\vec{B}(\vec{r})$, pak i funkce

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\lambda(\vec{r}) \tag{247}$$

je vektorovým potenciálem téhož pole, neboť pro libovolnou funkci $\lambda(\vec{r})$ platí, že $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\lambda = \vec{0}$.

Tato volnost nám umožní u složitějších úloh zvolit potenciály φ a $\vec{A}$ vhodnou **cejchovací** (též **kalibrační**) **transformací** tak, aby nové potenciály měly např. vyšší symetrii nebo jiným způsobem napomáhaly k řešení a k interpretaci výsledku.

7.3.2 Skalární potenciál

Připomeňme, že v elektrostatickém poli byla intenzita $\vec{E}_{\mathrm{st}}$ nevírová, a proto existoval potenciál φ:

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E}_{\mathrm{st}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{\mathrm{st}} = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\varphi_{\mathrm{st}} \quad . \tag{248}$$

Ten byl určen jednoznačně až na konstantu φ_0, tj. potenciál φ', kde

$$\varphi'_{\mathrm{st}}(\vec{r}) = \varphi_{\mathrm{st}}(\vec{r}) + \varphi_0 \quad , \tag{249}$$

dával tutéž intenzitu $\vec{E}_{\mathrm{st}}$.

V nejobecnějším případě nestacionárního pole však platí (předposlední z Maxwellových rovnic, rov. (12)

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E} + \partial_t\vec{B} \;=\; \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E} + \partial_t\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{A} = \vec{0}\text{ , tedy} \tag{250}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,(\vec{E} + \partial_t\vec{A}) \;=\; \vec{0} \quad , \tag{251}$$

a lze proto zavést **skalární potenciál** $\varphi(\vec{r},t)$ takový, že

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\varphi - \partial_t\vec{A} \quad . \tag{252}$$

Analogicky jako u skalárního potenciálu známého z elektrostatiky je i zde tento potenciál určen jednoznačně až na aditivní funkci času $\varphi_0(t)$, nikoli však souřadnic.

Namísto 6 složek 2 vektorových polí tedy stačí hledat jen 4 funkce, a to 1 skalarní potenciál $\varphi(\vec{r},t)$ a 3 složky vektorového potenciálu $\vec{A}(\vec{r},t)$.

Skalární potenciál takto definovaný lze zavést v libovolném, i nestacionárním elmg. poli a bude (až na funkci $\varphi_0(t)$ závislou na čase, nikoli však na souřadnicích) určen jednoznačně. To nám umožňuje zavést jednoznačně i v tomto nejobecnějším případě napětí $U(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ mezi libovolnými 2 body $\vec{r}_1,\vec{r}_2$ v tomtéž čase t.

Méně náročné praktické či technické příručky často popisují potenciál v jiném než statickém poli nejasně, a pokud zavádějí obecně napětí, bývá to komplikovaně a chybně. Neuvažují vektorový potenciál, upozorňují jen na to, že napětí, které by bylo definováno křivkovým integrálem z $\vec{E}$, bude záviset na integrační dráze Γ.

7.4 Rovinná elektromagnetická vlna

7.5 Vlnová rovnice

Postup: Dosadíme do Maxwellových rovnic pro $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$ potenciály $\vec{A}, \varphi$. Dále z této soustavy spřažených diferenciálních rovnic 1. řádu dostaneme samostatné rovnice 2. řádu, vždy jen pro jednu proměnnou.

