Intermezzo: adjoint representation of LA $\leftrightarrow$ adjungovaná (57) reprze

Theorem: Let G be real (or complex) LA, $\dim G = n$, & let $e_1, \dots, e_n$ be a basis of G. Define for $X \in G$ $n \times n$ matrix $\underline{ad(X)}$ by

$$[X, e_j] = \sum_{k=1}^{n} (ad(X))^k_j \, e_k \qquad j = 1, \dots, n$$

Then the matrices $ad(X)$ form n-dimensional adjoint representation of G.

NB: • repre of G = homomorphism $G \to$ matrix algebra preserving $[\cdot,\cdot]$

• $(ad(e_i))^k_j = c^k_{ij} \Rightarrow$ we have already seen ...

Proof: • $ad(X)$ is well defined: $X \in G \Rightarrow [X, e_j] \in G \Rightarrow [X, e_j] = \sum q^k e_k$

• $[\cdot,\cdot]$ linear $\Rightarrow ad(\alpha X + \beta Y) = \alpha\, ad(X) + \beta\, ad(Y)$

• $ad([X,Y]) = [ad(X), ad(Y)]$ follows from Jacobi (see 6)

$$[[X,Y], e_j] = (ad([X,Y]))^k_j \, e_k$$

$\parallel$ Jacobi

$$-[[Y,e_j],X] + [[X,e_j],Y] = -(ad(Y))^k_j [e_k, X] + (ad(X))^k_j [e_k, Y]$$

$$= (ad(Y))^k_j (ad(X))^l_k \, e_l - (ad(X))^k_j (ad(Y))^l_k \, e_l$$

$$= [ad(X), ad(Y)]^l_j \, e_l \qquad \boxtimes$$

• $ad(X)$ is an action of G on itself:

$$ad: G \times G \to G \qquad ad(X)Y = [X,Y]$$

$$Y = q^j e_j \Rightarrow [X,Y] = q^j [X, e_j] = q^j (ad(X))^k_j \, e_k$$

$$= \tilde{q}^k e_k \Rightarrow \tilde{q} = ad(X) q$$

• $ad(X)$ is lin. operator (matrix) $\Rightarrow$ under a basis transformation $S: e_i \mapsto e_i'$ it transforms as

$$S: ad(X) \mapsto S^{-1} ad(X) S$$

ADJOINT REPRESENTATION

NB: for a LA $\mathcal{G}$, $[X, e_j] = \sum_{k=1}^{n} (ad(X))_j^k e_k$ defines adjoint repre $X \mapsto ad(X)$ $\quad ad: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$

$ad(X)Y = [X, Y]$

A) Ad(G) pro lin. grupy

Lemma: Let G be linear LG & $\mathcal{G}$ its LA. Then

= součin matic!

1, $gXg^{-1} \in \mathcal{G}$ $\quad \forall g \in G$ & $\forall X \in \mathcal{G}$

2, for $g = \exp(tY)$, $Y \in \mathcal{G}$

$$F(t) = \exp(tY)X[\exp(tY)]^{-1} = X + t[Y, X] + \frac{t^2}{2!}[Y, [Y, X]] + \dots$$

Proof: 1, • lin. G has faithful mat. repre $\Rightarrow$ gXg^{-1} is well defined (product of matrices)

• $\mathcal{J}(s) = g \exp(sX) g^{-1} \subset G$ is a one-param. subgr. $(g \in G, X \in \mathcal{G}, s \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow \mathcal{J}(s) = \exp(s\, gXg^{-1}) \to gXg^{-1} \in \mathcal{G}$ is generator of $\mathcal{J}$

2, $F(t) = \exp(tY) X e^{-tY}$ is analytical function

$$F'(t)/_{t=0} = YX - XY = [Y, X]$$

$$F''(t)/_{t=0} = Y(YX - XY) - (YX - XY)Y = [Y, [Y, X]]$$

$\Rightarrow$ 2, is Taylor exp. of $F(t)$

<u>Theorem:</u> Let G be <u>lin.</u> LG of dim. n and $e_1, \dots, e_n$ basis of its LA $\mathcal{G}$. Define

$$Ad(g): \quad g e_i g^{-1} = \sum_{k=1}^{n} (Ad(g))^k_i \, e_k \qquad i = 1, \dots, n$$

Then

1, matrices $Ad(g)$ form n-dim analytical repre of G, called <u>adjoint repre</u>

