Obsah přednášek NTMF061

Teorie grup a její aplikace ve fyzice

ZS 2018/19

Týden 1: 4.10.

- **definice grupy, řád grupy**, příklady grup, Abelova grupa, cyklická grupa, **izomorfismus mezi grupami**
- multiplikativní tabulka pro konečné grupy, **věta o přeuspořádání:** „V každém řádku a každém sloupci multiplikativní tabulky je každý prvek grupy právě jednou."
- **podgrupa**, cyklická podgrupa, **věta:** „Průnik dvou podgrup je opět podgrupa."
- **levé/pravé rozkladové třídy podle podgrupy** (*cosets*), **Lagrangeova věta:** „Řád konečné grupy je dělitelný řádem libovolné podgrupy.", index podgrupy
- **třídy sdružených prvků** (*conjugacy classes*), **věta:** „Počet prvků libovolné třídy (g) dělí řád grupy G."

Dodatek: Klasifikace bodových grup, prvky a operace symetrie

Týden 2: 11.10.

- **normální podgrupa**, prosté a poloprosté grupy (*simple/semi-simple*), **věta:** „$H \subset G$ je normální podgrupa $\Leftrightarrow$ H sestává pouze z kompletních tříd sdružených prvků."
- **Faktorová grupa** (*quotient group*) jako grupa rozkladových tříd podle normální podgrupy s operací násobení tříd $g_1H \cdot g_2H := (g_1 \cdot g_2)H$
- **homomorfismus** jako zobrazení $\varphi : G \to G'$ zachovávající grupovou binární operaci, surjekce, injekce, **izomorfismus**, jádro a obraz homomorfismu
- **věta:** „$\mathrm{Im}\,\varphi$ je podgrupa G', $\mathrm{Ker}\,\varphi$ je normální podgrupa G a $\mathrm{Im}\,\varphi \sim G/\mathrm{Ker}\,\varphi$", přirozená projekce na faktorgrupu
- **přímý a polopřímý součin grup**, Eulerova grupa jako polopřímý součin
- **působení grupy na množině**, orbita prvku, stabilizátor (izotropní grupa), **věta:** „Při libovolném působení konečné grupy na množině je pro libovolný prvek množiny počet prvků orbity krát počet prvků stabilizátoru roven řádu grupy."
- působení grupy na sobě: levé a pravé posunutí, konjugace

- **reprezentace grupy jako působení na vektorovém prostoru** (homomorfismus do grupy všech automorfismů na vektorovém prostroru), **maticová reprezentace**, dimenze reprezentace, věrná reprezentace
- **ekvivalentní reprezentace**, splétající zobrazení

Cvičení: Určování bodové grupy symetrie molekul

Týden 3: 18.10.

- ekvivalentní maticové reprezentace jsou svázány podobnostní transformací
- invariantní podprostor vektorového prostoru, **reducibilní a ireducibilní reprezentace**, podreprezentace, reducibilita maticové reprezentace
- **úplně reducibilní reprezentace**, blokově-diagonální tvar úplně reducibilní maticové reprezentace, **věta:**„Každá ireducibilní reprezentace konečné grupy je konečně-dimenzionální.“
- **unitární reprezentace**, **věta:**„Každá konečně-rozměrná unitární reducibilní reprezentace je úplně reducibilní.“
- **věta:** „Každá konečně-dimenzionální reprezentace konečné nebo kompaktní Lieovy grupy je ekvivalentní nějaké unitární reprezentaci.“, **Maschkeův teorém:** „Každá konečně-rozměrná reprezentace konečné nebo kompaktní Lieovy grupy je úplně reducibilní.“
- **Schurova lemmata:** I. „Splétající operátor mezi dvěma ireducibilními reprezentacemi je buď izomorfismus (a tedy reprezentace jsou ekvivalentní) nebo nulový operátor.“, II. „Je-li (ρ, V) komplexní konečně-rozměrná ireducibilní reprezentace a operátor S komutuje se všemi operátory $T(g)$ z této reprezentace, potom je S násobkem jednotkového operátoru.“
- **věta:** „Komplexní konečně-rozměrné ireducibilní reprezentace abelovské grupy jsou jednorozměrné.“, **věta:** „Relace ortogonality pro maticové reprezentace.“

$$\sum_{g\in G}[D^\mu(g)^*]_i^j[D^\nu(g)]_l^k = \frac{\#G}{d_\mu}\delta_{\mu\nu}\delta_{jk}\delta_{il}$$

- **charakter reprezentace**

Týden 4: 25.10.

