

Domácí úkol č. 5

Zadáno: 19.12.2018

Odevzdat do: 10.1.2019

Grupa $GA(1, \mathbb{R})$

Grupa $GA(1, \mathbb{R})$ je grupa lineárních transformací typu

$$x' = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Jedná se tedy o dvouparametrickou Lieovu grupu, jejíž prvky jsou určeny dvojicí parametrů $g = g(a, b)$.

1. (5 bodů) Najděte levoinvariantní vektorová pole této grupy a ve vhodné bázi určete strukturní konstanty příslušné Lieovy algebry.
2. (5 bodů) Najděte jednoparametrickou podgrupu této grupy, odpovídající obecnému prvku Lieovy algebry.

Grupa $SL(2, \mathbb{R})$

Grupa $SL(2, \mathbb{R})$ je grupa reálných matic $A_{2 \times 2}$ s determinantem $\det A = 1$.

1. (9 bodů) Najděte jednoparametrické podgrupy této grupy a stopy matic těchto podgrup.
Návod: Napište obecný tvar matice $C \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ a spočtěte přímo $\exp(tC)$ v závislosti na znaménku $\det C$.
2. (3 body) Ukažte, že exponenciální zobrazení nepokrývá celou nekompaktní grupu $SL(2, \mathbb{R})$, přestože je tato grupa souvislá.