

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury. Souhlasím se zapůjčováním své práce.

V Praze 18. dubna 1991

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA UNIVERZITY KARLOVY

FYZIKÁLNÍ POLE
ROVNOMĚRNĚ URYCHLENÝCH ZDROJŮ

Pavel Krtouš

Diplomová práce

Obor: fyzika mezních oborů

Zaměření: matematická fyzika

Vedoucí práce: prof. RNDr. Jiří Bičák, DrSc.

KMF MFF UK

Praha 1991

Děkuji

prof. RNDr. Jiřímu Bičákoví, DrSc.
za vybrání tohoto tématu, za trvalý zájem o mojí práci, za
mnohé přínosné rady a připomínky a všechnen čas, který mi
věnoval.

Obsah

1. ÚVOD

1.1 Význam polí rovnoměrně urychlených zdrojů

Jedním z ohnisek zájmu v obecné teorii relativity je zkoumání zářivých prostoročasů - přesných řešení Einsteinových rovnic, která reprezentují nestacionární pole zářivého charakteru. Během posledních let se objevily některé hluboké výsledky týkající se existence asymptoticky plochých zářivých prostoročasů (viz. [13], [20], [22]), dosud však není dokázána existence asymptoticky plochých vakuových prostoročasů vyhovujících všem požadavkům známé Penroseovy definice asymptotické plochosti. Není ovšem nalezeno ani žádné explicitní nevakuové zářivé asymptoticky ploché řešení Einsteinových rovnic. Nicméně je známá rozsáhlá třída zářivých řešení, která jsou asymptoticky plochá "skoro všude" - tzv. boost-rotačně symetrická řešení (viz. kapitola 4, jinak rozsáhlý rozbor v [5]) odpovídající rovnoměrně urychleným zdrojům. Gravitační pole reprezentovaná těmito řešenými lze interpretovat jako kombinaci retardovaných a advancovaných příspěvků od urychlených zdrojů. Vystává otázka, zda nelze nalézt zářivé řešení přesných Einsteinových rovnic, které by šlo interpretovat jako čistě retardované pole. Rovnoměrně urychlený zdroj je nejjednodušší zářivý systém a tak se přirozeně nabízí hledat retardované zářivé gravitační pole právě tohoto zdroje a to pomocí boost-rotačně symetrických řešení.

Na tuto myšlenku nás přivádí i širší analogie mezi různými fyzikálními zářivými poli. Obecně všechna zářivá pole nulové hmoty mají některé společné rysy - např. rychlosť šíření čela vln je rovna rychlosti světla, algebraická struktura čistě zářivých polí je (v Penroseově-Petrovově klasifikaci) stejného typu, asymptotické vlastnosti zářivých polí ostrovních zdrojů jsou podobné atd.. A právě známé výsledky (viz. [11])

pro elektromagnetické pole rovnoměrně urychleného zdroje ukažuje souvislost mezi boost-rotačně symetrickým "retardovaným-advancovaným" polem a čistě retardovaným polem urychleného zdroje a dávají naději v nalezení podobné souvislosti pro gravitační pole.

Boost-rotačně symetrická "retardovaná-advancovaná" pole urychlených zdrojů jsou však zajímavá sama o sobě. Úzce souvisejí s konformní strukturou prostoročasu. V plochém prostoročase jsou tato pole spojena konformní transformací se statickými poli, čehož lze využít (jak uvidíme v kapitola 5) k jejich generování z jednodušších známých statických řešení.

Boost-rotačně symetrická pole nacházejí své využití i v numerické relativitě (jako testy numerických kódů), v approximačních metodách (jako testy jejich konvergence) a také v kvantové teorii pole - a to v interpretaci různých schémat kvantování v křivém prostoročase (Rindlerovské kvantování pomocí boostového Killingova vektoru - [7], [26]), či v kvantování ve vnějším homogenním poli (viz. [24]).

Naše práce se věnuje všem významnějším případům polí rovnoměrně urychlených zdrojů. Je zaměřena na zkoumání a srovnávání vlastností boost-rotačně symetrických polí - skalárního, elektromagnetického, gravitačního (linearizovaného i nelinearizovaného) a kalibračního (Yang-Millsova). Dále vyšetřuje čistě retardované pole rovnoměrně urychlených zdrojů - skalárního, elektromagnetického a gravitačního (linearizovaného i nelinearizovaného) a věnuje se jejich vzájemnému vztahu.

V následujícím nejprve krátce shrneme obsah práce a budeme specifikovat, které z uváděných výsledků mají původní a které rešeršní charakter.

1.2 Přehled práce

Nyní se dotkneme podrobněji obsahu této práce. V druhé kapitole je uveden formalismus používaný v dalším textu, jsou zavedeny některé konvece a notace. Za zmínu stojí paragraf 2.3, kde je poměrně podrobně provedena geometrická interpretace kalibračního pole jako konexe na bundle prostoru vnitřních stupňů volnosti. Z tohoto pojetí již přirozeně vyplývají transformační vlastnosti kalibračního pole včetně akci lokální kalibrační grupy i přirozený způsob interakce s kalibračně nabitémi poli. Takovýto geometrický přístup vychází z výkladů uvedených možné nalézt např. v knize Penrose a Rindlera [19] či v [25].

Třetí kapitola obsahuje výpočet retardovaného skalárního, elektromagnetického a linearizovaného gravitačního pole jedné rovnoměrně urychlené částice v plochém prostoročase. Ukazuje se, že se vzrůstajícím spinem se zhoršuje chování pole podél hranice Σ_* oblasti příčinně spojené s částicí – světelné nadplochy oddělující prázdný prostoročas neovlivněný zdrojem od oblasti s retardovaným polem částice. Retardované skalární pole je na hranici Σ_* konečné, ale nespojité. V případě elektromagnetického a linearizovaného gravitačního pole jsou na nadploše Σ_* lokalizované delta-funkce, a to jak v kalibračně závislé vektorovém potenciálu a linearizované metrice, tak i v kalibračně nezávislé elektromagnetické intenzitě a linearizovaném Riemannově tensoru křivosti. Pro vektorový potenciál a linearizovanou metriku získané pomocí retardované Greenovy funkce navíc dostaneme divergenci na Σ_* , kterou bude nutno regularizovat. Členy lokalizované na Σ_* i potřebnou regularizaci dostaneme z regulárního pole částice, která se

pohybuje rovnoměrně urychléně až od nějakého okamžiku $\tilde{\gamma}$, limitní procedurou, při které okamžik $\tilde{\gamma}$ oddálíme do minulosti.

V případě linearizovaného gravitačního pole se navíc ukázala nutnost započítat do tensoru energie-hybnosti zdroje i příčinu urychlování částice. Zvolili jsme nejjednodušší způsob urychlování pomocí polonekonečné kosmické struny připevněné na částici. V krátkosti jsme uvedli odvození linearizované metriky nekonečné přímé struny, přehledné články týkající se kosmických strun jsou např. [27], [28].

Vedle monopólové částice by bylo možno zkoumat i urychléné zdroje složitější multipólové struktury (dipól, ...). Vzhledem k tomu, že všechna tři pole jsou lineární, je možné dostat pole složitějších zdrojů kombinací pole monopólové částice. Proto omezení na monopólový zdroj není na újmu obecnosti.

Hlavním výsledkem třetí kapitoly je ucelený, systematický pohled na retardovaná pole urychléné částice. Výsledky pro vektorový potenciál elektromagnetického pole a linearizované gravitační pole jsou původní, původní je diskuse čistě retardovaných řešení i v případě skalárního pole. Navíc přítomnost delta-funkcí na \sum_* v linearizovaném Riemannově tensoru křivosti nám nabízí fyzikální interpretaci komplikací vzniklých v nelineární teorii gravitace.

Třetí kapitola obsahuje též rozsáhlé dodatky technického charakteru. Zmíníme se pouze o dodatku 3.A, v němž je přehled některých vlastností delta-funkcí v obecném prostoročase a je provedena diskuse způsobu regularizace některých nekonečných výrazů.

pole rovnoměrně urychleného zdroje v rámci plné teorie gravitace. Je zde uvedeno a krátce diskutováno obecné boost-rotačně symetrické řešení Einsteinových rovnic reprezentující pole urychlených zdrojů a jeho speciální případ dvou urychlených objektů urychlovaných strunou. V paragrafu 4.3 je ukázáno, že nelze toto obecné řešení netriviálně spojitě navázat podél světelné nadplochy (obdoba Σ_*) s plochým prostoročasem, tj. nelze zkonstruovat spojitou čistě retardovanou boost-rotačně symetrickou metriku. Tento výsledek je původní. Jak jsme již nastínili v případě linearizovaného pole, fyzikální příčina zřejmě tkví v kumulaci gravitačního pole podél světelné nadplochy do takové míry, že ztrácí smysl požadavek spojitosti metriky, ba dokonce i souvislosti prostoročasu.

Poslední, pátá kapitola je věnována konformním vlastnostem plochého prostoročasu a souvislosti konformní transformace a světočar a polí rovnoměrně urychlených zdrojů. V paragrafu 5.1 je podán přehled chování různých veličin a rovnic při konformní transformaci metriky. V paragrafu 5.2 je provedena diskuse bodových konformních transformací plochého prostoročasu; ukáže se, že jisté konformní transformace převádějí světočaru stojící částice na světočáru dvou navzájem opačně urychlených symetricky umístěných částic. Tohoto se v paragrafu 4.3 využije pro nalezení skalárního, elektromagnetického a kalibračního (Yang-Millsova) pole dvou urychlených částic. Pro skalárni a elektromagnetické pole dostaneme známé výsledky z třetí kapitoly, pro kalibrační pole se jedná o nové řešení Yang-Millsových rovnic.

V páté kapitole je také obsažen dodatek věnovaný sférické inverzi - speciální konformní transformaci. Je v něm provedena obsáhlá původní diskuse tohoto zobrazení v obecném afinním prostoru a jsou odvozeny transformační vlastnosti tzv. zábezných kružnic při konformních transformacích.

2. OBECNÝ FORMALISMUS

V této kapitole uděláme stručný přehled používaného formalismu. Specifikujeme používané konvence a zavedeme některé notace. Uvedeme pohybové rovnice polí, která budeme zkoumat. Podrobněji se zastavíme u teorie kalibračního pole a jeho geometrické interpretace.

2.1 Geometrie prostoročasu

V tomto odstavci v krátkosti shrneme popis prostoročasu v rámci OTR. Prostoročas je reprezentován 4-dimensionální dostatečně hladkou diferenciální varietou M . Na této varietě máme tenzorový bundle prostor $T^p_q M$ ¹⁾. Jako abstraktní indexy²⁾ pro jeho prvky budeme používat malých latinských písmen. Konvence pro symetrizaci, antisymetrizaci a vnější algebru jsou

$$A_{(a_1 \dots a_m)} = \frac{1}{m!} \sum_G A_{a_{G_1} \dots a_{G_m}}, \quad (2.1.1)$$

$$A_{[a_1 \dots a_m]} = \frac{1}{m!} \sum_G \text{sign } G \ A_{a_{G_1} \dots a_{G_m}},$$

$$\varphi_{a_1 \dots a_p} \vee \psi_{b_1 \dots b_q} = \frac{(p+q)!}{p! q!} \varphi_{a_1 \dots a_p} \psi_{b_1 \dots b_q}, \quad (2.1.2)$$

$$\omega_{a_1 \dots a_p} \wedge \xi_{b_1 \dots b_q} = \frac{(p+q)!}{p! q!} \omega_{[a_1 \dots a_p]} \xi_{b_1 \dots b_q},$$

$$d_a \omega_{b_1 \dots b_p} = \nabla_a \wedge \omega_{b_1 \dots b_p} = (p+1) \nabla_{[a} \omega_{b_1 \dots b_p]}, \quad (2.1.3)$$

kde ω, ξ jsou antisymetrické formy a φ, ψ symetrické tenzory.

¹⁾ Zde

$$T^p_q M = \underbrace{T^1 M \otimes \dots \otimes T^p M}_{p \times} \underbrace{T^* M \otimes \dots \otimes T^* M}_{q \times}$$

²⁾ Prvky vektorových a tenzorových prostorů je výhodné označit pomocí tzv. abstraktních indexů. Jedná se pouze o formální vyznačení vektorového či tenzorového charakteru objektu, tyto indexy nenabývají žádných konkrétních hodnot (více viz. [1], [19]). Abstraktní indexy budou značeny podtržením (např. α^a , A^{ab} , ω_{abc} atd.). Naproti tomu při volbě konkrétní báze můžeme používat souřadnicové indexy nabývající hodnot označujících prvky báze. Tyto indexy

Gravitační pole je popsáno Lorentzovou spojitou metrikou g_{ab} signatury $(-+++)$. Příslušná konexe, Riemannův tenzor, Ricciho tenzor a skalární křivost jsou dány vztahy

$$\nabla_a g_{bc} = 0 \quad , \quad (2.1.4)$$

$$R_{abc}^{\quad d} \alpha_d = \nabla_a \nabla_b \alpha_c - \nabla_b \nabla_a \alpha_c \quad , \quad (2.1.5)$$

$$Ric_{ab} = Ric_{ab}^{\quad c} \quad , \quad (2.1.6)$$

$$R = Ric_{ab} \bar{g}^{ab} \quad , \quad (2.1.7)$$

kde \bar{g}^{ab} splňuje

$$\bar{g}^{ab} g_{bc} = \delta_c^a \quad . \quad (2.1.8)$$

Zvolíme-li souřadnice X^a ($a = 0, 1, 2, 3$) a příslušnou konexi ∂_a vztahem

$$\partial_a \partial_b X^c = 0 \quad , \quad a = 0, 1, 2, 3 \quad , \quad (2.1.9)$$

můžeme zavést Christoffelovy symboly

budou vždy nepodtržené. Opakování abstraktních indexů v jednom výrazu znamená zúžení, opakující se souřadnicový index znamená sčítání přes všechny hodnoty indexu. V případě, že pro nás bude nepodstatný konkrétní tenzorový charakter veličiny, budeme abstraktní indexy vyneschávat. V tomto případě $A B$ znamená tenzorový součin, $A \cdot B$ zúžení. Pokud budou použity symboly typu \tilde{A} , jedná se čistě o rozšíření používané abecedy. Tenzory s různým položením indexů jsou v obecnosti různé, tj. B^a je jiný objekt než B_a . V případě, že je daná nedegenerovaná metrika g_{ab} pomocí níž lze zvdat a snižovat indexy, budeme, pokud nebude hrozit nedorozumění, označovat tenzory lišící se zvednutím a snížením indexu stejným písmenem, tj. např. $B_a = g_{ab} B^b$.