2, corresponding repre of $\mathcal{G}$, defined through

$$ad(X) = \frac{d}{dt} Ad(\exp tX)/_{t=0} \qquad \forall X \in \mathcal{G}$$

is adjoint repre of $\mathcal{G}$, satisfying

$$\exp(t\, ad(X)) = Ad(\exp(tX))$$

<u>Proof:</u> • $g e_i g^{-1} \in \mathcal{G} \Rightarrow$ /lemma/ $\Rightarrow g e_i g^{-1} = C^k_i e_k$

$\Rightarrow Ad(X)$ is well defined

1, $(gg') e_i (gg')^{-1} = g (g' e_i g'^{-1}) g^{-1} = \sum_l Ad(g')^l_i \, g e_l g^{-1}$

$$= \sum_{kl} Ad(g')^l_i \, Ad(g)^k_l \, e_k = \sum_k \left[Ad(g) Ad(g') \right]^k_i e_k \quad \boxtimes$$

$D(g)^i_j$ je anal. fce loc. souř.:

• analyticity follows from the lemma

$Ad(g) \leftarrow e^{\sum t_i e_i} e_j e^{-\sum t_k e_k}$

($g = \exp(tY)$ exists for $\forall g \in \mathcal{U}(e)$) $\not\exists$ L_n na celou G

2, $Ad(\exp(tY)) X \equiv \exp(tY) X \exp(-tY) =$ /lemma/ $=$

$$= X + t[Y, X] + o(t)$$

$$= [\mathbb{1} + t\, ad(Y)] X + o(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (Ad(\exp(tY)))/_{t=0} = ad(Y) \qquad \boxtimes$$

• Ad(g) for general LG:

- def. automorphism

$$I_g : G \to G \qquad h \mapsto g h g^{-1} \qquad \text{(conjugation)}$$

- def. $Ad(g) \equiv (I_g)_*$: $\quad g \exp(X) g^{-1} \equiv \exp(Ad(g) X)$

$$\Updownarrow$$

$$I_g \circ \exp = \exp \circ (I_g)_*$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "I_g"] & G \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "(I_g)_*"', "\equiv Ad(g)"] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

I, II

zde I_g už je lineár. automorf!

$$Ad : G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$
$$ad : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "Ad"] & Aut(\mathfrak{g}) \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "ad"', "\equiv Ad_*"] & End(\mathfrak{g}) \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow Ad(g) : G \to Aut(\mathfrak{g})$ is repre acting on $\mathfrak{g}$

$\Rightarrow$ matrix group:

I: $g \exp(X) g^{-1} \overset{\mathrm{II}}{=} \exp(g X g^{-1}) = \exp(Ad(g) X)$

corresp. to the above definition

bude později!

• significance of $Ad(g)$, $ad(X)$: semi-simple LA/LG

- we have already seen KC form/metric

Theorem: Adjoint repre of a semisimple LA $\mathfrak{g}$ is faithful.

Proof: • need to show that $ad : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g})$ is injective:

• $\exists X \neq Y \in \mathfrak{g} : ad(X) = ad(Y)$

$\Rightarrow 0 = ad(X) - ad(Y) = ad(X - Y), \quad X - Y \neq 0$

• $ad(X-Y) ad(Z) = 0 \quad \forall Z \in \mathfrak{g} \Rightarrow B(X-Y, Z) = 0$

$\Rightarrow B$ degenerate $\Rightarrow \mathfrak{g}$ not semisimple $\lightning$ (Cartan z.)

Theorem: Adjoint repre of a simple LA $\mathcal{G}$ is irreducible.

Proof: • let ad be reducible $\Rightarrow \exists\, \mathcal{G}' \subsetneq \mathcal{G}$:

$$ad(X)Y' \in \mathcal{G}' \quad \forall X \in \mathcal{G} \quad \forall Y' \in \mathcal{G}'$$

$\Rightarrow [X, Y'] \in \mathcal{G}' \Rightarrow \mathcal{G}'$ is invariant subalgebra

$\Rightarrow \mathcal{G}$ not simple ↯ $\boxtimes$

NTS: simple is also semi-simple

• is the non-triv. subspace $\mathcal{G}' \subsetneq \mathcal{G}$ subalgebra?