Předpokládejme pro jednoduchost $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{H} = \vec{B}/\mu$, $\sigma = 0$ tedy homogenní izotropní lineární a nevodivé [24] prostředí. Zapišme první sérii s dosazením za $\vec{D}, \vec{H}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{B} - \mu\varepsilon\partial_t\vec{E} &= \mu\vec{J} \qquad \text{(vynásobeno } \mu) && (253)\\ \operatorname{div}\vec{E} &= \rho/\varepsilon \qquad \text{(vyděleno } \varepsilon) && (254)\\ \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E} + \partial_t\vec{B} &= \vec{0} && (255)\\ \operatorname{div}\vec{B} &= 0 && (256) \end{aligned}$$

a postupujme „od konce“: z rov. (256) plyne ihned

$$\vec{B} = \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{A}, \qquad (257)$$

což dosadíme do rov. (255) a „vytkneme“ rotaci:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,(\vec{E} + \partial_t\vec{A}) &= \vec{0} \quad \text{, odkud} && (258)\\ \vec{E} &= -\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\varphi - \partial_t\vec{A} && (259) \end{aligned}$$

Oba vztahy dosadíme do rov. (254), (253):

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{A} + \partial_t\varepsilon\mu(\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\varphi + \partial_t\vec{A}) &= \mu\vec{J} && (260)\\ -\operatorname{div}\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\varphi - \operatorname{div}\partial_t\vec{A} &= \rho/\varepsilon && (261) \end{aligned}$$

V rov. (260) dosadíme ($\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{A} = \overrightarrow{\mathbf{grad}}\operatorname{div}\vec{A} - \triangle\vec{A}$) a roznásobíme:

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}\operatorname{div}\vec{A} - \triangle\vec{A} + \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\varepsilon\mu\partial_t\varphi + \varepsilon\mu\partial_t^2\vec{A} = \mu\vec{J} \qquad (262)$$

změníme znaménko a přerovnáme:

$$\triangle\vec{A} - \varepsilon\mu\partial_t^2\vec{A} - \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,(\operatorname{div}\vec{A} + \varepsilon\mu\partial_t\varphi) = -\mu\vec{J} \qquad (263)$$

V rov. (261) změníme znaménko, dosadíme div grad $= \triangle$ a přičteme a odečteme člen $\varepsilon\mu\partial_t^2\varphi$:

$$\triangle\varphi - \varepsilon\mu\partial_t^2\varphi + \partial_t(\operatorname{div}\vec{A} + \varepsilon\mu\partial_t\varphi) = -\rho/\varepsilon \qquad (264)$$

V rov. (263),(264) je v závorce týž člen. V dalším ukážeme, že existuje taková cejchovací transformace, po které je tento člen roven nule, takže po zavedení $v := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$; $\partial_{vt} := \frac{\partial}{\partial(vt)} = \frac{1}{v}\partial_t$ získají rovnice tvar

$$\begin{aligned} (\triangle - \varepsilon\mu\partial_t^2)\vec{A} = (\triangle - \partial_{vt}^2)\vec{A} &= -\mu\vec{J} && (265)\\ (\triangle - \partial_{vt}^2)\varphi &= -\rho/\varepsilon && (266)\\ (\triangle - \partial_{vt}^2)\vec{B} &= -\mu\,\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{J} && (267)\\ (\triangle - \partial_{vt}^2)\vec{E} &= \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\rho/\varepsilon + \mu\partial_t\vec{J} \quad . && (268) \end{aligned}$$

Tyto rovnice se nazývají ***vlnové rovnice***; jejich obecný tvar je zřejmě

$$(\triangle - \partial_{vt}^2)\ \text{(pole)} = -\ \text{(zdroj)} \qquad (269)$$

Ve vakuu je $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ a $v = c$; v tom případě zavádíme **d'Alembertův** operátor $\Box = (\triangle - \partial_{ct}^2)$.

[24] Vodivost $\sigma \neq 0$ dodá prostřednictvím Ohmova zákona $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ do (budoucí) vlnové rovnice člen s první derivací podle času; ten zachycuje pohlcování a tím útlum vln, analogicky tlumeným kmitům z mechaniky. Zde, v omezením rozsahu, bohužel není na tuto problematiku místo.

7.5.1 „Vhodná“ cejchovací transformace

Hledejme podle cejchovací transformace

$$\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\lambda \tag{270}$$

takové λ, aby po dosazení vymizel člen $(\operatorname{div}\vec{A} + \varepsilon\mu\partial_t\varphi)$ v závorce obou rov. (263), (264).