$$\nabla_a \alpha^b = \partial_a \alpha^b + \Gamma_{ac}^b \alpha^c , \quad \Gamma_{ab}^c = \Gamma_{ab}^{cs} d_s x^s \frac{\partial^a}{\partial x^s} \frac{\partial^b}{\partial x^t} . \quad (2.1.10)$$

Přímým výpočtem dostáváme

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2} \bar{g}^{cd} (\partial_b g_{ad} + \partial_a g_{bd} - \partial_d g_{ab}) , \quad (2.1.11)$$

$$R_{abc}^d = - \partial_a \Gamma_{bc}^d + \partial_b \Gamma_{ac}^d + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{be}^d - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ae}^d . \quad (2.1.12)$$

Riemannův tenzor křivosti obecné (i nemetrické) konexe splňuje

$$R_{[abc]}^d = R_{abc}^d , \quad R_{[abc]}^d = 0 , \quad \nabla_d R_{bcd}^e = 0 , \quad (2.1.13)$$

jedná-li se o tenzor křivosti metrické konexe, platí navíc

$$R_{ab[cd]} = R_{abcd} . \quad (2.1.14)$$

Hmota rozložená v prostoročase je charakterizována tenzorem energie-hybnosti T_{ab} . Geometrie prostoročasu je daná řešením Einsteinova gravitačního zákona

$$Ric_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi T_{ab} . \quad (2.1.15)$$

Rychlosť světla budeme vždy pokládat $c=1$, Einsteinovu gravitační konstantu 8π budeme považovat za bezrozměrnou. Jediným netriviálním rozměrem je tedy délka.

2.2 Pole spinu 0,1,2

Skalární pole nulové hmoty se zdrojem J_s v plochém prostoročase splňuje pohybovou rovnici

$$\square \phi = J_s , \quad (2.2.1)$$

kde $\square = \bar{g}^{ab} \nabla_a \nabla_b$. Zobecněním této rovnice do křivého prostoročasu je

$$(\square + \xi R) \phi = J_s , \quad (2.2.2)$$

kde ξ je číslo. Později uvidíme, že speciální volbou ξ můžeme zajistit konformní invarianci této rovnice.

Vektorové pole nulové hmoty je pole elektromagnetické popsané standardními Maxwellovými rovnicemi

$$F_{ab} = d_a A_b , \quad (2.2.3)$$

$$\nabla_a F^{ab} = - J^b . \quad (2.2.4)$$

Intenzita F_{ab} je invariantní vůči kalibrační transformaci

$$A_a \rightarrow \tilde{A}_a = A_a + d_a \xi . \quad (2.2.5)$$

Důsledkem pohybových rovnic (jejich kalibrační invariance) je zachovávání se elektromagnetického toku J^a , tj.

$$\nabla_a J^a = 0 . \quad (2.2.6)$$

Díky tomuto a kalibrační volnosti můžeme zvolit kalibrační

podmíinku

$$\nabla_a A^a = 0 \quad , \quad (2.2.7)$$

Pro potenciál dostáváme v křivém prostoročase rovnici

$$\square A_a - Ric_{ab} A^b = - J^b_e \quad , \quad (2.2.8)$$

která se v plochém prostoročase redukuje na vlnovou rovnici

$$\square A_a = - J_{Fe} \quad , \quad (2.2.9)$$

Pole spinu 2 \vec{J}_{ab} splňuje pohybovou rovnici

$$\square \vec{J}_{ab} = J_{ab} \quad . \quad (2.2.10)$$

K této rovnici vede i linearizovaná teorie gravitace. Předpokládejme, že metrika g_{ab} je dáná malou poruchou od ploché metriky η_{ab}

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \varepsilon h_{ab} + O[\varepsilon] \quad , \quad \varepsilon \ll 1 \quad . \quad (2.2.11)$$

Potom dostáváme Christoffelovy symboly konexe ∇_a vůči ploché konexi ∂_a (splňující $\partial_a \eta_{bc} = 0$)

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2} \gamma^{cd} (\partial_a h_{bd} + \partial_b h_{ad} - \partial_d h_{ab}) \varepsilon + O[\varepsilon] \quad (2.2.12)$$

a Riemannův tenzor, Ricciho tenzor a skalární křivost do prvního řádu v ε

$$R_{abcd} = 2 \partial_{[a} \partial_{b]} h_{c]d]} \varepsilon + O[\varepsilon] \quad , \quad (2.2.13)$$

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{ab} &= -\frac{\varepsilon}{2} (\square h_{ab} + \partial_a \partial_b h - \partial_a \partial_c h^c_b - \partial_b \partial_c h^c_a) + O[\varepsilon] = \\ &= -\frac{\varepsilon}{2} (\square \bar{J}_{ab} - \frac{1}{2} \square J \gamma_{ab} - \partial_a \partial_c \bar{J}^c_b - \partial_b \partial_c \bar{J}^c_a) + O[\varepsilon], \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

$$Q = -\frac{\varepsilon}{2} (\square J + 2 \partial_a \partial_b \bar{J}^{ab}) + O[\varepsilon]. \quad (2.2.15)$$

Zde $\square = \eta^{ab} \partial_a \partial_b$ a zavedli jsme

$$\bar{J}_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2} h \gamma_{ab}, \quad h_{ab} = \bar{J}_{ab} - \frac{1}{2} J \gamma_{ab}, \quad (2.2.16)$$

$$h = h_a^a, \quad J = \bar{J}_a^a. \quad (2.2.17)$$

Einsteinův gravitační zákon má do prvního řádu v ε tvar

$$-\frac{1}{2} (\square \bar{J}_{ab} - \partial_a \partial_c \bar{J}^c_b - \partial_b \partial_c \bar{J}^c_a) = \mathcal{H} T^{(1)}_{ab}. \quad (2.2.18)$$

Důsledkem pohybových rovnic je zachovávání se tenzoru energie-impulu a to i v linearizované teorii, tj.

$$\partial_a T^{(1)ab} = 0. \quad (2.2.19)$$

Metrika \bar{g}_{ab} může ale být považována jako porucha jiné ploché metriky \tilde{g}_{ab} lišící se od γ_{ab} o malé (tj. řádu ε) posunutí podél vektorového pole ξ^a , tj.

$$\tilde{g}_{ab} = \gamma_{ab} - \varepsilon \partial_{(a} \xi_{b)}. \quad (2.2.20)$$

To má za následek invariaci měřitelných veličin vzhledem k transformaci

$$h_{ab} \rightarrow \tilde{h}_{ab} = h_{ab} + \partial_{(a} \xi_{b)}. \quad (2.2.21)$$

Díky této invariance a (2.2.19) lze naložit kalibrační podmínku na

$$\partial_a \bar{g}^a_b = 0 \quad (2.2.22)$$

a Einsteinův gravitační zákon do prvního řádu v ε nabývá tvar

$$\square \bar{g}_{ab} = -2\mu T^{(1)}_{ab}, \quad (2.2.23)$$

což je pohybová rovnice pole spinu 2 (2.2.10).

2.3 Kalibrační pole

Kinematická aréna kalibračních polí je bohatší než prostý prostoročas o vnitřní stupně volnosti. Je realizována komplexním vektorovým bundle prostorem $\mathbb{E} M$ nad prostoročasem M . Zhruba řečeno to znamená, že v každém bodě prostoročasu máme navíc vektorový prostor vnitřních stupňů volnosti. K prostoru $\mathbb{E} M$ je přidružen prostor komplexně sdružený $\bar{\mathbb{E}} M$. Oba prostory jsou spojeny antilineární operací

$$\bar{} : \mathbb{E} M \rightarrow \bar{\mathbb{E}} M , \quad a^{\theta} \mapsto \bar{a}^{\theta} \quad . \quad (2.3.1)$$

Pro vektory z $\mathbb{E} M$ budou jako abstraktní indexy používána velká latinská písmena, pro prvky $\bar{\mathbb{E}} M$ navíc čárkováná. Nad $\mathbb{E} M$ můžeme vybudovat tensorový bundle prostor $\mathbb{E}_{q,p}^{p,p'} M$ ³.

Kalibrační teorie je charakterizována kalibrační grupou G , což je nějaká dostatečně "pěkná" grupa (např. prostá, my budeme uvažovat grupy $SU(n)$, resp $U(1)$), a tzv. lokální kalibrační grupou danou součinem $G \times M$. Tato lokální grupa působí na $\mathbb{E} M$ prostřednictvím zobrazení

$$T : G \times M \rightarrow \mathbb{E}_{q,p}^{p,p'} M , \quad [g, \vec{p}] \mapsto T_g^{\theta} \vec{p} \quad , \quad (2.3.2)$$

přičemž T je reprezentace grupy $G \times M$. Z unitarity dostaneme, že na $\mathbb{E} M$ lze zvolit unitární strukturu invariantní vůči akci grupy

³) Zde

$$\mathbb{E}_{q,p}^{p,p'} M = \underbrace{\mathbb{E} M \otimes \dots \otimes \mathbb{E} M}_{p \times} \otimes \underbrace{\mathbb{E}^* M \otimes \dots \otimes \mathbb{E}^* M}_{q \times} \otimes \underbrace{\bar{\mathbb{E}} M \otimes \dots \otimes \bar{\mathbb{E}} M}_{p' \times} \otimes \underbrace{\bar{\mathbb{E}}^* M \otimes \dots \otimes \bar{\mathbb{E}}^* M}_{q' \times} .$$

$$H_{\underline{a}\underline{b}'} \in \mathbb{E}_{\underline{a}\underline{b}}^{0,0} M \quad , \quad \overline{H}_{\underline{a}\underline{b}'} = H_{\underline{a}\underline{b}'} \quad , \quad H_{\underline{a}\underline{b}'} T_{\underline{g}}^{\underline{a}}{}_{\underline{c}} T_{\underline{g}}^{\underline{b}'}{}_{\underline{c}'} = H_{\underline{b}\underline{c}'} \quad (2.3.3)$$

a pomocí této struktury definujeme skalární součin na $\mathbb{E}M$ ve tvaru

$$(\alpha^{\underline{a}}, b^{\underline{b}}) = \bar{\alpha}^{\underline{a}'} b^{\underline{a}} H_{\underline{a}\underline{a}'} = \alpha_{\underline{a}}^+ b^{\underline{a}} \quad , \quad (2.3.4)$$

kde jsme zavedli hermitovské sdružení ${}^+$

$${}^+ : \mathbb{E}M \hookrightarrow \mathbb{E}^*M \quad , \quad \alpha^{\underline{a}} \mapsto \alpha_{\underline{a}}^+ = H_{\underline{a}\underline{a}'} \bar{\alpha}^{\underline{a}'} \quad . \quad (2.3.5)$$

Definici hermitovského sdružení lze přímočaře rozšířit na celý tenzorový bundle $\mathbb{E}_{\underline{a}\underline{b}}^{0,0} M$. Podmínky unitarity potom lze psát

$$T_{\underline{g}}^{\underline{a}}{}_{\underline{b}} T_{\underline{g}}^{\underline{b}'}{}_{\underline{c}} = \mathbb{I}_{\underline{c}}^{\underline{a}} \quad . \quad (2.3.6)$$

Pro grupy $SU(n)$ máme navíc podmíinku

$$\det T_{\underline{g}}^{\underline{a}'}{}_{\underline{b}} = 1 \quad . \quad (2.3.7)$$

Kalibrační pole je popsáno reálnou konexí $D_{\underline{a}}$ na $\mathbb{E}M$, která zachovává metriku $H_{\underline{a}\underline{b}'}$

$$(\overline{D_{\underline{a}} \alpha})^{\underline{a}'} = D_{\underline{a}} \bar{\alpha}^{\underline{a}'} \quad , \quad D_{\underline{a}} H_{\underline{a}\underline{b}'} = 0 \quad . \quad (2.3.8)$$

Tuto konexi rozšíříme na $\mathbb{T}M$ jako metrickou konexi $\nabla_{\underline{a}}$. Tenzor křivosti kalibračního pole je definován vztahem

$$\text{il } F_{\underline{a}\underline{b}}{}^{\underline{a}'}{}_{\underline{b}'} \varphi^{\underline{b}'} = 2 D_{[\underline{a}} D_{\underline{b}]} \varphi^{\underline{a}} \quad . \quad (2.3.9)$$

Zde ℓ je vazbová konstanta kalibračního pole. Platí

$$F_{ab}^+ = F_{ab}, \quad F_{ab}^- = -F_{ba}. \quad (2.3.10)$$

Standardní technikou v teorii kalibračního pole je volba kalibrace – volba speciální báze e_a^B v EH vůči níž se vyjadřují ostatní veličiny. Tato báze se volí ortonormální, tj.

$$\begin{array}{l} (e_a^B, e_b^B) = \delta_{ab}, \\ \Downarrow \\ H_{AB} = \delta_{ab} e_a^B \bar{e}_B^A, \end{array} \quad (2.3.11)$$

kde \bar{e}_B^A je duální báze k e_a^B ($e_a^B \bar{e}_B^A = \delta_a^B$). K této bázi lze přiřadit konexi ∂_a podmínkami

$$\partial_a e_B^B = 0, \quad \partial_a \bar{e}_B^A = 0, \quad (2.3.12)$$

pro kterou platí

$$\partial_B \partial_B \varphi^B = 0, \quad (2.3.13)$$

Nyní můžeme zavést kalibrační potenciál A_a^B vztahem

$$D_a \varphi^B - \partial_a \varphi^B = i\ell A_a^B \varphi^B. \quad (2.3.14)$$

Platí

$$A_a^B = A_a. \quad (2.3.15)$$

Pro tensor křivosti kalibračního pole dostáváme

$$\begin{aligned} F_{ab} &= 2 \partial_{[a} A_{b]} + i e [A_a, A_b] = \\ &= 2 D_{[a} A_{b]} - i e [A_a, A_b] . \end{aligned} \quad (2.3.16) \text{ 4)}$$

