

Př:  $SO(3)$  jako operátorová algebra na  $\mathcal{H}$

(24)  
(25/6)

- NB:  $SO(3)$  jako grupa 06 matic  $3 \times 3$  s  $\det = 1$  má  
 $\mathcal{L}$  algebra anti-symetrických matic  $3 \times 3$
- $SO(3)$  jako grupa operátorů na  $\mathcal{H}$  - rotace na  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$

$$f'(\vec{r}) = U(\vec{u}, \varphi) f(\vec{r}) = f(D(\vec{u}, \varphi) \vec{r})$$

•  $D(\vec{u}, \varphi)$  je matice nekt. reprezentace  $SO(3)$

$$\cdot D(\vec{u}, \varphi) = \exp(-i\varphi A) \dots A \in so(3) \quad A = -i u_i J_i$$

$$\cdot (J_i)_{jk} = -i \epsilon_{ijk} \quad (J_i, J_j) = i \epsilon_{ijk} J_k$$

• takže jsme zkonstruovali izomorfismus mezi grupou 06 matic  $3 \times 3$  ( $\det = 1$ ) a grupou unitárních operátorů na  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$

• odpovídající Lieova algebra:

$$T(A) f(\vec{r}) = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{1}{\varphi} (f(\exp(-\varphi A) \vec{r}) - f(\vec{r})) \equiv \frac{dU(u, \varphi)}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} f(\vec{r})$$

$$= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{1}{\varphi} (f(\vec{r} - \varphi A \vec{r}) - f(\vec{r})) = \left. \begin{array}{l} f(x_0 + \varphi d^i) = f(x_0) + \varphi \frac{\partial f}{\partial x_i} d^i \\ = \varphi d^T \cdot \nabla f \end{array} \right/$$

$$= -\vec{r}^T A^T \nabla f(\vec{r}) \Rightarrow \boxed{T(A) = -\vec{r}^T A^T \nabla} \quad \text{obecný operátor} \\ \in so(3), A \text{ antisym.}$$

• báze  $so(3)$  jako operátorové algebry:

$$\boxed{T(J_i) = -r_l (J_i^T)_{lk} \frac{\partial}{\partial x_k} = -r_l (J_i)_{lk} \frac{\partial}{\partial x_k} = i \epsilon_{ilk} r_l \frac{\partial}{\partial x_k} = -i \epsilon_{ilk} r_l \frac{\partial}{\partial x_k}}$$

• operátor momentu hybnosti:

$$\vec{L} = -i\hbar(\vec{r} \times \nabla) \Rightarrow L_i = -i\hbar \epsilon_{ijk} r_j \frac{\partial}{\partial x_k} \Rightarrow T(J_i) = \frac{1}{\hbar} L_i$$

• platí  $[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k$

$$\Rightarrow [T_i, T_j] = \frac{1}{\hbar^2} [L_i, L_j] = \frac{1}{\hbar^2} i\hbar \epsilon_{ijk} L_k = i \epsilon_{ijk} T_k$$

$\Rightarrow$  dostáváme stejnou algebra  $so(3)$ , reprezentovanou operátory momentu hybnosti na  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$