Chceme tedy zjistit, zda je pro libovolná $\vec{A}, \varphi$ řešitelná rovnice

$$\operatorname{div}(\vec{A} + \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\lambda) + \varepsilon\mu\partial_t\varphi = 0 \tag{271}$$

Tato rovnice však dává rovnici

$$\triangle\lambda = -(\operatorname{div}\vec{A} + \varepsilon\mu\partial_t\varphi) \tag{272}$$

a o Poissonově rovnici $\triangle\lambda = -\rho$ víme, že má řešení pro každou funkci ρ.

7.6 Řešení vlnové rovnice

7.6.1 Obecně

Vlnová rovnice (269), např. $\Box f = -\rho$, je lineární diferenciální rovnice 2. řádu s pravou stranou. Její obecné řešení f získáme ve třech krocích:

- nalezneme nezávislá řešení f_1, f_2 homogenní rovnice;
- uhádneme jedno řešení f_n nehomogenní rovnice;
- nejobecnější řešení f je dáno vztahem $f = f_\mathrm{n} + C_1 f_1 + C_2 f_2$ pro libovolné konstanty $C_1.C_2$.

7.6.2 Řešení homogenní rovnice

Homogenní vlnová rovnice

$$\Box\varphi = (\triangle - \partial_{ct}^2)\varphi = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 - \partial_{ct}^2)\varphi = 0 \tag{273}$$

představuje pole beze zdrojů, tedy záření. Nedá mnoho práce nalézt její řešení. V jednorozměrném případě se nám úloha zjednoduší na tvar

$$(\partial_x^2 - \partial_{ct}^2)\varphi = (\partial_x + \partial_{ct})(\partial_x - \partial_{ct})\varphi = 0 \tag{274}$$

resp. při zavedení $r = x - ct;\ s = x + ct$

$$\partial_r\partial_s\varphi = 0 \tag{275}$$

s jednoduchým řešením

$$\varphi(r,s) = f_r(r) + f_s(s) \tag{276}$$

pro libovolné funkce f_r, f_s příslušných proměnných, neboli

$$\varphi(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \tag{277}$$

pro libovolné funkce f_1, f_2. První představuje vlnu šířící se rychlostí o velikosti c ve směru osy x, druhá vlnu šířící se toutéž rychlostí opačným směrem.

Ve 3D případě je zřejmě řešením soubor vln šířících se v libovolném směru rychlostí $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

7.6.3 Fourierova transformace

Jestliže $\mathcal{E}(t) = \int E(\omega)e^{\mathrm{i}\,\omega t}\mathrm{d}\omega$ (Fourierova transformace), pak $E(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int \mathcal{E}(t)e^{-\mathrm{i}\,\omega t'}\mathrm{d}t'$ (inverzní Fourierova transformace).

Kmity typu $E(\omega)e^{\mathrm{i}\,\omega t}$ nazýváme *monofrekvenčními* (o frekvenci ω resp. $f = \omega/2\pi$).

Zřejmě platí $\partial_t\mathcal{E}(t) = \mathrm{i}\,\omega\int E(\omega)e^{\mathrm{i}\,\omega t}\mathrm{d}\omega$, takže Fourierova transfomace převádí derivaci podle t na násobení ω, a analogicky zvládneme i derivace podle prostorových souřadnic, jak záhy uvidíme.

7.6.4 Světlo obecně

Viditelné světlo je elektromagnetické vlnění s frekvencemi $\omega \approx (2,5 \text{ až } 4,5) \cdot 10^{15}$ Hz, tj. s vlnovými délkami $\lambda = c/f = 2\pi c/\omega \approx (0,4 \text{ až } 0,7) \cdot 10^{-6}$ m. Světlo s frekvencemi jen v úzkém oboru nazýváme *monochromatické* ($\tau\acute{o}\ \chi\rho\tilde{\omega}\mu\alpha$ barva).
Barva světla: červená cca do 0,63 μm; žlutá 0,59 μm; zelená 0,55 μm; modrá pod 0,5 μm.