Kalibrační teorie se konstruuje tak, aby byla invariantní vůči akci lokální kalibrační grupy (tzv. kalibrační transformaci). Proto veškeré měřitelné veličiny musí být při kalibrační transformaci invariantní. Prvky $E_{\alpha\beta}^{P,P'}$ nejsou přímo měřitelné, jelikož se transformují při kalibrační transformaci podle vztahu

$$\tilde{B}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{B_1 \dots B_n} = T_g^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \bar{T}_g^{B_1 \dots B_n} \dots T_g^{\alpha_{n-1} \dots \alpha_n} \bar{T}_g^{B_{n-1} \dots B_n} B_{\alpha_n \dots \alpha'_1}^{B_1 \dots B_n} . \quad (2.3.17)$$

Měřitelné tedy budou pouze různé zúžení přes všechny kalibrační stupně volnosti jako např. F_A^B . Kalibrační transformace indukuje také změnu kalibračního pole (konexe)

$$\begin{aligned} \tilde{D}_a \alpha^B &= (\widetilde{D_a} \alpha)^B \\ \downarrow \\ \widetilde{D}_a \alpha^B &= D_a \alpha^B - (D_a T_g^B{}_c) T_g^{-1}{}^c{}_e \alpha^e . \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

Potenciál vůči zadané kalibraci (zvolené bázi ϵ_a^0), která je nezávislá na kalibrační transformaci, se bude transformovat

$$\tilde{A}_a{}^B_B = A_a{}^B_B + \frac{1}{i e} (\partial_a T_g^B{}_c) T_g^{-1}{}^c{}_e \alpha^e . \quad (2.3.19)$$

4) Pro B_a^B, C_a^B prvky $E_{\alpha\beta}^{P,P'} M$ definujeme komutátor a stopu
 $[B_a, C_b]^B{}_c = B_a^B C_c^B - C_a^B B_c^B ,$
 $Tr B = B^B{}_B .$

Pohybová rovnice kalibračního pole je

$$D_a \tilde{F}^{ab}{}_{;b} = - J_k{}^b{}_{;b} . \quad (2.3.20)$$

Důsledkem pohybové rovnice je zachovávání se kalibračního toku

$$\begin{aligned} D_a J_k{}^b &= D_a D_b \tilde{F}^{ab}{}_{;b} = D_{[a} D_{b]} \tilde{F}^{ab}{}_{;b} = \\ &= - \frac{1}{2} Ric_{ab} \tilde{F}^{ab}{}_{;b} + \frac{1}{2} Ric_{ab} \tilde{F}^{ab} + \frac{1}{2} [F_{ab}, \tilde{F}^{ab}] = 0 . \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Nyní se věnujme případu $G = U(1)$. Prostor E^M je 1-dimensionální, což mnohé zjednoduší. Kalibrační transformace jsou tvaru

$$T_g{}^b{}_a = e^{i\varphi} \mathbb{1}^b{}_a , \quad \varphi \in M \quad (2.3.22)$$

a tenzor $B \in E_{q,q'}^M$ se transformuje

$$\tilde{B} = e^{i\ell(p-p'-q+q')\varphi} B . \quad (2.3.23)$$

Speciálně

$$\tilde{F}_{ab}{}^B{}_{;B} = F_{ab}{}^B{}_{;B} . \quad (2.3.24)$$

Navíc každý tenzor z $E_{q,q'}^M$ má pouze jednu souřadnici a můžeme tedy definovat vektorový potenciál a kalibračně nezávislý a tenzor křivosti

$$\begin{aligned} A_a &= A_a{}^B{}_{;B} e^B e_B = A_a{}^B{}_{;B} , \\ F_{ab} &= F_{ab}{}^B{}_{;B} e^B e_B = F_{ab}{}^B{}_{;B} , \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

kde e^B je libovolně zvolená kalibrace (ortonormální báze). Vektorový potenciál však, díky (2.3.19), není kalibračně invariantní a transformuje se

$$\tilde{A}_a = A_a + d_a \varphi \quad . \quad (2.3.26)$$

Dále máme

$$F_{ab} = d_a F_b \quad (2.3.27)$$

a pohybová rovnice (2.3.20) má tvar

$$\nabla_a F^{ab} = - J^b \quad . \quad (2.3.28)$$

Vidíme, že v tomto případě se kalibrační pole redukuje na pole elektromagnetické.

Námi uvedený popis kalibračního pole je možné nalézt v [19] nebo [25].

Na závěr pro úplnost uvedeme ještě vztah zavedených veličin k často používanému potenciálu a tenzoru křivosti nabývajících hodnot v Lieově algebře kalibrační grupy. Lieova algebra $\mathfrak{g}M$ lokální kalibrační grupy je vektorový bundle prostor se standardním fibrem Lieovou algebrou \mathfrak{g} grupy G . Intuitivně to znamená, že máme v každém bodě prostoročasu jednu kopii \mathfrak{g} . Pro prvky $\mathfrak{g}M$ budou jako abstraktní indexy používána malá řecká písmena. Struktura Lieovy algebry \mathfrak{g} indukuje strukturní tensor na \mathfrak{g}^*M

$$[\alpha, \beta]^i = \alpha^\varphi \beta^\varphi C_{\alpha\varphi}^i \quad , \quad (2.3.29)$$

Generátory τ_{φ}^a reprezentace T_g^a jsou dány vztahem

$$\text{je } \alpha^\varphi \tau_\varphi = \frac{d}{d\gamma} T_{g(\gamma)} \Big|_{\gamma=0} \quad , \quad (2.3.30)$$

kde $g(\gamma) = \exp(\gamma \alpha^\varphi)$ je exponenciální křivka v $G \cdot M$. Toto lze

intuitivně zapsat

$$T_{\alpha+\alpha} \approx 1 + i\epsilon \alpha^2 \tau_\alpha . \quad (2.3.31)$$

Generátory τ_α^{β} pro grupy $G = SU(m)$, $m > 1$ splňují

$$\tau_\alpha^\dagger = \tau_\alpha , \quad i\epsilon [\tau_\alpha, \tau_\beta] = C_{\alpha\beta} \tau_\alpha , \quad (2.3.32)$$

$$T_n \tau_\alpha = 0 .$$

Na M můžeme prodloužit konexi odpovídající kalibračnímu poli tím, že položíme podmínky

$$D_\alpha C_{\alpha\beta} = 0 , \quad D_\alpha \tau_\alpha^{\beta} = 0 ; \quad (2.3.33)$$

stejně tak můžeme prodloužit konexi ∂_α . Pro potenciál můžeme psát

$$D_\alpha \alpha^\beta - \partial_\alpha \alpha^\beta = A_\alpha^{\beta\gamma} \alpha^\gamma = [R_\alpha, \alpha]^\beta . \quad (2.3.34)$$

Zde jsme zavedli obvykle užívaný potenciál R_α^β

$$A_\alpha^{\beta\gamma} = R_\alpha^\beta C_{\alpha\gamma}^\alpha . \quad (2.3.35)$$

Platí

$$A_\alpha^{\beta\gamma} = R_\alpha^\beta \tau_\gamma^{\alpha\beta} . \quad (2.3.36)$$

Tenzor křivosti konexe na M je dán vztahem

$$F_{\alpha\beta}^\gamma \alpha^\beta = 2 [D_\alpha, D_\beta] \alpha^\gamma , \quad (2.3.37)$$

Analogicky s postupem pro potenciál zavedeme tenzor $\underline{\underline{F}}_{ab}^{\alpha}$

$$\underline{\underline{F}}_{ab}^{\alpha} = \underline{\underline{F}}_{ab}^{\beta} C_{\beta\alpha}^{\gamma} . \quad (2.3.38)$$

Platí vztahy ⁵⁾

$$\underline{\underline{F}}_{ab}^{\alpha} = \underline{\underline{F}}_{ab}^{\beta} \tau_{\beta}^{\alpha} , \quad (2.3.39)$$

$$\underline{\underline{F}}_{ab}^{\alpha} = 2 \partial_{[a} A_{b]}^{\alpha} + [A_a, A_b]^{\alpha} , \quad (2.3.40)$$

$$\underline{\underline{F}}_{ab}^{\alpha} = 2 \partial_{[a} R_{b]}^{\alpha} + [R_a, R_b]^{\alpha} , \quad (2.3.41)$$

$$[\underline{\underline{F}}_{ab}, \alpha]^\alpha = 2 [D_{[a}, D_{b]}] \alpha^\alpha . \quad (2.3.42)$$

⁵⁾ Zde se nesmí zaměňovat více významů komutátoru $[,]$. V rovnici (2.3.40) je to komutátor ve smyslu poznámky ⁴⁾, v rovnicích (2.3.34), (2.3.41) a (2.3.42) ve smyslu Lieovy závorky dané rovnicí (2.3.29).

3. RETARDOVANÁ POLE URYCHLENÝCH ZDROJŮ

Tato kapitola obsahuje rozsáhlou diskusi retardovaných polí rovnoměrně urychlených zdrojů. Uvedeme známou retardovanou intenzitu elektromagnetického pole urychlené částice a nalezneme retardované skalární pole a vektorový potenciál elektromagnetického pole urychlené částice. Pro linearizovanou teorii gravitace budeme nuti v tenzoru energie-impulu započítat vedle urychlované částice i příčinu urychlování. Nalezneme linearizovanou metriku a Riemannův tenzor takového systému. V celé této kapitole pracujeme v plochém prostoročase a pod urychleným zdrojem, pokud není řešeno jinak chápeme rovnoměrně urychlený zdroj.

3.1. Rindlerovské souřadnice

Ke zkoumání urychlených zdrojů je výhodné používat souřadnice přizpůsobené urychlenému pozorovateli. V tomto paragrafu zavedeme několik takovéto souřadnice a uvedeme souřadnice světočáry urychleného zdroje.

Mějme plochý prostoročas s metrikou v inerciálních souřadnicích danou

$$g = -dt^2 + dz^2 + dx^2 + dy^2 \quad . \quad (3.1.1)$$

V nulových souřadnicích u, v

$$\begin{aligned} u &= z + t \quad , \quad z = \frac{1}{2}(u + v) \quad , \\ v &= z - t \quad , \quad t = \frac{1}{2}(u - v) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

má tvar

$$g = \frac{1}{2} du^2 dv^2 + dx^2 + dy^2 \quad . \quad (3.1.3)$$

Dále zavedeme souřadnice U, V a T, Z

$$U = a \ln |\frac{u}{a}| \quad , \quad |u| = a \exp(\frac{U}{a}) \quad , \quad (3.1.4)$$

$$V = a \ln |\frac{v}{a}| \quad , \quad |v| = a \exp(\frac{V}{a}) \quad ;$$

$$U = T + Z \quad , \quad Z = \frac{1}{2}(U + V) = \frac{1}{2}a \ln \frac{uv}{a^2} \quad , \quad (3.1.5)$$

$$V = Z - T \quad , \quad T = \frac{1}{2}(U - V) = \frac{1}{2}a \ln |\frac{u}{v}| \quad .$$

Zde α je konstanta rozměru délky. Označme

$$G_u = \text{sign } u, \quad G_v = \text{sign } v \quad (3.1.6)$$

V souřadnicích U, V, x, y a T, Z, x, y má metrika (3.1.1) tvar

$$g = \frac{1}{2} G_u G_v \exp\left(-\frac{U+V}{\alpha}\right) dU dV + dx dx + dy dy = \quad (3.1.7)$$

$$= G_u G_v \exp\left(2\frac{Z}{\alpha}\right) (-dT dT + dZ dZ) + dx dx + dy dy. \quad (3.1.8)$$

Konečně zavedeme Rindlerovské souřadnice b, T

$$\begin{aligned} b &= \alpha \exp \frac{Z}{\alpha} = \sqrt{|uv|} = \sqrt{|-t^2 + Z^2|}, \quad |u| = b \exp\left(\frac{T}{\alpha}\right), \\ T &= \frac{1}{2} \alpha \ln \left| \frac{u}{v} \right| = \alpha \operatorname{arcth} \left(\frac{Z}{t} \right)^{\frac{b}{\alpha}}, \quad |v| = b \exp\left(-\frac{T}{\alpha}\right), \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

odtud

$$g = G_u G_v \left(-\frac{b^2}{\alpha^2} dT dT + db db \right) + dx dx + dy dy. \quad (3.1.10)$$