- **věta:** „Relace ortogonality pro charaktery.“

- **věta:** „Pro konečnou nebo kompaktní Lieovu grupu je rovnost charakterů dvou reprezentací postačující podmínkou jejich ekvivalence.“
- $$\rho = \oplus_\mu n_\mu \rho^\mu \Longrightarrow n_\mu = \frac{1}{\#G} \sum_g \chi^\mu(g)^* \chi(g)$$

  pro ρ^μ IR a ρ libovolnou reprezentaci konečné grupy G.
- regulární reprezentace konečné grupy, **věta:** $\#G = \sum_\mu d_\mu^2$, násobení tříd sdružených prvků, **věta:** (konstanty tříd)

  $$C_i C_j = \sum_k c_{ij}^k C_k,$$

  věta:„Pro konečné grupy je počet neekvivalentních ireducibilních reprezentací roven počtu tříd sdružených prvků.“
- **věta:** (Frobeniovo kritérium ireducibility) Reprezentace konečné grupy je reducibilní právě $\Leftrightarrow$ $\sum_g \chi(g)^* \chi(g) = \#G$

Cvičení:

1. Vektorová a pseudovektorová reprezentace $O(3)$
2. Tabulka charakterů D_{3h}

Týden 5: 1.11.

- **symetrie v kvantové mechanice** – transformace vlnové funkce [působení grupy na Hilbertově prostoru $L^2(\mathbb{R}^3)$], transformace operátorů, vlastní funkce hamiltoniánu jako báze reprezentací grupy symetrie, souvislost s degenerací energetických hladin
- **symetrizační operátory** (úplné a neúplné), nalezení báze ireducibilní reprezentace grupy (resp. příslušného invariantního podprostoru reprezentačního vektorového/Hilbertova prostoru)

Cvičení:

1. MO-LCAO pro H_3^+

Týden 6: 8.11.

- výběrová pravidla pro **maticové elementy invariantních skalárních operátorů**

- vztahy reprezentací grupy a podgrupy – **subdukované a indukované reprezentace** a jejich rozklad na ireducibilní reprezentace, **Frobeniův recipročni teorém**

Cvičení:

1. Indukované a subdukované reprezentace mezi C_{3v} a C_s (Frobeniův recipročni teorém)
2. Štěpení hladin atomu v kubické krystalové mříži (subdukované reprezentace)

Týden 7: 15.11. (pouze jedna přednáška)

- **přímý součin reprezentací** a jeho charaktery
- rozklad přímého součinu reprezentací – **Clebshova-Gordanova řada**
- báze přímého součinu reprezentací – **Clebshovy-Gordanovy koeficienty**, podmínky unitarity

Týden 8: 22.11.

- **ireducibilní tenzorové operátory**, **Wigenrův-Eckartův teorém**
- **molekulární vibrace a optické přechody** – **normální souřadnice** jako báze ireducibilních reprezentací grupy symetrie, aktivita vibračních modů v infračerveném spektru a při Ramanově rozptylu

Cvičení:

1. Dvouatomovoá molekula – translační vs. vibrační normální souřadnice
2. Optické přechody v CO_3^{2-}

Týden 9: 29.11.

- **Symetrická (permutační) grupa $\mathcal{S}_n$**
  - skládání permutací, rozklad na nezávislé cykly, násobení cyklů
  - třídy sdružených prvků jsou tvořeny permutacemi se stejnou strukturou cyklů
  - rozklad cyklu na (sousední) transpozice, množina sudých permutací jako normální podgrupa, generátory $\mathcal{S}_n$
  - ireducibilní reprezentace $\mathcal{S}_n$: Youngova schémata, Youngovy tabulky, hákové pravidlo pro dimenze IR

- báze IR $\mathcal{S}_n$ – řetěz subdukcí $\mathcal{S}_n \downarrow \mathcal{S}_{n-1} \downarrow \cdots \downarrow \mathcal{S}_1$
- charaktery IR $\mathcal{S}_n$
- ortogonální maticové reprezentace $\mathcal{S}_n$

Cvičení:

1. Tabulka charakterů $\mathcal{S}_4$

Týden 10: 6.12.

LIEOVY GRUPY

- "To arrive at abstraction, it is always necessary to begin with a concrete reality... You must always start with something. Afterward you can remove all traces of reality."(*Pablo Picasso*)

  $SO(3)$ jako grupa ortogonálních matic 3×3 s jednotkovým determinantem

  - **linearizace** – antisymetrické matice jako generátory infinitezimálních rotací
  - obecná rotace jako **exponenciála** generátorů
  - grupa $O(3)$ má stejné generátory, ale exponenciála pokrývá jen její souvislou podgrupu $SO(3)$
  - generátory rotací tvoří **Lieovu algebru $\mathfrak{so}(3)$** se **strukturními konstantami**
  $$[J_i, J_j] = ic_{ij}^k J_k, \qquad c_{ij}^k = \varepsilon_{ijk}$$
  - $(J_i)_{jk} = -ic_{ij}^k$ je **adjungovaná reprezentace** Lieovy algebry

