

Teorie grup a její aplikace ve fyzice

Požadavky ke zkoušce

Obsah první části přednášky (základní pojmy, reprezentace konečných grup) bude zkoušen včetně většiny důkazů, u Lieových grup bude kladen důraz spíše na pochopení pojmů a vztahů mezi nimi. Zkouška bude pouze ústní, především v případě nerozhodného výsledku však může obsahovat i jednoduchou početní úlohu – například některý z výpočtů ponechaných za domácí cvičení.

Základní pojmy

- definice grupy, věta o přeuspořádání (dk), podgrupa, průnik dvou podgrup je opět podgrupa (dk)
- levé/pravé rozkladové třídy podle podgrupy, Lagrangeova věta (dk), třídy sdružených prvků a jejich vlastnosti
- normální podgrupa, normální podgrupa sestává z kompletních tříd sdružených prvků (dk), faktorová grupa
- přímý součin grup – def., věta kdy je grupa izomorfní přímému součinu (dk)
- zobrazení mezi grupami – homomorfismus, izomorfismus, jádro a obraz, „ $\text{Im } \varphi$ je podgrupa G' , $\text{Ker } \varphi$ je normální podgrupa G a $\text{Im } \varphi \sim G/\text{Ker } \varphi$ “ (dk)
- působení grupy na množině, orbita prvku, stabilizátor, počet prvků orbity krát počet prvků stabilizátoru je roven řádu grupy (dk), levé a pravé posunutí, konjugace

Reprezentace konečných grup

- reprezentace grupy jako působení na vektorovém prostoru, maticová reprezentace, ekvivalence reprezentací
- reducibilita a ireducibilita, podreprezentace, symetrizační operátory
- každá ireducibilní reprezentace konečné grupy je konečně-dimenzionální (dk)
- unitární reprezentace, každá konečně-rozměrná unitární reducibilní reprezentace je úplně reducibilní (dk), každá konečně-rozměrná reprezentace konečné nebo kompaktní Lieovy grupy je úplně reducibilní (dk)
- Schurova lemmata (dk)
- komplexní konečně-rozměrné ireducibilní reprezentace abelovské grupy jsou jednorozměrné (dk) charakter reprezentací, relace ortogonality pro charaktery (dk), pro konečnou grupu je rovnost charakterů dvou reprezentací postačující podmínkou jejich ekvivalence (dk)

- počet neekvivalentních ireducibilních reprezentací konečné grupy, dimenze ireducibilních reprezentací, Frobeniov kritérium ireducibility (dk)
- vztahy reprezentací grupy a podgrupy (subdukované a indukované reprezentace)
- přímý součin reprezentací a jeho charaktery, Clebshova-Gordanova řada a koeficienty, Wignerův-Eckartův teorém a výběrová pravidla (dk)

Symetrie v kvantové mechanice

- působení grupy na Hilbertově prostoru, transformace operátorů, klasifikace vlastních čísel a vlastních funkcí operátoru podle ireducibilních reprezentací grupy jeho symetrie
- degenerace energetických hladin, štěpení hladin v přítomnosti poruchy, aktivita optických přechodů

Lieovy grupy

- Lieova grupa jako hladká varieta, lineární Lieova grupa
- Lieova algebra Lieovy grupy (maticový i geometrický přístup), maticové grupy a jejich algebry
- jednoparametrická podgrupa, exponenciální zobrazení, odvozený homomorfismus LA
- exponenciální zobrazení je lokální diffeomorfismus mezi tečným prostorem $T_e G$ a LG G v okolí jednotky (princip dk), každý bod ze souvislé podgrupy LG G lze zapsat jako konečný součin exponenciál prvků z $T_e G$ (princip dk)
- pokrytí grup $SO(3)$ a $SU(2)$ exponenciálními zobrazeními
- vztah neizomorfních LG s izomorfními LA, univerzální pokrývací grupa, dvojnásobné pokrytí grupy $SO(3)$ grupou $SU(2)$

Reprezentace Lieových algeber

- analytická reprezentace LG, reprezentace LA, vztah analytické maticové reprezentace LG a maticové reprezentace LA, víceznačné reprezentace LG
- adjungovaná reprezentace LA a LG
- prostá a poloprostá LA a LG, Killingova-Cartanova metrika, Cartanovo kritérium pro poloprosté LG
- zkomplexnění LA, vztah reprezentací reálné LA a jejího zkomplexnění
- ireducibilní reprezentace poloprostých Lieových algeber – Casimirův operátor, Racahův teorém