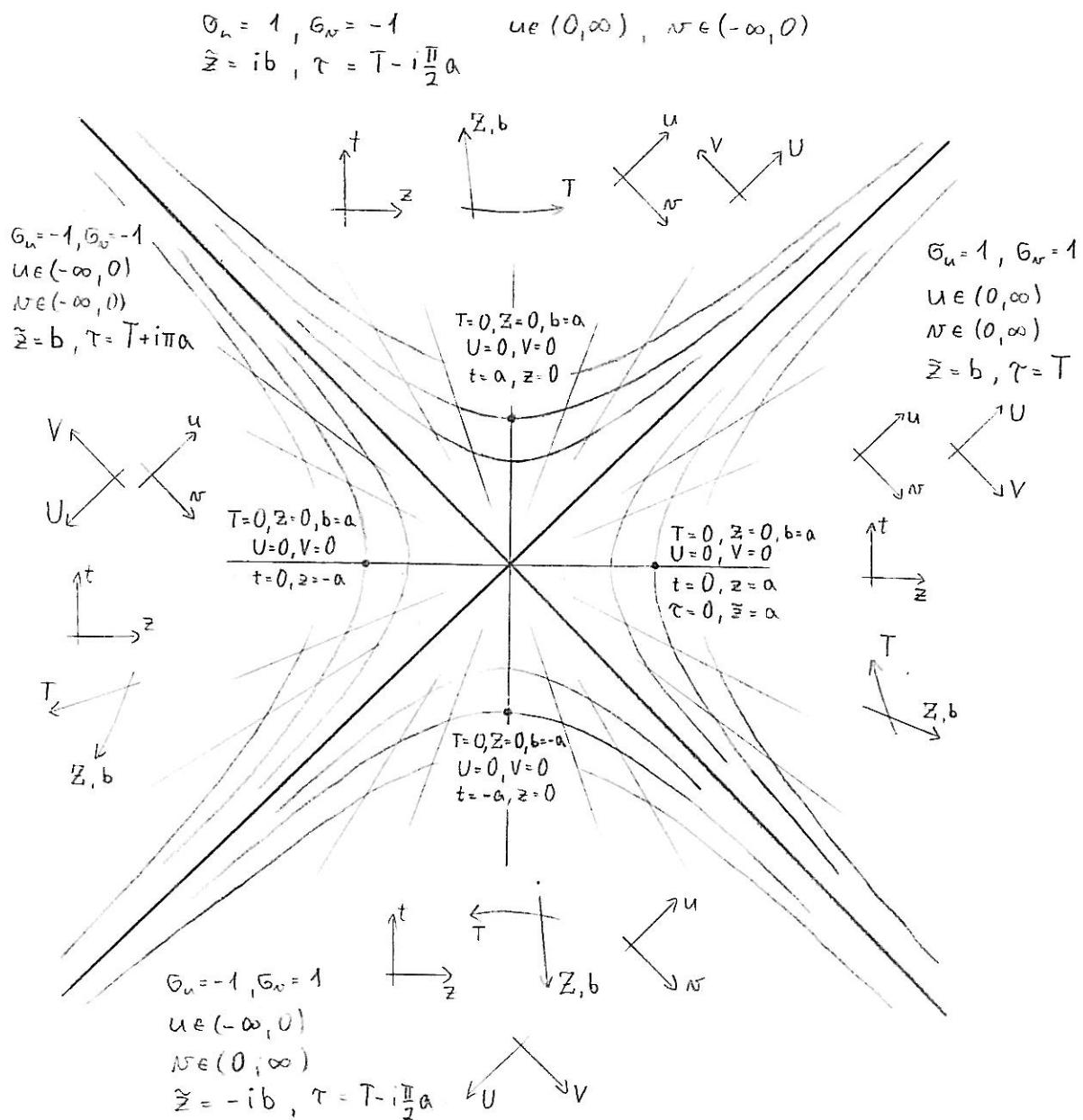
Z definice je vidět, že tyto souřadnice jsou hladké pouze v oblastech $u, v \neq 0$; metrika není analytická funkce těchto souřadnic. Proto je výhodné zavést komplexní Rindlerovské souřadnice

$$\tilde{z} = \sqrt{|uv|}, \quad u = \tilde{z} \exp \frac{T}{\alpha}, \quad t = \tilde{z} \operatorname{sh} \frac{T}{\alpha}, \quad (3.1.11)$$

$$v = \frac{1}{2} \alpha \ln \frac{u}{v}, \quad v = \tilde{z} \exp\left(-\frac{T}{\alpha}\right), \quad z = \tilde{z} \operatorname{ch} \frac{T}{\alpha},$$

$$g = -\frac{\tilde{z}^2}{\alpha^2} dT dT + d\tilde{z} d\tilde{z} + dx dx + dy dy. \quad (3.1.12)$$

Funkce $\sqrt{|uv|}$ a \ln jsou definovány tak, aby \tilde{z} a T byly analytické vícezánačné funkce na komplexifikovaném prostoru-



obr. 3.1

Na obrázku jsou znázorněny směry růstu a obory hodnot jednotlivých souřadnic v různých oblastech. Souřadnice U, V, T, Z nabývají ve všech oblastech hodnot z celého intervalu $(-\infty, \infty)$, souřadnice b nabývá hodnot $(0, \infty)$.

čase \mathbb{M}^4). Komplexifikovaný prostoročas \mathbb{M} je 4-dimensionální varieta s metrikou (3.1.1), kde však t, x, y, z jsou komplexní analytické funkce. Původní Minkowského prostoročas je pak reálný řez \mathbb{M} . Na tomto řezu jsou funkce \tilde{z} a τ vícezáčné, můžeme však v oblastech analytičnosti zvolit jednu větev, např. následovně

$$G_u = 1, G_v = 1 : \tilde{z} = b, \tau = T,$$

$$G_u = 1, G_v = -1 : \tilde{z} = ib, \tau = T - i\frac{\pi}{2}a, \quad (3.1.13)$$

$$G_u = -1, G_v = 1 : \tilde{z} = -ib, \tau = T - i\frac{\pi}{2}a,$$

$$G_u = -1, G_v = -1 : \tilde{z} = b, \tau = T + i\pi a.$$

Komplexní souřadnice \tilde{z}, τ jsou výhodné z důvodu, že metrika i všechny rovnice jsou analytické funkce těchto souřadnic a proto některé výpočty stačí provádět pouze v oblasti $G_u = G_v = 1$ a výsledky pak případně analyticky prodloužit do zbývajících oblastí.

Často budeme používat též cylindrických souřadnic

$$\begin{aligned} \varrho &= \sqrt{x^2 + y^2}, & x &= \varrho \cos \varphi, \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{y}{x}, & y &= \varrho \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

¹⁾ Analytické mimo body větvení, tj. mimo body pro které je $\tilde{z} = 0$. To vede na podmítku

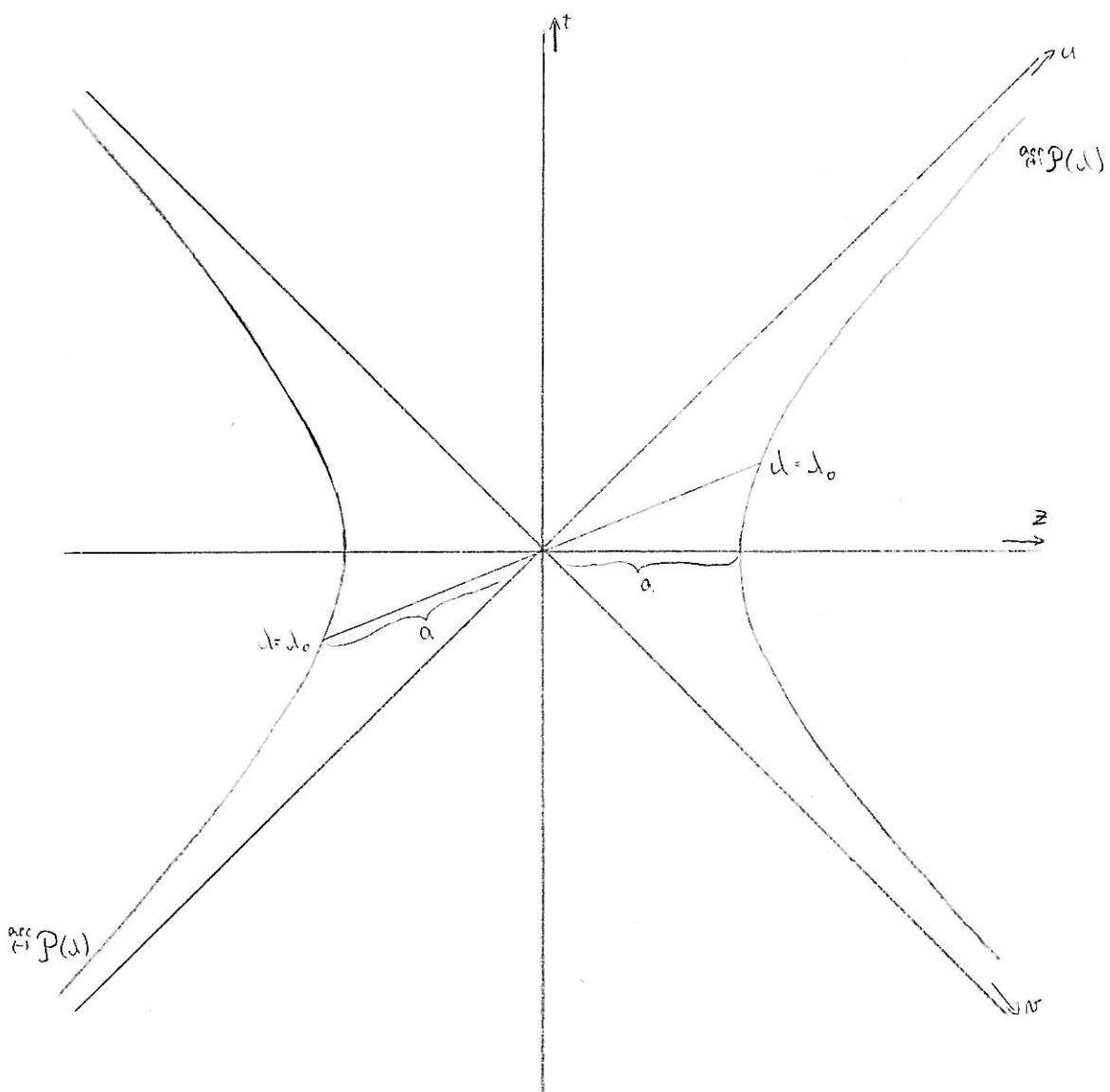
$$\operatorname{Re} t = \pm \operatorname{Re} z, \quad \operatorname{Im} t = \pm \operatorname{Im} z.$$

V dalším budeme hledat pole rovnoměrně urychlených částic. Světočáry $\text{^R}P(\lambda)$ částic se zrychlením α jsou dány (obr. 3.2)

$$\begin{aligned} t(\text{^R}P(\lambda)) &= \pm \alpha \sinh \frac{\lambda}{\alpha}, & \tau(\text{^R}P(\lambda)) &= \pm \lambda, \\ z(\text{^R}P(\lambda)) &= \pm \alpha \cosh \frac{\lambda}{\alpha}, & \tilde{z}(\text{^R}P(\lambda)) &= \alpha, \quad (3.1.15) \\ x(\text{^R}P(\lambda)) &= y(\text{^R}P(\lambda)) = 0, \end{aligned}$$

kde jsme zvolili počátek souřadnic tak, aby ve vlastním čase $\lambda=0$ částice měly souřadnice $t=0$ a $z=\pm \alpha = \pm \frac{1}{\alpha}$, byly v klidu a urychlovaly se ve směru osy z . Index (+) či (-) určuje směr urychlování - doprava či doleva. 4-rychlosti částic jsou

$$\text{^R}U^\mu(\lambda) = \frac{\partial^{\mu}}{\partial \tau} \Big|_{\text{^R}P(\lambda)} = \pm \left(\cosh \frac{\lambda}{\alpha} \frac{\partial^t}{\partial t} + \sinh \frac{\lambda}{\alpha} \frac{\partial^z}{\partial z} \right) \Big|_{\text{^R}P(\lambda)}. \quad (3.1.16)$$



obr. 3.2

Na obrázku jsou vyznačeny světočáry dvou rovnoměrně urychlených částic. Částice (+) se pohybuje v kladném směru osy z , částice (-) v záporném. Světočáry (3.1.5) jsou parametrisovány tak, aby pro každý vlastní čas λ_0 spojnice obou částic procházela středem hyperbol. Klidová vzdálenost částice od středu hyperbol je α , velikost zrychlení obou částic je $\alpha = \frac{1}{\alpha}$. Pokud světočáru jedné částice analyticky prodloužíme do \mathbb{C} -plochy v komplexifikovaném M , protne tato plocha reálný prostoročas M ještě ve světočáře druhé částice.

3.2. Skalární pole

Nyní nalezneme retardované skalární pole rovnoměrně urychlené skalárně nabité částice v plochém prostoročase. Je-li náboj částice μ , má skalární tok tvar z)

$$\stackrel{(3.2.1)}{=} J_s(x) = \mu \int d\lambda \delta(\stackrel{(3.2.1)}{\beta}(\lambda) | x) .$$

V plochém prostoročase platí

$$\delta(x|x') = \delta(t-t') \delta(x-x') \delta(y-y') \delta(z-z') . \quad (3.2.2)$$

Využitím (3.1.15) integrací dostaneme

$$\begin{aligned} \stackrel{(3.2.3)}{=} J_s(x) &= \mu \int d\lambda \delta(t - a \sinh \frac{\lambda}{a}) \delta(z - a \sinh \frac{\lambda}{a}) \delta(x) \delta(y) = \\ &= \mu \frac{1}{\sinh \frac{\lambda}{a}} \delta(z - a \sinh \frac{\lambda}{a}) \Big|_{t=a \sinh \frac{\lambda}{a}} \delta(x) \delta(y) = \\ &= \mu 2a \delta(z^2 - a^2 \sinh^2 \frac{\lambda}{a}) \Big|_{t=a \sinh \frac{\lambda}{a}} \delta(x) \delta(y) \Theta(u) \Theta(v) = \\ &= \mu 2a \delta(z^2 - a^2) \delta(x) \delta(y) \Theta(u) \Theta(v) = \\ &= \mu \delta(z-a) \delta(x) \delta(y) \Theta(u) \Theta(v) . \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

²⁾ Zde $\delta(x|x')$ je delta-funkce lokalizována v bodě x normalizována na míru $g^{1/2}$ indukovanou metrikou $g_{\mu\nu}$, tj.

$$\int g^{1/2}(x') \varphi(x') \delta(x|x') = \varphi(x) .$$

$\delta(x)$ je obyčejná delta-funkce na reálných číslech, tj.

$$\int \delta(x) f(x) dx = f(0) .$$

Více viz. dodatek 3.A.