7.6.5 Světlo ve vakuu

Rovinná monofrekvenční vlna s vlnovým vektorem $\vec{k}$ a (kruhovou) frekvencí ω má tvar

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t,\vec{k},\omega) &= E_0 \vec{e}_E \exp \mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \equiv E_0 \vec{e}_E \exp \mathrm{i}\,\omega\Big(t - \frac{\vec{s}\cdot\vec{r}}{c}\Big) \\ \vec{H}(\vec{r},t,\vec{k},\omega) &= H_0 \vec{e}_H \exp \mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \end{aligned}$$

Z nich složíme libovolné pole $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = \int\int \vec{E}(\vec{r},t,\vec{k},\omega)\, \mathrm{d}\vec{k}\, \mathrm{d}\omega$.
Maxwellovy rovnice po dosazení rovinné monofrekvenční vlny ve vakuu beze zdrojů, s uvážením $|\vec{k}|c = \omega$ a se zavedením jednotkového vektoru $\vec{k}/|\vec{k}| = \vec{k}_0$ dostávají tvar

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}c@{\qquad}rcl} \overrightarrow{\mathbf{rot}}\, \mathcal{B}/\mu_0 - \partial_t \varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}} &=& \vec{0} & \Rightarrow & \vec{k}_0 \times \vec{B}/c + \vec{E} &=& \vec{0} \\ \operatorname{div} \varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}} &=& 0 & \Rightarrow & \vec{k}_0 \cdot \vec{E} &=& 0 \\ \overrightarrow{\mathbf{rot}}\, \mathcal{E} + \partial_t \vec{\mathcal{B}} &=& \vec{0} & \Rightarrow & \vec{k}_0 \times \vec{E} - c\vec{B} &=& \vec{0} \\ \operatorname{div} \vec{\mathcal{B}} &=& 0 & \Rightarrow & \vec{k}_0 \cdot \vec{B} &=& 0 \end{array}$$

odkud plyne

$$\begin{gathered} \vec{E} = -\vec{k}_0 \times c\vec{B}; \qquad \vec{B} = \vec{k}_0 \times \vec{E}/c; \qquad \vec{e}_E \perp \vec{k}_0 \perp \vec{e}_H \perp \vec{e}_E \\ B = E/c \qquad \sqrt{\varepsilon}_0 E = \sqrt{\mu}_0 H = B/\sqrt{\mu}_0 \end{gathered}$$

Světlo se tedy šíří ve směru $\vec{k}_0$ jako příčná vlna.

Hustota energie: $u = \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}) = \varepsilon_0 E^2$; $<u> = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2} B_0^2/\mu_0$.
Hustota elektrické i magnetické energie jsou tedy stejné!
Tok energie: $|\vec{N}| = <u>\, c$.

Skutečné světlo lze popsat jako částečně koherentní směs monofrekvenčních vln různých frekvencí, fázových posuvů, amplitud, směrů a polarizací.

7.6.6 Světlo v látce

Pro $\omega \to \infty$ je $\varepsilon_{\mathrm{rel}} \to 1, \mu_{\mathrm{rel}} \to 1, n \to 1$. Pro světelné frekvence je již $\mu(\omega) = \mu_0$ prakticky pro všechny látky; zůstává však ještě $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$.
Rychlost šíření světla $v = v(\omega) = 1/\sqrt{\mu\varepsilon} \equiv c/n$, kde $n(\omega) \equiv c/v = \sqrt{\varepsilon\mu}/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \approx \sqrt{\varepsilon}_{\mathrm{rel}}$.

Disperze $n = n(\omega)$, tedy různá rychlost světla pro různé frekvence. Podle klasické teorie se látka chová jako N_k oscilátorů o frekvencích ω_k a platí $n^2(\omega) - 1 = \sum_k N_k/(\omega_k^2 - \omega^2)$. Kvantové jevy umožní i N_k necelé, i $N_k < 0$ (*anomální disperze*).

