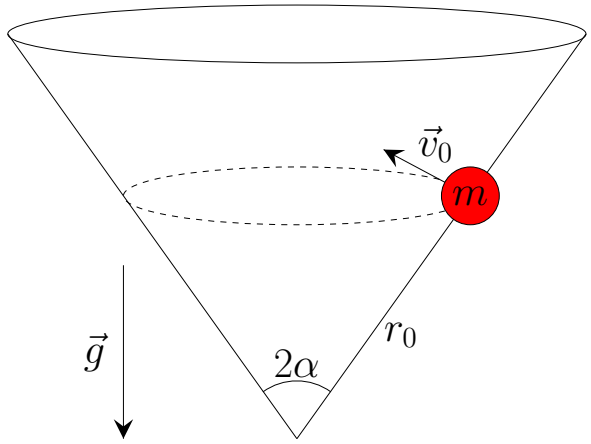
Úlohy pro samostudium – V

Zadáno: 13.5. **Odevzdat do: 27.5.2020**

Hmotný bod na kuželu

Uvažujte kužel o vrcholovém úhlu 2α balancující na špičce v homogenním gravitačním $\vec{g}$ rovnoběžném s osou kuželu. Po jeho povrchu se pohybuje hmotný bod o hmotnosti m tak, že v počátečním okamžiku je jeho rychlost $\vec{v}_0$ vodorovná, tedy kolmá na $\vec{g}$ a bod je ve vzdálenosti r_0 od vrcholu. Situace je znázorněná na následujícím obrázku.



1. Co se dá od bodu čekat? Je rozumné si předem udělat představu o tom, jaká řešení bychom měli dostat.
2. Kolik má systém stupňů volnosti?
3. Zvolte vhodné zobecněné souřadnice a určete Lagrangeovu funkci systému.
4. Nalezněte integrály pohybu a jejich hodnotu vyjádřete pomocí našich speciálních počátečních podmínek.
5. Může se bod dostat do vrcholu kužele?
6. Eliminujte z integrálu energie úhlovou rychlost pomocí druhého zákonu zachování (který to je?).
7. Pomocí této diferenciální rovnice prvního řádu nalezněte body obratu, tedy body, v nichž se radiální složka rychlosti (vzdálenost od vrcholu) nemění, $\dot{r}(t) = 0$. Využijte při tom naše konkrétní počáteční podmínky.
8. Existují mezi řešeními nějaké limitní případy, které snadno zkontrolujeme?
9. Připouští systém uzavřené dráhy? Bertrandův teorém říká, že existují pouze dva druhy centrálního potenciálu připouštějícího omezené dráhy, pro nějž platí, že každá omezená dráha je uzavřená – jde o $1/r$ a r^2. Jak si vůči tomuto teorému stojí náš systém?