Retardovaná Greenova funkce vlnové rovnice, splňující

$$\square_x G_{\text{ret}}(x|x') = \delta(x|x'), \quad (3.2.5)$$

$$G_{\text{ret}}(x|x') = 0 \quad \text{pro} \quad \varepsilon(x|x') = -1,$$

j.e. ³⁾

$$G_{\text{ret}}(x|x') = -\frac{1}{2\pi} \Theta(x|x') \delta((x-x')^2) \quad (3.2.6)$$

Zde funkce $\Theta(x|x')$ a $\varepsilon(x|x')$ jsou definovány

$$\varepsilon(x|x') = \begin{cases} = 1 & \text{pro } x \text{ v příčinné budoucnosti } x' \\ = 0 & \text{pro } x, x' \text{ prostorupodobné} \\ = -1 & \text{pro } x \text{ v příčinné minulosti } x' \end{cases} \quad (3.2.7)$$

$$\Theta(x|x') = \begin{cases} = 1 & \text{pro } x' \text{ v příčinné minulosti } x \\ = 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (3.2.8)$$

$$\Theta(x|x') = \Theta(\varepsilon(x|x')) \quad . \quad (3.2.9)$$

Retardované řešení rovnice (2.2.1) se zdrojem (3.2.1) je

$$\phi(x) = \int_{x' \in M} g^{t_2}(x') J_s(x') G_{\text{ret}}(x|x') \quad . \quad (3.2.10)$$

³⁾ V plochém prostoročasu má smysl zadefinovat rozdíl bodů. Na vzniklé vektorovém prostoru přirozeně působí Minkowského metrika, tj.

$$(x-x')^2 = -(t-t')^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 = \\ = \hat{x}^2 + \hat{y}^2 - 2\hat{x}\hat{y} \operatorname{ch} \frac{t-t'}{a} + (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2,$$

kde (t, x, y, z) resp. $(\tau, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ a (t', x', y', z') resp. $(\tau', \hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ jsou souřadnice bodů x a x' .

Míra $\mathcal{G}^{\frac{1}{2}}$ má v souřadnicích τ, \tilde{z} tvar

$$\mathcal{G}^{\frac{1}{2}} = dt dz dx dy = \frac{\tilde{z}}{a} d\tau d\tilde{z} dx dy \quad (3.2.11)$$

a tak pro x v oblasti $G_n = G_p = 1$ můžeme psát

$$\begin{aligned} {}^{ac}\phi(x) &= -\frac{\mu}{2\pi} \int \frac{\tilde{z}}{a} d\tau' d\tilde{z}' dx' dy' \delta(\tilde{z}' - a) \Theta(x_1 x') \delta(\tilde{z}^2 + \tilde{z}'^2 - 2\tilde{z}\tilde{z}' \operatorname{ch} \frac{\tau - \tau'}{a}) = \\ &= -\frac{\mu}{2\pi} \int d\tau' \Theta(\tau - \tau') \delta(\rho^2 + \tilde{z}^2 + a^2 - 2a\tilde{z} \operatorname{ch} \frac{\tau - \tau'}{a}) = \\ &= -\frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{\tilde{z} \operatorname{sh} \frac{\tau - \tau'}{a}} \left| \operatorname{ch} \frac{\tau - \tau'}{a} = \frac{l}{\tilde{z}}, \tau > \tau' \right. \\ &= -\frac{\mu}{4\pi} \frac{2a}{l} = -\frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{R}, \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

kde jsme zavedli dále často používané funkce

$$\frac{\tilde{z}}{a} = \left[(\tilde{z}^2 + a^2 + \rho^2)^2 - 4a^2 \tilde{z}^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[(\tilde{z}^2 + \rho^2 - a^2)^2 + 4a^2 \rho^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.2.13)$$

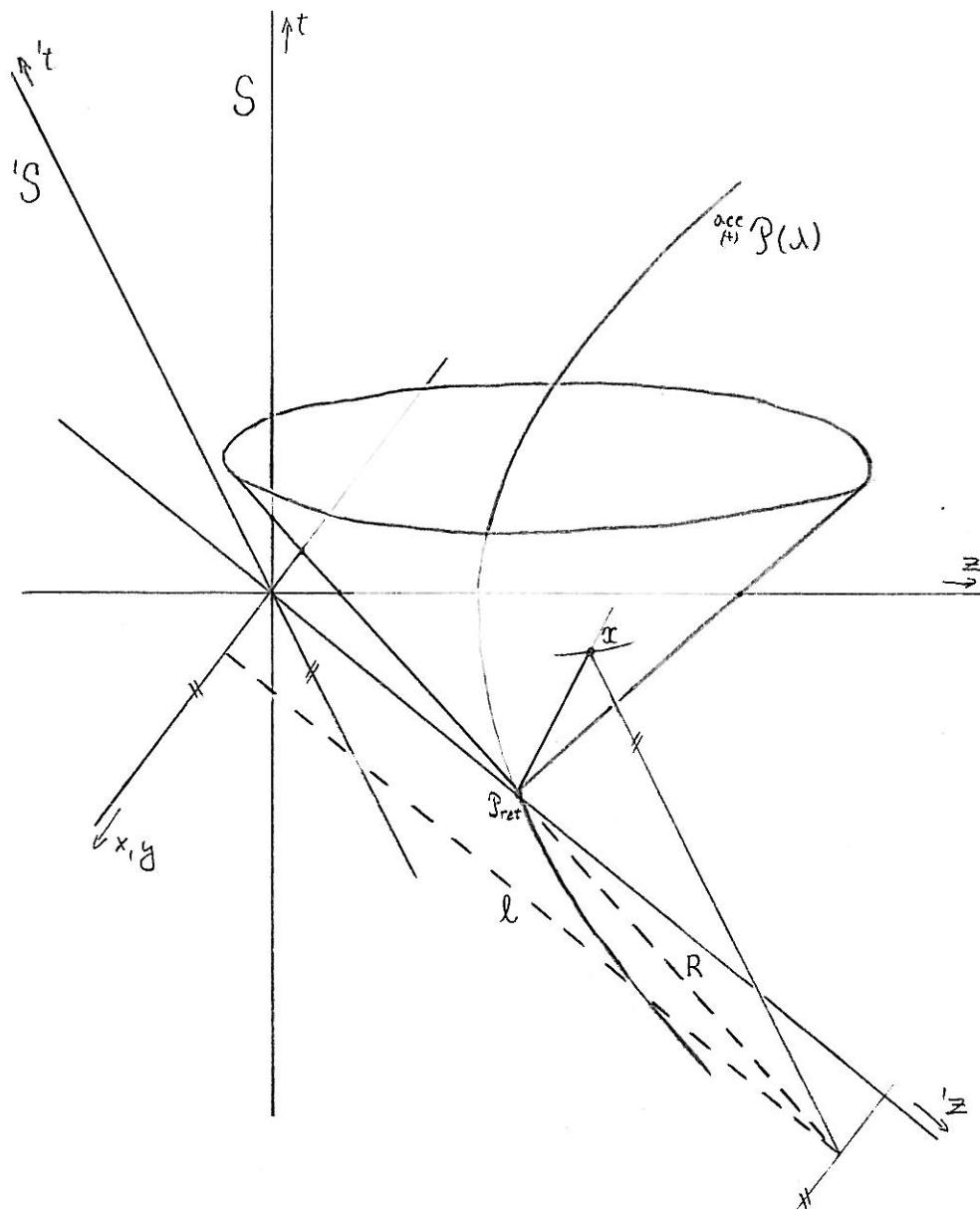
$$R = \frac{1}{2a} \frac{\tilde{z}}{a} = (l^2 - \tilde{z}^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\chi = \tilde{z}^2 + \rho^2 + a^2, \quad (3.2.14)$$

$$l = \frac{1}{2a} \chi.$$

Poznamenejme, že R má význam retardované vzdálenosti události \mathcal{L} od světočáry $\overset{ac}{P}_s$ v soustavě, v které je v retardovaném vlastním čase částice v klidu. Obdobně l má význam souřadnice \tilde{z} události \mathcal{X} v téže soustavě (viz. obr. 3.3).

Pokud toto pole analyticky prodloužíme do celého prostoru času, dostaneme řešení (označme ho ${}^{ac}\phi$) vlnové rovnice s analyticky prodlouženým zdrojem $\overset{ac}{J}_s$ (prodloužení označme ${}^{ac}\overset{ac}{J}_s$). Analytické rovnice světočáry urychlěné částice jsou



obr. 3.3

Událost P_{ret} je okamžik, kdy částice o světočáře $\overset{\text{acc}}{P}(x)$ ovlivňuje retardované pole v bodě x , tj. událost x leží na kuželu budoucnosti P_{ret} . Soustava ' S' je klidová soustava částice v okamžiku P_{ret} . R je prostorová vzdálenost událostí P_{ret} a x měřená v soustavě ' S' , ℓ je hodnota souřadnice ' z ' události x .

$$z^2 - t^2 = a^2, \quad x=0, \quad y=0. \quad (3.2.15)$$

Z těchto rovnic vidíme, že analytickým prodloužením světočáry jedné urychlené částice dostaneme ještě světočáru druhé urychlené částice umístěné symetricky k původní, tj. světočáru $\overset{\text{aee}}{P(\omega)}$ (obr. 3.2). Díky tomuto analytické prodloužení zdroje $\overset{\text{aee}}{J_s}$ je

$$\overset{\text{aee}}{J_s} = \int d\lambda \mu \delta(x \overset{\text{aee}}{P(\lambda)}) + \int d\lambda \mu \delta(x \overset{\text{aee}}{P(\lambda)}). \quad (3.2.16)$$

Jak jsme již řekli pole $\overset{\text{aee}}{\phi}$ je řešení vlnové rovnice právě s tímto zdrojem. Uvidíme, že ho můžeme interpretovat jako kombinaci retardovaného pole od jedné částice a advancovaného pole od částice druhé.

Nás ale především zajímá retardované pole od jedné urychlené částice. V oblasti $u > 0$ ho získáme analytickým prodloužením řešení (3.2.12) získaným v oblasti $G_u = G_\nu = 1$. V oblasti $u < 0$ však musí být retardované pole částice lokalizované v poloprostoru $u > 0$ nulové, a tak kandidát na hledané retardované pole je

$$\overset{\text{ret}}{\phi} = -\frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{R} \Theta(u) = \overset{\text{aee}}{\phi} \Theta(u), \quad (3.2.17)$$

Zatím ale nevíme, zda toto pole je řešením rovnice (2.2.1) i na hranici analytičnosti $u=0$. To můžeme ověřit přímým dosazením

$$\begin{aligned} \square \overset{\text{ret}}{\phi} &= \bar{g}^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \left(-\frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{R} \Theta(u) \right) = \\ &= \bar{g}^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \left(\nabla_\beta \left(-\frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{R} \right) \Theta(u) + \left(-\frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{R} \right) \delta(u) \partial_\beta u \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \square \left(-\frac{M}{4\pi} \frac{1}{R} \right) \Theta(u) + 2 \bar{\tilde{g}}^{ab} d_a \left(-\frac{M}{4\pi} \frac{1}{R} \right) d_b u \delta(u) = \\
 &= \mu \delta(\tilde{z}-a) \Theta(u) - \frac{4M}{4\pi} \left(\frac{1}{R} \right)_{,u} \Big|_{u=0} \delta(u) = \\
 &= \mu \delta(\tilde{z}-a) \Theta(u) - \frac{4M}{4\pi} \left(-\frac{1}{R^2} R_{,z} \frac{u}{2\tilde{z}} \right) \Big|_{u=0} \delta(u) . \quad (3.2.18)
 \end{aligned}$$

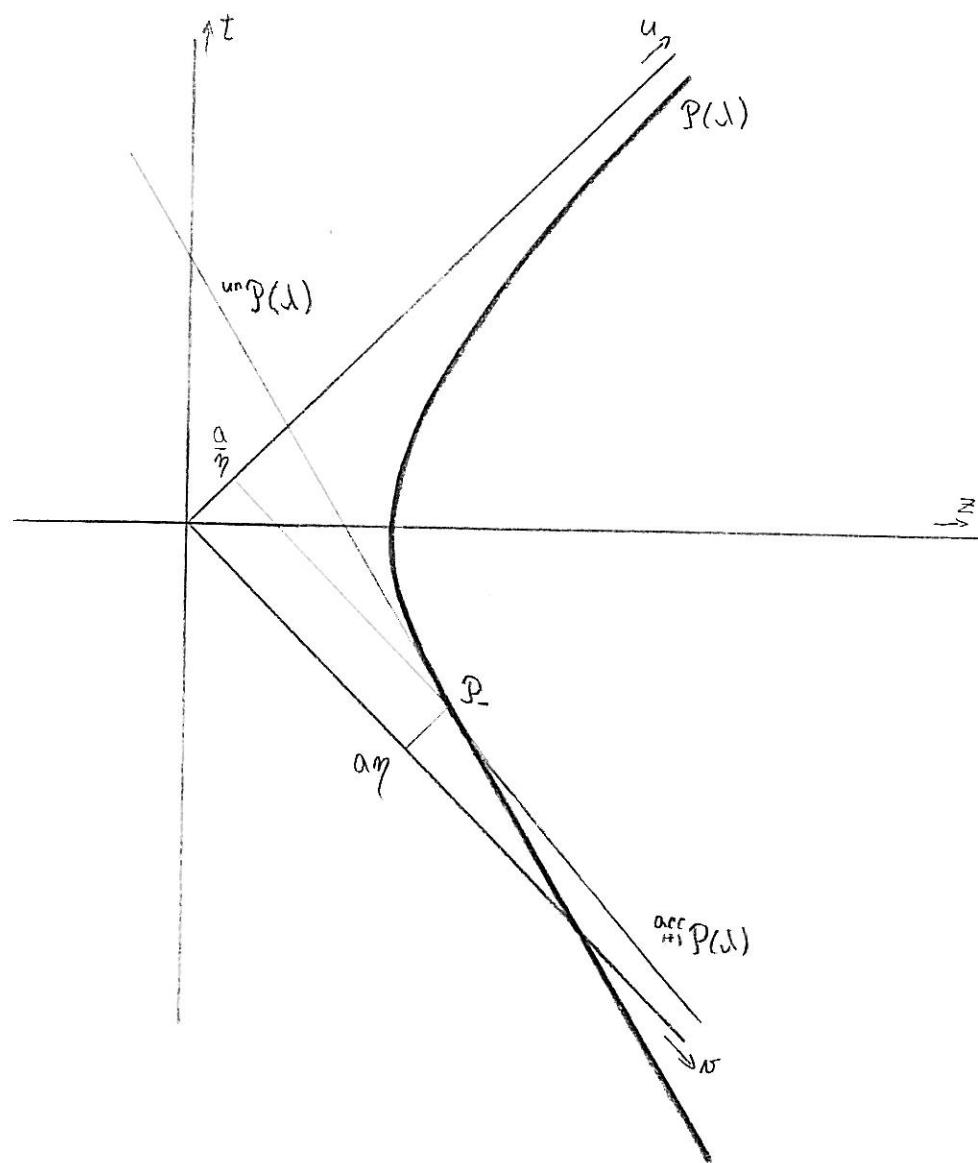
Pomocí třetího ze vztahů (3.C.5) vidíme, že druhý člen je nulový a dostáváme

$$\square^{\text{ret}} \phi = \frac{\mu}{4\pi} J_5 . \quad (3.2.19)$$

Pole (3.2.17) tedy je hledaným retardovaným polem jedné urychlené částice. Ze symetrie lehce obdržíme advancované pole symetricky umístěné částice (viz. (3.2.15)) a kombinací těchto dvou polí dostaneme " ϕ ".