- **Základní pojmy z diferenciální geometrie**
  - **topologický prostor**, otevřené a uzavřené množiny, okolí bodu, **spojité zobrazení**, homeomorfismus
  - separabilní (Hausdorffův) prostor, **souvislost**, **oblouková souvislost** a **jednoduchá souvislost**, báze topologického prostoru, **kompaktnost**
  - **topologická varieta**, **souřadnicová mapa**, atlas, **diferencovatelná varieta** (hladká, analytická)

- **Lieovy grupy jako hladké variety**
  - topologická grupa, **hladké zobrazení**, **reálná Lieova grupa**, lineární grupa
  - globální topologické vlastnosti Lieových grup – $E(2)$, $SO(2)$, $SO(3)$, $SU(2)$

Týden 11: 13.12.

LIEOVY ALGEBRY – levoinvariantní vektorová pole na Lieových grupách

- křivka na varietě, **tečné vektory** jako třída ekvivalence tečných křivek, tečný prostor T_pM, derivace ve směru, **izomorfismus tečného prostoru T_pM a prostoru derivací D_pM**, tečný bandl

- **vektorové pole**, **integrální křivka** k vektorovému poli, tok generovaný vektorovým polem

- **zobrazení push-forward** vektorových polí
- **Lieova závorka** jako komutátor vektorových polí
- **levoinvariantní vektorové pole**, **izomorfismus** T_eG **a prostoru** $\mathcal{L}(G)$ levoinvariantních polí na Lieově grupě G
- push-forward Lieovy závorky, komutátor vektorů z T_eG pomocí Lieovy závorky příslušných polí z $\mathcal{L}(G)$, **tečný prostor v jednotce jako Lieova algebra grupy**
- věta:(Ado) Každá abstraktní LA je izomorfní nějaké LA matic se standardním komutátorem.
- věta: Každá reálná LA je izomorfní reálné LA nějaké lineární LG.

Cvičení:

1. **maticové grupy** a jejich algebry (levoinvariantní pole, strukturní konstanty a komutátor na T_eG) – $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{su}(2) \sim \mathfrak{so}(3)$

Týden 12: 20.12.

Exponenciální zobrazení

- **jednoparametrická podgrupa** LG
- **věta:** Každá jednoparametrická podgrupa G je integrální křivkou jistého leovinvariantního pole na G a každá integrální křivka pole z $\mathcal{L}(G)$ je jednoparametrickou podgrupou. **věta:** Levoinvariantní pole na G jsou kompletní.
- **exponenciální zobrazení** z LA $\mathcal{G}$ do LG G. **věta:** Exponenciální zobrazení je lokální diffeomorfismus mezi tečným prostorem T_eG a LG G v okolí jednotky.
- exponenciální grupa, souvislá podgrupa, **věta:** Každý prvek souvislé podgrupy kompaktní LG lze vyjádřit jako $\exp(V)$ pro nějaký vektor $V \in T_eG$. **věta:** Každý bod ze souvislé podgrupy LG G lze zapsat jako konečný součin exponenciál prvků z T_eG.
- **věta:** Každá komponenta souvislosti G je pravou třídou podle souvislé podgrupy.
- **odvozený homomorfismus LA**

Vztah Lieových grup a algeber:

- **věta:** Pokud existuje surjektivní homomorfismus mezi dvěma LA, potom je to izomorfismus právě tehdy, pokud se jedná o LA stejné dimenze.

- **věta:** Je-li Φ hladký izomorfismus mezi dvěma LG, potom odvozený homomorfismus Φ_* je izomorfismus příslušných LA.
- diskrétní podgrupa, **věta:** Je-li jádro hladkého surjektivního homomorfismu Φ mezi dvěma LG diskrétní, potom odvozený homomorfismus Φ_* je izomorfismus příslušných LA.
- centrum grupy, **univerzální pokrývací grupa** a její faktorgrupy jako neizomorfní L. grupy s izomorfními L. algebrami

Cvičení:

1. Homomorfismus z $SL(2,\mathbb{C})$ na $L_+^\uparrow$ a z $SU(2)$ na $SO(3)$

Týden 13: 3.1.

Reprezentace Lieových algeber

- reprezentace LA na V jako homomorfismus $\mathcal{G} \to \mathrm{End(V)}$, **maticová reprezentace LA**, analytická reprezentace LG
- **věta:** Vztah analytické maticové reprezentace LG a maticové reprezentace LA, vztah reprezentací $SO(3)$ a $\mathfrak{so}(3) \sim \mathfrak{su}(2)$, víceznačné reprezentace a univerzální pokrývací grupa
- **adjungovaná reprezentace** LA a LG