7.7 Homogenní rovnice: kulová vlna

O homogenní rovnici

$$\Box\varphi(\vec{r},t) = 0 \tag{278}$$

již víme, že má za řešení „vlny“, tedy signály tvaru

$$\varphi(\vec{r},t) = \varphi_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \alpha_0) \tag{279}$$

šířící se ve směru vlnového vektoru $\vec{k}$ rychlostí

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{\omega}{|\vec{k}|}. \tag{280}$$

Okrajové podmínky vyberou vhodné řešení jakožto kombinaci těchto vln s různými amplitudami f_0, fázovými konstantami α_0, vlnovými vektory $\vec{k}$ a s frekvencemi ω určenými podmínkou 280.

Nyní však hledáme řešení, preferující nikoli nějaký směr, ale bod — *kulovou vlnu*, která z tohoto bodu, ze svého zdroje, vychází na všechny strany (anebo se do něj sbíhá). Umístíme-li pro jednoduchost počátek souřadnic do tohoto zdroje, pak vlna, šířící se ze zdroje radiálně rychlostí c, má tvar

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{r}\,\mathcal{F}(\Phi) = \frac{1}{r}\,\mathcal{F}(t \mp \frac{r}{c} - t_0), \tag{281}$$

kde $\mathcal{F}$ je libovolná funkce, její argument $\Phi \equiv t \mp \frac{r}{c} - t_0$ je *fáze*, t je čas, $r = |\vec{r}|$ je vzdálenost od zdroje, c je rychlost světla a t_0 libovolná konstanta (*počáteční fáze*).

¿? Ověřte, že libovolná funkce $\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{r}\mathcal{F}(t \mp \frac{r}{c})$ vyhovuje pro $r > 0$ rovnici $\Box\varphi = 0$. Odp. je na str.57.

¡! Odp. ze str.57: WWW

¿? Ověřte, že znaménko „−“ určuje vlnu rozbíhavou, „+“ vlnu sbíhavou. Odp. je na str.57.

¡! Odp. ze str.57: WWW

7.8 Nehomogenní rovnice; Greenova funkce

Pro řešení nehomogenní rovnice

$$\Box F = -\rho \tag{282}$$

hledejme nejprve Greenovu funkci $\mathcal{G}(\vec{r},\vec{r}\,',t,t')$ řešící rovnici

$$\Box\mathcal{G} = -\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta(t-t'). \tag{283}$$

Potom je totiž

$$F(\vec{r},t) = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,' \int \mathrm{d}t'\mathcal{G}(\vec{r},\vec{r}\,',t,t')\rho(\vec{r}\,',t'). \tag{284}$$

¿? Toto řešení je vlastně velice „nefyzikální“. Pročpak? Jak vypadá fyzikálně jeho zdroj? Odp. je na str.51.

Řešení známe pro $c \to \infty$: pak $\Box \to \triangle$ a $\mathcal{G}(\vec{r},\vec{r}\,') = \mathcal{G}_\triangle(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi R}$, značíme-li $\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}\,'$.

¿? Dovedli byste to dokázat? Odp. je na str.57.

¡! Odp. ze str.57: WWW

Toto řešení $\mathcal{G}_\triangle$ je kulově symetrické; závisí jen na r a nikoli na θ, φ.

Pro $c < \infty$ zkusíme zkombinovat $\mathcal{G}_\triangle$ s kulovou vlnou; zvolíme

$$\mathcal{G}_\Box(\vec{R},T) = \frac{1}{4\pi R}\delta(T \pm \frac{R}{c})$$

kde značíme $\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}\,'; T \equiv t - t'$. Neboli: potenciál jako Coulombův potenciál, ale polohu zdroje bereme v jiném čase:

čas retardovaný (zpožděný) $t' = t - \dfrac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$

čas advansovaný (předbíhavý) $t' = t + \dfrac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$.

Obojí řešení vyhovuje D'Alembertově rovnici. Bereme-li však zdroje jako příčinu a pole jako důsledek, má fyzikální smysl jen retardovaný potenciál.

Rejstřík