Pro ilustraci použijeme ještějiného, fyzikálně realistického postupu, kterým ověříme, že pole (3.2.17) je skutečně řešením vlnové rovnice. Pro skalární pole je tento postup zbytečně těžkopádný, pro elektromagnetické pole a linearizovanou gravitaci již ale bude nezbytný. Vyjdeme z fyzikálně rozumného argumentu, že částice se nemůže pohybovat, realisticky vzato, urychleně neustále; kdysi v minulosti musel její urychlený pohyb začít. Pro jednoduchost předpokládejme, že před tím se částice pohybovala rovnoměrně (obr. 3.4). Pokud nalezneme pole takto se pohybující částice a poté oddálíme okamžik počátku urychlování do "daleké minulosti" ⁴), obdržíme hledané pole.

⁴) Přesně řečeno počátek urychlování částice oddalujeme do světelného nekonečna v minulosti. Pro nás je ale nyní důležité pouze to, že se tento okamžik oddálí z konečné oblasti. Tato poznámka se týká všech obdobných situací v této kapitole



obr. 3.4

V obrázku je vyznačena světočára $\overset{acc}{\sim} P(\lambda)$ rovnoměrně urychlené částice a světočára $''P(\lambda)$ rovnoměrně přímočaře se pohybující částice procházející událostí P_- tečně k světočáře urychlené částice. Jejich kombinací získáme světočáru částice, která se pohybuje rovnoměrně až do okamžiku P_- a poté se začne urychlovat - vytažena silně. Souřadnice události P_- jsou $u_- = \alpha/\gamma$, $v_- = \alpha\gamma$.

Uvažujme nejdříve stojící skalární částici s nábojem μ v bodě $x=0, y=0, z=a$. Její tok je dán

$${}^{un}J_s = \mu \int d\lambda \delta({}^n P(\lambda) | x) = \mu \delta(x) \delta(y) \delta(z-a) \quad (3.2.20)$$

a pole

$$\begin{aligned} {}^{un}\phi &= \int \mathcal{E}^z(x') {}^{un}J_s(x') G_{ret}(x/x') = \\ &= -\frac{\mu}{4\pi} \int dt' \delta(t-t') \delta(-(t-t')^2 + n^2) = -\frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{n} \quad , \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

kde

$$n = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2} = \sqrt{y^2 + (z-a)^2} \quad . \quad (3.2.22)$$

Skalární tok částice, která se do okamžiku P_- pohybuje rovnoměrně a po něm urychleně je

$$J_s(x) = {}^{as}J_s(x) \theta(x/P_-) + {}^{un}J_s(x) \theta(P_-|x) \quad , \quad (3.2.23)$$

Zde ${}^{un}J_s$ je tok rovnoměrně pohybující se částice se světočárou procházející událostí P_- tečně k hyperbole urychleného pohybu (obr. 3.4). Tento tok dostaneme boostem toku ${}^{un}J_s$, což formálně provedeme záměnou

$$\begin{aligned} t \rightarrow 't &= \frac{1}{2} (\gamma u - \frac{1}{\gamma} n) = \\ &= t \cosh \frac{T_-}{a} - z \sinh \frac{T_-}{a} \quad , \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

$$\begin{aligned} z \rightarrow 'z &= \frac{1}{2} (\gamma u + \frac{1}{\gamma} n) = \\ &= z \cosh \frac{T_-}{a} - t \sinh \frac{T_-}{a} \quad , \end{aligned}$$

kde $\tau_- = -a \ln \gamma$, $\tilde{z}_- = a$ jsou souřadnice události P_- , γ je parametr charakterizující, kdy urychlení začalo. Ze vztahu $\tau_- = -a \ln \gamma$ vidíme, že při růstu γ se událost P_- oddaluje do minulosti. Dosadíme-li do (3.2.23) dostaneme

$$\mathbb{J}_s = \mu \delta(\tilde{z} - a) \delta(x) \delta(y) \Theta(x|P_-) + \mu \delta(z - a) \delta(x) \delta(y) \Theta(P_-|x) . \quad (3.2.25)$$

Retardované pole od tohoto zdroje dostaneme kombinací polí $\overset{\text{acc}}{\phi}$ a $\overset{\text{un}}{\phi}$

$$\begin{aligned} \overset{\text{acc}}{\phi}(x) &= \overset{\text{acc}}{\phi}(x) \Theta(x|P_-) + \overset{\text{un}}{\phi}(x) \Theta(P_-|x) = \\ &= -\frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{R} \Theta(x|P_-) - \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{R} \Theta(P_-|x) . \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

Nyní provedeme limitu $\gamma \rightarrow \infty$, tj. oddálíme do daleké minulosti začátek urychlování. V této limitě povrch světelného kužele budoucnosti události P_- přechází na plochu $u = 0$ (viz. (3.B.14)), tedy

$$\overset{\text{acc}}{\phi}(x) \Theta(x|P_-) \rightarrow \overset{\text{acc}}{\phi}(x) \Theta(u) . \quad (3.2.27)$$

Využitím (3.D.13) dostaneme

$$\frac{1}{R} = O\left[\frac{1}{\gamma}\right] , \quad (3.2.28)$$

z čehož

$$\overset{\text{un}}{\phi}(x) \Theta(P_-|x) \rightarrow 0 . \quad (3.2.29)$$

Tím jsme opět ukázali, že retardované pole odpovídající zdroji $\overset{\text{acc}}{\mathbb{J}_s}$ je dané (3.2.17).

Díky symetrii úlohy snadno vytvoříme advancované pole částice se světočárou $\gamma^\mu P$. Jeho tvar bude

$$\overset{\text{adv}}{\phi} = \overset{\text{acc}}{\phi} \Theta(-\omega) . \quad (3.2.30)$$

Vidíme, že kombinací tohoto pole s $\overset{\text{terf}}{\phi}$ dostaneme právě pole $\overset{\text{acc}}{\phi}$.

3.3. Elektromagnetické pole

V tomto odstavci budeme hledat retardované pole elektricky nabité rovnoměrně urychlené částice v plochém prostoručase. Elektrický tok takovéto částice je

$$\overset{(3.3.1)}{\text{def}} J_E^z = e \int d\lambda \overset{(3.3.1)}{U^z(\lambda)} \delta(\overset{(3.3.1)}{P}(\lambda) | x) ,$$

kde e je elektrický náboj a $\overset{(3.3.1)}{U}(\lambda)$ 4-rychlosť částice. Obdobne jako pro skalárni pole dostaneme ⁵⁾

$$\overset{(3.3.2)}{\text{def}} J_E^z = e \overset{(3.3.2)}{U^z} \delta(z-a) \delta(x) \delta(y) .$$

Ukážeme, že tok daný výrazem (3.3.1) s libovolnou světočárou, která má spojitou 4-rychlosť, se zachovává, tj. splňuje podmínu (2.2.6). Pro libovolnou testovací funkci $\varphi(x)$ máme

$$\begin{aligned} & \int g^z(x') \varphi(x) \nabla_z \int d\lambda u^z(\lambda) \delta(P(\lambda) | x) = \\ &= - \int g^z(x) (\nabla_z \varphi)(x) \int d\lambda u^z(\lambda) \delta(P(\lambda) | x) = \\ &= - \int d\lambda u^z(\lambda) (\nabla_z \varphi)(P(\lambda)) = \\ &= [\varphi(P(\lambda))]_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} = 0 , \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

což jsme chtěli ukázat.

⁵⁾ Zde je $\overset{(3.3.1)}{U^z}$ libovolné prodloužení 4-rychlosti do vektorového pole na okolí světočáry částice, např. $\frac{\partial}{\partial t}$.

Jelikož se tok (3.3.1) zachovává, můžeme naložit kalibrační podmínu (2.2.7) a řešit vektorovou vlnovou rovnici (2.2.8). Její retardovaná Greenova funkce v plochém prostoru je dána

$$G_{ret}^{\hat{e}}(x(x')) = U_{\hat{e}}^{\hat{e}}(x(x')) G_{ret}(x(x')) \quad (3.3.4)$$

Zde $U_{\hat{e}}^{\hat{e}}(x(x'))$ je operátor paralelního přenosu z x do x' . Retardované elektromagnetické pole od zdroje (3.3.1) je

$${}^{ret}A^{\hat{e}}(x) = - \int_S \hat{g}_{\hat{e}}(x') \hat{J}^{\hat{e}}(x') G_{ret}^{\hat{e}}(x|x') \quad (3.3.5)$$

V oblasti $G_e = G_N = 1$ vypočteme

$$\begin{aligned} {}^{ret}A^{\hat{e}}(x) &= \frac{e}{2\pi} \left\{ \frac{z'}{a} d\tau' dz' dx' dy' U_{\hat{e}}^{\hat{e}}(x') U_{\hat{e}}^{\hat{e}}(x') \Theta(x|x') \delta((x-x')^2) \right. \\ &= \frac{e}{2\pi} \int d\tau' \left(\operatorname{ch} \frac{\tau'}{a} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \operatorname{sh} \frac{\tau'}{a} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Theta(\tau-\tau') \delta(\rho^2 + z^2 + a^2 - 2az \operatorname{ch} \frac{\tau-\tau'}{a}) = \\ &= \frac{e}{4\pi} \frac{1}{2 \operatorname{sh} \frac{\tau-\tau'}{a}} \left. \left(\operatorname{ch} \frac{\tau'}{a} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \operatorname{sh} \frac{\tau'}{a} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right|_{\operatorname{ch} \frac{\tau-\tau'}{a} = \frac{l}{z}, \tau = \tau'} = \\ &= \frac{e}{4\pi} \frac{1}{2 \operatorname{sh} \frac{\tau-\tau'}{a}} \left(\operatorname{ch} \frac{\tau-\tau'}{a} \operatorname{ch} \frac{\tau}{a} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \operatorname{sh} \frac{\tau-\tau'}{a} \operatorname{sh} \frac{\tau}{a} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{ch} \frac{\tau-\tau'}{a} \operatorname{sh} \frac{\tau}{a} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \operatorname{sh} \frac{\tau-\tau'}{a} \operatorname{ch} \frac{\tau}{a} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Big|_{\operatorname{ch} \frac{\tau-\tau'}{a} = \frac{l}{z}, \tau = \tau'} = \\ &= \frac{e}{4\pi} \left(\frac{a}{z^2} \frac{l}{R} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Analytické rozšíření do celého prostoročasu nazveme ${}^{ac}A_{\hat{e}}$, tj.

$$\begin{aligned} {}^{ac}A_{\hat{e}} &= - \frac{e}{4\pi} \left(\frac{1}{a} \frac{l}{R} d_z \tau + \frac{1}{z} d_z z \right) = \\ &= - \frac{e}{4\pi} \frac{1}{z^2 + \tau^2} \left(\frac{X_Z - f_t}{f} d_z t + \frac{f_z - X_t}{f} d_z z \right) = \\ &= - \frac{e}{4\pi} \frac{1}{R} \left(\frac{R+l}{2N} d_z U + \frac{R-l}{2N} d_z N \right) \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Stejnou úvahou jako v případě skalárního pole (viz. (3.2.17)) získáme kandidáta na hledané pole od zdroje

$${}^{ret}A_{\pm} = {}^{acc}A_{\pm} \Theta(u) \quad . \quad (3.3.8)$$

Musíme ještě ověřit, zda je vlnová rovnice splněna i na nadploše $u=0$. Intenzita pole ${}^{ret}F$ je

$$\begin{aligned} {}^{ret}F &= d({}^{acc}A \Theta(u)) = \\ &= -\frac{\rho}{4\pi} \left[\left(d \frac{\chi}{\xi} \wedge \frac{du}{2u} - d \frac{\chi}{\xi} \wedge \frac{dv}{2v} \right) \Theta(u) + du \wedge {}^{acc}A \delta(u) \right] = \\ &= -\frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{uN - \alpha^2 - \rho^2}{2\alpha R^2} du \wedge dv + \frac{\rho N}{2\alpha R^2} du \wedge dg - \frac{\rho u}{2\alpha R^2} dv \wedge dg \right) \Theta(u) \quad . \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Analytické prodloužení této intenzity z oblasti $u>0, v>0$ do celého prostoručasu nazveme ${}^{acc}F$.

$$\begin{aligned} {}^{acc}F &= \left(-\frac{\rho}{4\pi} \right) \left(\frac{uN - \alpha^2 - \rho^2}{2\alpha R^2} du \wedge dv + \frac{\rho N}{2\alpha R^2} du \wedge dg - \frac{\rho u}{2\alpha R^2} dv \wedge dg \right) = \\ &= \left(-\frac{\rho}{4\pi} \right) \left(\frac{z^2 - t^2 - \alpha^2 - \rho^2}{2\alpha R^2} dt \wedge dz + \frac{\rho z}{\alpha R^2} dt \wedge dg + \frac{\rho t}{\alpha R^2} dz \wedge dg \right) \quad . \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Zatím netvrdíme, že platí ${}^{acc}F = d{}^{acc}A$. Nakonec však ověříme, že tomu tak skutečně je. Můžeme psát

$${}^{ret}F = {}^{acc}F \Theta(u) \quad (3.3.11)$$

Rovnice pole dává

$$\begin{aligned} \nabla^e {}^{ret}F_{\pm} &= \left(-\frac{\rho}{4\pi} \right) \nabla^e \left(\frac{uN - \alpha^2 - \rho^2}{2\alpha R^2} dt \wedge dz + \frac{\rho z}{\alpha R^2} dt \wedge dg + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho t}{\alpha R^2} dz \wedge dg \right) + \left(-\frac{\rho}{4\pi} \right) 2 \left(\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \rho^2} \right)^2 du \delta(u) \quad . \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

První člen dá tok \hat{J} (" A je řešením (2.2.9) v oblasti $u > 0$), zbývá nám však ještě druhý, nenulový člen. Pole " A " tedy nesplňuje pohybovou rovnici na nadploše $u=0$. Budeme muset přidat nějaký "povrchový" člen lokalizovaný na $u=0$, který vykompenzuje druhý člen v (3.3.12).