$\Rightarrow$ ad(X) is very powerfull tool, used in proofs of theorems about simple/semi-simple LA

$\Rightarrow$ furthermore, it can be shown that every semi-simple LA is direct sum of simple LAs

1, $V = V_1 + V_2 \qquad \forall V \in \mathcal{G}$, $V_1 \in \mathcal{G}_1, V_2 \in \mathcal{G}_2$ unique

2, $[V_1, V_2] = 0 \quad \forall V_1 \in \mathcal{G}_1 \;\&\; \forall V_2 \in \mathcal{G}_2$

$$\Rightarrow \mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2$$

IREDUCIBILNÍ REPREZENTACE LIEOVÝCH ALGEBER

Pracuji v nějaké repre $\mathcal{G} \Rightarrow$ umím $X_i X_j \Rightarrow f(X_i)$

Def: <u>Casimirův operátor</u> (element) je operátor, který je funkcí generátorů LA a který komutuje se všemi prvky této algebry:

$$C = C(\{X_i\}) \quad \& \quad [C, X_i] = 0 \quad \forall X_i = \rho_{\mathcal{G}}(e_i)$$

obecná def.: cf. univ. enveloping algebra

$\Rightarrow$ jedná se o invariantní operátory na reprezentačním prostoru LA, které jsou funkcemi (obvykle polynomy) operátorů X_i reprezentujících bázi/generátory LA

- pro IR, $C = \lambda \mathbb{1}$ (Schur)
- IR LA lze indexovat hodnotami $(\forall \lambda)$ $\forall$ Casimirových operátorů dané LA v dané IR

Př: <u>kvadratický Casimirův operátor</u> poloprosté LA

- poloprostá LA $\mathcal{G}$ má nedegenerovanou C-K metriku $g_{ij} = B(e_i, e_j) \Rightarrow \exists$ inverzní matice $g^{ij} = (g^{-1})_{ij}$
- nechť ρ je repre $\mathcal{G}$ a $X_i = \rho(e_i)$ jsou operátory reprezentující generátory $\mathcal{G}$

$\Rightarrow \boxed{C = g^{ij} X_i X_j}$ je Casimirův operátor

(Cv) Dk: $[C, X_k] = g^{ij}[X_i X_j, X_k]$

$$= g^{ij}(X_i X_j X_k - X_k X_i X_j - X_i X_k X_j + X_i X_k X_j)$$

$$= g^{ij} X_i [X_j, X_k] + g^{ij}[X_i, X_k] X_j$$

$$= g^{ij} c_{jk}^{\ell} X_i X_\ell + g^{ij} c_{ik}^{\ell} X_\ell X_j = \quad /\mathrm{II}: i \leftrightarrow j,\ g_{ij}\ \text{sym}/$$

$$= g^{ij} c_{jk}^{\ell}(X_i X_\ell + X_\ell X_i) = 0 = c_{pjk}\, g^{ij} g^{\ell p}(X_i X_\ell + X_\ell X_i)$$

NB: • bez ohledu na repre lze Casimir. op. (kv.) definovat pomocí duální báze vzhledem ke g: $C = X^i X_i$

nebot' $/c_{jk}^{\ell} = g^{\ell p} c_{pjk}/$

$g_{ij} = c_{i\alpha}^{\beta} c_{j\beta}^{\alpha}$

$g^{ij} g^{\ell p}(X_i X_\ell + X_\ell X_i)$ je sym $j \leftrightarrow p$ a $c_{pjk} = -c_{jpk}$ (Dk pending)

• $c_{ijk} = -c_{jik}$:

$$c_{ijk} = g_{il}\, c^{l}_{jk} = c^{\beta}_{i\alpha}\, c^{\alpha}_{l\beta}\, c^{l}_{jk} = -c^{\beta}_{i\alpha}\, c^{\alpha}_{\beta l}\, c^{l}_{jk} = -c^{\beta}_{i\alpha}\, c^{l}_{jk}\, c^{\alpha}_{\beta l}$$

$$= /\text{Jacobi pro } c^{l} c^{\alpha}/ = c^{\beta}_{i\alpha}\, c^{l}_{k\beta}\, c^{\alpha}_{jl} + c^{\beta}_{i\alpha}\, c^{l}_{\beta j}\, c^{\alpha}_{kl}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_{ijk} = c^{\beta}_{i\alpha}\, c^{l}_{\beta k}\, c^{\alpha}_{lj} - c^{\beta}_{i\alpha}\, c^{l}_{\beta j}\, c^{\alpha}_{lk}} \qquad (*)$$

$$\overset{i\leftrightarrow j}{\Rightarrow} c_{jik} = c^{\beta}_{j\alpha}\, c^{l}_{\beta k}\, c^{\alpha}_{li} - c^{\beta}_{j\alpha}\, c^{l}_{\beta i}\, c^{\alpha}_{lk}$$

$$= -c^{\alpha}_{il}\, c^{l}_{\beta k}\, c^{\beta}_{j\alpha} + c^{l}_{i\beta}\, c^{\beta}_{j\alpha}\, c^{\alpha}_{lk}$$

$$= c^{\alpha}_{il}\, c^{\beta}_{\alpha j}\, c^{l}_{\beta k} - c^{l}_{i\beta}\, c^{\alpha}_{lk}\, c^{\beta}_{\alpha j} = -(*) \qquad \boxtimes$$