Navíc potenciál \hat{A} (3.3.8) není v distribučním smyslu dobře definován. Vyskytuje se v něm člen, který se pro malé chová jako

$$\frac{1}{u} \Theta(u) \quad (3.3.13)$$

což není distribuce (integrál $\int_0^\infty \frac{1}{u} du$ diverguje). Tato nesnáz se neprojevila jen díky tomu, že vypadl výraz

$$\frac{1}{u} d(\ln u \Theta(u)) = \frac{1}{u} \ln u \delta(u) = 0 \quad (3.3.14)$$

Jakákoli složitější závislost v Θ -funkci by vedla ke komplikacím.

Problémy budeme řešit následující regularizací. Využijeme toho, že pro konečné η je výraz

$$\frac{1}{u} \Theta(u - \frac{a}{\eta}) \quad (3.3.15)$$

dobře definovanou distribucí a s takovýmto výrazy umíme bez problémů pracovat. Položíme-li η nekonečně velké (větší než "naše schopnosti měření"), bude výraz (3.3.15) v podstatě shodný s (3.3.13), zároveň s ním však umíme neustále pracovat. Je přitom samozřejmé, že měřitelné veličiny musí být invariantní vůči změně nekonečného parametru regularizace η . Vidíme, že např. vypadnutí členu typu (3.3.14) zajistí invarianci intenzity vůči změně parametru η (podrobnosti regularizace viz.

dodatek 3.A).

Vratíme se však k hledání povrchového člena, který by měl vykompenzovat druhý člen v (3.3.12). Jeho tvar získáme použitím postupu, který jsme již ilustrovali pro skalární pole. Najdeme pole částice, která se do okamžiku \mathcal{P}_- pohybovala rovnoměrně a v okamžiku \mathcal{P}_- se začala urychlovat. Potom oddálíme \mathcal{P}_- do daleké minulosti (viz. poznámka 4) na str. 38). Tím dostaneme nejen hledaný povrchový člen, ale i zmíněnou regulizaci. Elektromagnetický tok částice se světočárou $\mathcal{P}(x)$ (viz. obr. 3.4) je

$$\mathbb{J}^e(x) = {}^{ee}\mathbb{J}^e(x)\Theta(x|\mathcal{P}_-) + {}^{un}\mathbb{J}^e(x)\Theta(\mathcal{P}_-|x) . \quad (3.3.16)$$

V (3.3.3) jsme ověřili, že se tento tok zachovává. Retardované pole je tedy dáno řešením vlnové rovnice (2.2.9) a můžeme ho přímo napsat

$$\mathbb{A}_e(x) = {}^{ee}\mathbb{A}_e(x)\Theta(x|\mathcal{P}_-) + {}^{un}\mathbb{A}_e(x)\Theta(\mathcal{P}_-|x) . \quad (3.3.17)$$

Coulombické pole částice stojící v bodě $x=y=0$, $z=a$ je

$${}^{un}\mathbb{A}_e = -\frac{\rho}{4\pi} \frac{1}{R} dl_z t , \quad {}^{un}\mathbb{F}_{ab} = -\frac{\rho}{4\pi} \frac{1}{R^2} d_a t \wedge dl_b R . \quad (3.3.18)$$

Pole ${}^{un}\mathbb{A}$ dostaneme boostem pole ${}^{un}\mathbb{A}$, tj. formálně záměnou (viz. (3.2.24))

$$\begin{aligned} u \rightarrow {}'u &= \gamma u , & t \rightarrow {}'t &= \frac{1}{\gamma} (\gamma u - \frac{1}{c} N) , \\ &\text{resp.} & & (3.3.19) \\ N \rightarrow {}'N &= \frac{1}{\gamma} N , & z \rightarrow {}'z &= \frac{1}{\gamma} (\gamma u + \frac{1}{c} N) . \end{aligned}$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} A = & \left(-\frac{e}{4\pi} \right) \frac{1}{R} \left(\frac{\gamma}{2} du - \frac{1}{2\gamma} dv \right) \Theta('n - 't) + \\ & + \left(-\frac{e}{4\pi} \right) \frac{1}{R} \left(\frac{R+l}{2u} du + \frac{R-l}{2v} dv \right) \Theta('t - 'n) . \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

Nyní položíme γ nekonečně velké (tj. uvažujeme limitu $\gamma \rightarrow \infty$, podržíme však formální závislost konečných členů na γ pro potřeby regularizace). V dodatku 3.D je odvozeno (viz. (3.D.13))

$$\frac{\gamma}{R} \Theta('n - 't) = \frac{1}{|u|} \Theta(-\frac{a}{\gamma} - u) + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] . \quad (3.3.21)$$

Vyřešíme-li rovnici ' $t - 'n = 0$ ' vzhledem k u dostaneme pro $u|_*$, kde $f|_*$ značí f vyčíslené na nadploše ' $t - 'n = 0$ ', (viz. (3.B.23))

$$u|_* = \frac{a^2 + \xi^2}{a\gamma} + O\left[\frac{1}{\gamma^2}\right] . \quad (3.3.22)$$

Výraz

$$\frac{1}{R} \left(\frac{R+l}{2u} \right) \Theta('t - 'n) \quad (3.3.23)$$

pro $\gamma \gg 1$ v okolí $u=0$ má chování (viz. (3.B.6))

$$\frac{1}{u} \Theta(u - u|_*) \quad (3.3.24)$$

Jak jsme již řekli, takovéto výrazy vedou ke komplikacím v důsledku závislosti argumentu Θ -funkce na souřadnicích γ, η . Provedeme tedy následující regularizaci

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \left(\frac{R+l}{2u} \right) \Theta('t - 'n) = & \frac{1}{R} \left(\frac{R+l}{2u} \right) \Theta(u - \frac{a}{\gamma}) - \\ & - \frac{1}{R} \left(\frac{R+l}{2u} \right) \Theta(u - \frac{a}{\gamma}) \Theta(u|_* - u) . \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

Ukážeme

$$\frac{1}{R} \left(\frac{R+l}{2u} \right) \Theta(u - \frac{a}{\gamma}) \Theta(u l_* - u) = \ln \frac{\alpha^2 + \rho^2}{\alpha^2} \delta(u) + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] \quad (3.3.26)$$

Pro libovolnou testovací funkci $\varphi(u)$ máme

$$\begin{aligned} \int du \frac{1}{R} \left(\frac{R+l}{2u} \right) \Theta(u - \frac{a}{\gamma}) \Theta(u l_* - u) \varphi(u) &= \\ &= \int_{\frac{a}{\gamma}}^u du \left(\frac{1}{u} \varphi(0) + O[u^0] \right) = \left[(\varphi(0) \ln u + O[u]) \right]_{u=\frac{a}{\gamma}}^{u=u l_*} = \\ &= \varphi(0) \ln \frac{\alpha^2 + \rho^2}{\alpha^2} + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

c.b.d..

Dále pro $\gamma \gg 1$ platí (viz. (3.D.13), (3.B.2), (3.B.3))

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{1}{\gamma} \Theta(u l_* - u) &= O\left[\frac{1}{\gamma}\right], \\ \frac{R-l}{2u R} \Theta(u - u l_*) &= O\left[\frac{1}{\gamma}\right] \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

Konečně spojením (3.3.21), (3.3.25), (3.3.26) a (3.3.28) dostaneme

$$\begin{aligned} {}^{\text{ret}} A &= \left(-\frac{\rho}{4\pi} \right) \left[\frac{1}{l_* u} \Theta(-\frac{a}{\gamma} - u) du + \right. \\ &\quad + \left(\frac{1}{R} \left(\frac{R+l}{2u} \right) du + \frac{1}{R} \left(\frac{R-l}{2u} \right) dw \right) \Theta(u - \frac{a}{\gamma}) - \\ &\quad \left. - \ln \frac{\alpha^2 + \rho^2}{\alpha^2} \delta(u) du \right] + O\left[\frac{1}{\gamma}\right]. \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

První člen je typu $\int du$ a je kalibračně triviální - lze ho odstranit kalibrační transformací. Druhý člen je regularizované pole $A\theta(u)$. Tento člen není ale invariantní vzhledem k změně regularizačního parametru γ . Z diskuse v dodatku 3.A víme, že invarianti do řádu $O[\gamma^0]$ lze zajistit přidáním kalibračně tri-

viálního členu (viz. (3.A.26))

$$\left(-\frac{\rho}{4\pi}\right) \left(-\ln \gamma \delta(u)\right) du \quad (3.3.30)$$

Třetí člen v (3.3.29) je hledaný povrchový člen zaručující splnění pohybových rovnic i na ploše $u=0$. Po vynechání kalibračně triviální části a případném potlačení explicitního zápisu regularizace dostáváme retardované elektromagnetické pole urychléné nabité částice

$$\begin{aligned} {}^{\text{ret}}A &= \left(-\frac{\rho}{4\pi}\right) \left(\left(\frac{1}{R} \left(\frac{R+\ell}{2u}\right) du + \frac{1}{R} \left(\frac{R-\ell}{2u}\right) dv\right) \Theta(u - \frac{\alpha}{\beta}) - \ln \gamma \delta(u) \right) - \\ &\quad - \left(-\frac{\rho}{4\pi}\right) \ln \frac{\alpha^2 + \ell^2}{\alpha^2} \delta(u) du = \\ &= [{}^{\text{acc}}A \Theta(u)]_{\text{reg}} - \left(-\frac{\rho}{4\pi}\right) \ln \frac{\alpha^2 + \ell^2}{\alpha^2} \delta(u) du . \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

Intenzita pole je

$${}^{\text{ret}}F = {}^{\text{acc}}F \Theta(u) + \left(-\frac{\rho}{4\pi}\right) \frac{\partial \zeta}{\alpha^2 + \ell^2} \delta(u) du d\varphi . \quad (3.3.32)$$

Tento výsledek je možno obdržet i přímo limitou intenzity (viz. [11]). Diskusi retardovaného elektromagnetického pole od jedné urychléné částice lze též nalézt v [8].

Stejně jako pro skalárni pole vidíme, že ${}^{\text{acc}}A$ resp. ${}^{\text{acc}}F$ je kombinací retardovaného potenciálu resp. intenzity od jedné urychléné částice a advancovaného potenciálu resp. intenzity symetricky umístěné druhé urychléné částice. (Povrchový člen se díky změně znaménka u u a N ruší.) Navíc platí

$${}^{\text{acc}}F = d {}^{\text{acc}}A \quad (3.3.33)$$

Chování \hat{A} v okolí $u=0$ jako $\frac{1}{u}$ není patologické. Distribuční smysl takovéto funkce je uveden v dodatku 3.A v poznámce ¹⁵⁾ na str. 92.