Def: Rank Lieovy grupy je největší počet vzájemně komutujících (generátorů) ~~operátorů~~ příslušné LA ≡ dimenze maximální abelovské podalgebry

Př:
- translace ve 3D – rank 3 ($p_i = -i\frac{\partial}{\partial x_i}$ komutují $\forall i$)
- SO(3) – rank 1 ($[J_3, J_3] = 0$, ale $[J_3, J_i] \neq 0$ $i = 1, 2$)
- SU(N) – rank N−1 (algebra bezestopých antiherm. matic $\Rightarrow$ největší abelovskou podalgebru tvoří matice

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -i \end{pmatrix}$$

kde i je na lib. pozici na diag. a $-i$ na poslední pozici)

- SO(3) ⊗ SO(3) – rank 2 ($J_3^{(1)}, J_3^{(2)}$ ... odpovídá nezávislým částicím)

Věta: (Racahův teorém)

Pro každou poloprostou LA G ranku l existuje l Casimirových operátorů, které komutují nejen se všemi prvky G, ale i mezi sebou:

$$[C_k, X] = 0, \quad [C_k, C_j] = 0 \qquad \forall X \in G,\ \forall_{j,k} = 1, \dots, \text{rank } G$$

Vlastní hodnoty těchto operátorů jednoznačně charakterizují ireducibilní reprezentace příslušné Lieovy grupy.

- pro IR, $C_k = \lambda_k \mathbb{1}$ $\Rightarrow$ v dané IR (ρ, V), $C_k \psi = \lambda_k \psi \quad \forall \psi \in V$

$\Rightarrow \lambda_k$ lze použít jako „pojmenování" reprezentace

- bázi příslušného invariantního podprostoru lze volit jako vl. vektory komutujících operátorů C_k $(k=1,\dots,\ell)$ a X_i $(i=1,\dots,\ell)$ (předeslím tedy X_i, které dohromady jednoznačně určí $\dim \rho_{IR}$ různých vl. vektorů)

Př: $su(2)$ - rank 1 $\Rightarrow$ $C = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = J^2$ je jediný Casimirův operátor

$\Rightarrow J_3$ tvoří max. abelovskou subalgebru

- pomocí posunovacích operátorů zjistíme, že dimenze IR mohou být $d_\mu = 2j+1$, kde j je lib. polocelé číslo: (viz kurz QM; jedná se o komplexifikovanou LA!)

- $J_\pm = J_1 \pm i J_2$ $\Rightarrow$ $[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm$

$[J_+, J_-] = 2J_3$

- vl. vektory J^2, J_3 značíme $|b, m\rangle$

$J_3 (J_\pm |b,m\rangle) = J_\pm J_3 |b,m\rangle \pm J_\pm |bm\rangle = (m \pm 1) J_\pm |bm\rangle$

$\Rightarrow J_\pm |b,m\rangle$ je vl. vektor J_3 s vl. číslem $(m \pm 1)$

- jedná se o konečně-dim. repre & vl. vektory jsou LN

$\Rightarrow$ musí $\exists$ m^+: $J_+ |b, m^+\rangle = 0$ a m^-: $J_- |b, m^-\rangle = \theta$

- $J_- J_+ = J^2 - J_3^2 - J_3$

$\Rightarrow J_- J_+ |b, m^+\rangle = 0 = b - (m^+)^2 - m^+ \Rightarrow b = (m^+ + 1) m^+$

$\Rightarrow$ značím $m^+ \equiv j$ $\Rightarrow$ $J^2 = j(j+1) \mathbb{1}_{\dim \rho}$

$\Rightarrow |b = j(j+1), m\rangle \equiv |j, m\rangle$

$\Rightarrow$ opakovaně aplikuji J_- na $|j,j\rangle \Rightarrow m^- = -j \Rightarrow 2j \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \dim \rho = 2j+1$