3.4. Gravitační pole v linearizované teorii

Urychlování částice pomocí struny

Jak jsme ukázali v 2.2 vede linearizovaná teorie gravitace na rovnici pole spinu 2. Budeme se proto nejdříve v krátkosti zabývat tímto polem. Zdroj příslušící urychlené částici je linearizovaný tenzor energie hybnosti; má tvar

$$\begin{aligned} {}^{\text{par}} T_{ab}(x) &= \int d\lambda \delta(\overset{\text{par}}{P}(\lambda)/x) U_a U_b m = \\ &= \delta(z-x) \delta(x) \delta(y) U_a U_b m . \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Greenova funkce vlnové rovnice je opět tvaru (3.3.4), pouze operátor $U(x|x')$ bude působit na oba tensorové indexy. Stejným výpočtem jako pro skalárni a vektorové pole dostaneme kandidáta na retardované pole spinu 2 od zdroje (3.4.1) ve tvaru

$$\begin{aligned} {}^{\text{par}} \vec{F}_{ab} &= \frac{2\pi em}{4\pi} \left[\frac{1}{R} \frac{\ell^2}{\alpha^2} d_\tau \tau d_z \tau + \frac{R}{z^2} d_\tau \tilde{z} d_b \tilde{z} + \frac{\ell}{z} d_\tau \tau v d_b \tilde{z} \right] \Theta(u) = \\ &= \frac{2\pi em}{4\pi} \frac{1}{z^2 - t^2} \frac{1}{R} \left[(\ell z - R t)^2 d_\tau \tau d_b \tilde{z} + \right. \\ &\quad \left. + (\ell z - R t)(R z - \ell t) d_\tau \tau v d_b \tilde{z} + (R z - \ell t)^2 d_\tau \tau d_b \tilde{z} \right] . \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Obdobně vektorovému poli není tento výraz dobře definovaný v okolí nadplochy $U=0$, divergence je dokonce ještě vyššího řádu - má tvar

$$\frac{1}{U^2} \Theta(u) \quad (3.4.3)$$

Nás však více než pole spinu 2 zajímá linearizovaná teorie gravitace. Díky kalibrační invarienci této teorie máme

podmínce (2.2.19) reprezentující zachování zdroje. Lehce ale ověřime, že

$$\begin{aligned}\nabla_a^{\text{par}} T^{ab} &= m \nabla_a (u^a u^b \delta(z-a) \delta(x) \delta(y) \Theta(u)) = \\ &= m \frac{\partial}{\partial t} \nabla_a \left(\frac{\partial^b}{\partial t^b} \right) \delta(z-a) \delta(x) \delta(y) \Theta(u) = \\ &= -m \frac{1}{a} \frac{\partial^b}{\partial z^b} \delta(z-a) \delta(x) \delta(y) \Theta(u) .\end{aligned}\quad (3.4.5)$$

Zdroj $\overset{\text{par}}{T}_{ab}$ se tedy nezachovává. Tento fakt je pochopitelný – částice se nemůže pohybovat urychleně sama o sobě bez vnějšího zásahu. Vidíme, že v linearizované teorii gravitace bude analogie k předchozím dvěma polím složitější. Budeme muset uvážit příčinu urychleného pohybu částice. To se projeví složitější strukturou zdroje. Nejjednodušší způsob urychlování částice je připevnit ji na strunu – jakousi pružinu s napětím nezávislým na délce prodloužení. Tenzor energie-hybnosti nekonečné struny lokalizované v prostoru podél osy z je

$$\overset{\text{str}}{T} = \bar{\sigma} (dt dt - dz dz) \delta(x) \delta(y) , \quad (3.4.6)$$

kde $\bar{\sigma}$ je klidová hustota hmoty pružiny a zároveň napětí ve směru osy z ⁶). Vezměme polonekonečnou strunu a na její konec upěvníme částici. Jelikož napětí ve struně je konstantní, bude se částice rovnoměrně urychlovat. Tenzor energie-hybnosti tohoto systému bude mít tvar

$$\bar{T} = \overset{\text{par}}{T} + \overset{\text{str}}{T} \Theta(z-a) \Theta(u) \quad (3.4.7)$$

Vztah mezi m a $\bar{\sigma}$ dostaneme ze zákona zachování celkového

⁶) Přehled problematiky týkající se kosmických strun je podán např. v [17], [18].

zdroje (3.4.7), ale i přímo z Newtonova zákona pro sílu

$$M \alpha = G \quad (3.4.8)$$

kde $\alpha = 1/a$ je zrychlení částice a G síla působení struny na částici. Tedy máme podmítku

$$M = G \alpha \quad (3.4.9)$$

Vypočtěme nyní pole způsobené tímto rozložením hmoty. Díky linearitě pohybové rovnice nám stačí již pouze najít retardované řešení vlnové rovnice se zdrojem ${}^{st}T\Theta(\tilde{z}-a)\Theta(u)$ a poté ho sečíst s polem ${}^{pr}\vec{f}$, čímž dostaneme pole celého zdroje (3.4.7)².

$$\begin{aligned} {}^{st}\vec{f} &= \frac{2\pi e G}{4\pi} \int du' dv' dx' dy' \Theta(u'n' - a^2) \delta(x') \delta(y') \Theta(u') \cdot \\ &\quad \times \Theta(n' - n) \delta((u - u')(n - n') + q^2) (dt^2 - dz^2) = \\ &= \frac{2\pi e G}{4\pi} \int du' dv' \Theta(u'n' - a^2) \Theta(u') \frac{1}{n' - n} \delta(u - u' + \frac{q^2}{n' - n'}) (dt^2 - dz^2) = \\ &= \frac{2\pi e G}{4\pi} \int dv' \frac{1}{q} \Theta\left(u + \frac{q^2}{n' - n'}\right) n' - a^2 \Theta(n' - n) \frac{q}{n' - n} \Theta(u) (dt^2 - dz^2) = \\ &= \frac{2\pi e G}{4\pi} \left[\ln \frac{n' - n}{q} \right]_{n' = n_0}^{n' = \infty} \Theta(u) (dt^2 - dz^2) = \\ &= \frac{2\pi e G}{4\pi} \left(\ln \left(\frac{R + l}{2a} - \frac{ln R}{a^2} \right) - \ln \frac{R}{a^2} - \ln \frac{u}{a} + \ln \frac{n' - n}{q} \Big|_{n' = \infty} \right) \Theta(u) (dt^2 - dz^2). \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Vidíme, že pole struny diverguje. Je to způsobeno nekonečnou délkou struny a faktum, že neznáme žádné informace o chování

²) Poslední úprava bude podrobně provedena až ve výrazu (3.4.27).

struny v nekonečnu.

Vedle tohoto problému musíme řešit i problém špatného chování pole \vec{g} kolem $\alpha=0$. V případě elektromagnetismu jsme ho řešili tím, že jsme částici začali urychlovat až v jistém okamžiku T . To by však znamenalo, že až v tomto okamžiku připevníme k částici volný konec struny. Ale co bude se strunou do této doby? Struna s volným koncem není zdroj, jenž splňuje zákon zachování tenzoru energie-hybnosti – nemůže sama o sobě existovat.

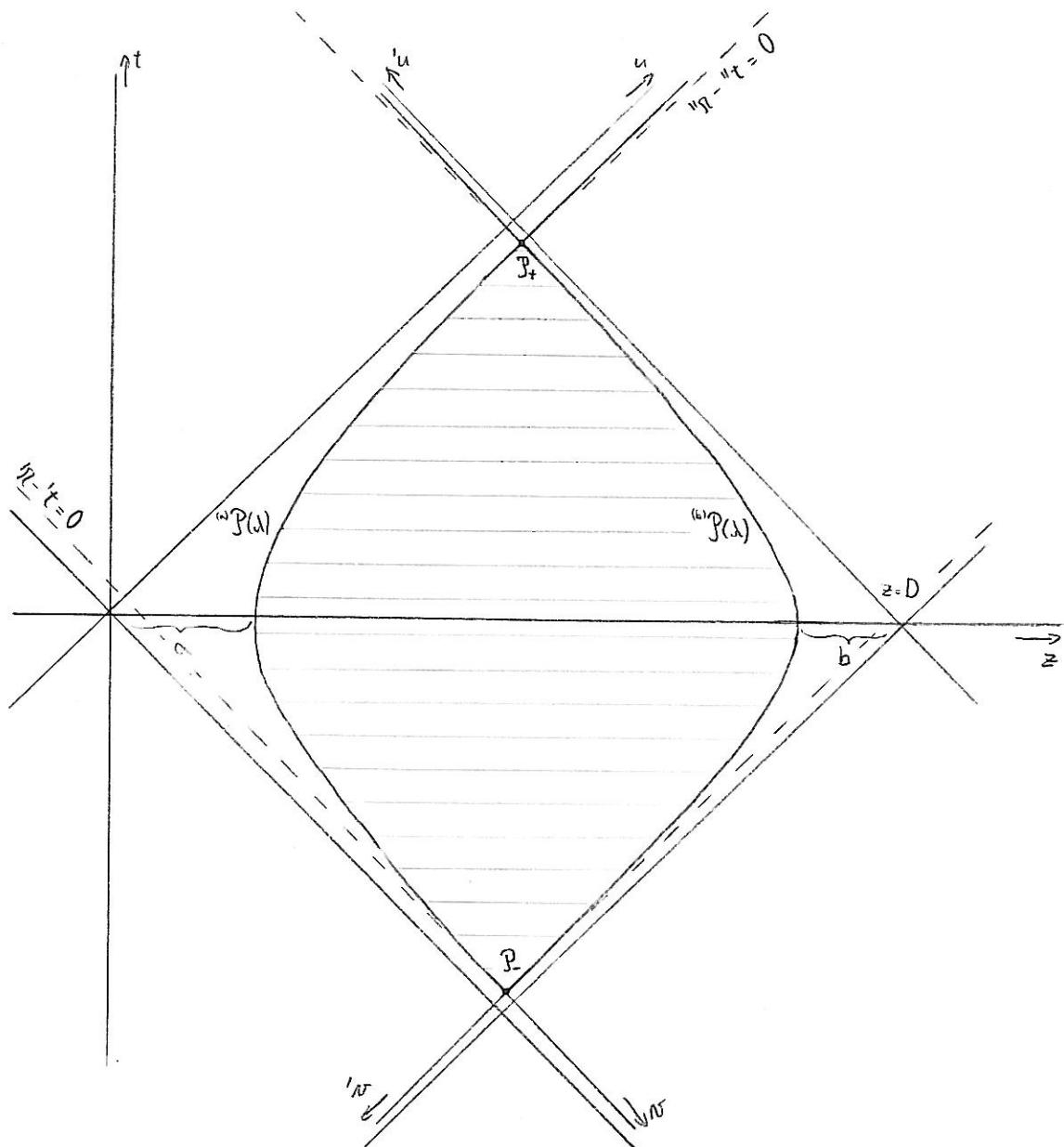
Systém dvou urychlených částic spojených strunou

Naštěstí můžeme oba problémy vyřešit zároveň. Řešením je systém znázorněný na obrázku 3.5. Jedná se o dvě částice o hmotnostech ${}^{(a)}m$ a ${}^{(b)}m$, které se pohybují proti sobě podél osy z , v okamžik T se setkají a propojí se strunou (v tento okamžik zatím nulové délky). Po prolétnutí kolem sebe se začnou brzdit vlivem struny, která se mezi nimi napíná, až se začnou přibližovat a v okamžik T se opět potkají. Struna se odpojí a obě částice se pohybují dále rovnoměrně přímočaře.

Vztahy mezi zrychleními ${}^{(a)}\alpha$, ${}^{(b)}\alpha$ a hmotnostmi obou částic a napětím struny G jsou

$$\begin{aligned} {}^{(a)}\alpha &= \frac{1}{a}, & {}^{(a)}m &= G a, \\ {}^{(b)}\alpha &= \frac{1}{b} = \frac{1}{b}, & {}^{(b)}m &= G b. \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

Definujme



obr. 3.5

Na obrázku je systém dvou částic o hmotnostech ${}^{(e)}m$ a ${}^{(b)}m$, které se pohybují proti sobě, podél osy z , v okamžik P_- se setkají a propojí se strunou (v tento okamžik zatím nulové délky). Po prolétnutí kolem sebe se začnou brzdit vlivem struny, která se mezi nimi napíná, až se začnou přibližovat a v okamžik P_+ se opět potkají. Struna se odpojí a obě částice se pohybují dále rovnoměrně přímočaře.

$$\begin{aligned} {}^{(a)}u &= D - u^- , \quad {}^{(a)}u = u^+ , \\ {}^{(b)}v &= D - v^- , \quad {}^{(b)}v = v^+ , \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

kde D je vzdálenost středu obou hyperbol urychlených pohybů, tj. $u, v = 0$ jsou asymptoty pro hyperbolu urychleného pohybu částice (a) a ${}^{(b)}u, {}^{(b)}v = 0$ částice (b) (obr. 3.5). Dále pro každou funkci f , kterou lze vyjádřit jako funkce u, v, x, y ,

$$f(x) = f(u(x), v(x), x(x), y(x)) \tag{3.4.13}$$

zavedeme

$$\begin{aligned} {}^{(a)}f(x) &= f(x) , \\ {}^{(b)}f(x) &= f({}^{(a)}u(x), {}^{(b)}v(x), x(x), y(x)) , \end{aligned} \tag{3.4.14}$$

přičemž, pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme index (a) vynochávat.

Tenzor energie-hybnosti popsaného systému můžeme zapsat

$$\begin{aligned} T &= {}^{(a)}T \Theta(x|P_-) \Theta(P_+|x) + {}^{(b)}T \Theta(x|P_-) \Theta(P_+|x) + \\ &+ {}^{str}T \Theta({}^{(a)}z - a) \Theta({}^{(b)}z - b) + \\ &+ \left({}^{(a)}T + {}^{(b)}T \right) \Theta(P_-|x) + \\ &+ \left({}^{(a)}T + {}^{(b)}T \right) \Theta(x|P_+) . \end{aligned} \tag{3.4.15}$$

Zde ${}^{(a)}T$ resp. ${}^{(b)}T$ dostaneme boostem zdroje odpovídajícího částici stojící v bodě $x = y = 0, z = a$.

$${}^{un}T = m dt dt \delta(z-a) \delta(x) \delta(y) \quad (3.4.16)$$

Boost provedeme záměrnou

$$\begin{aligned} {}^{(j)}U &\rightarrow {}^{(j)}U' = {}^{(j)}\eta {}^{(j)}U, \quad {}^{(j)}N \rightarrow {}^{(j)}N' = \frac{1}{{}^{(j)}\eta} {}^{(j)}N, \\ \text{resp. } {}^{(j)}U &\rightarrow {}^{(j)}U' = \frac{1}{{}^{(j)}\eta} {}^{(j)}U, \quad {}^{(j)}N \rightarrow {}^{(j)}N' = {}^{(j)}\eta {}^{(j)}N. \end{aligned} \quad j=a,b \quad (3.4.17)$$

(porovnej s (3.2.24)). Přímo z popisu systému víme, že se tento systém vyvíjí bez vnějšího zásahu a jeho tenzor energie-hybnosti se musí zachovávat. To lze i ověřit přímým výpočtem.

Souřadnice událostí β_-, β_+ jsou

$$\begin{aligned} {}^{(j)}U_- &= \frac{{}^{(j)}\alpha}{{}^{(j)}\eta}, \quad {}^{(j)}N_- = {}^{(j)}\eta {}^{(j)}\alpha, \\ {}^{(j)}U_+ &= {}^{(j)}\eta {}^{(j)}\alpha, \quad {}^{(j)}N_+ = \frac{1}{{}^{(j)}\eta} {}^{(j)}\alpha. \end{aligned} \quad j=a,b \quad (3.4.18)$$

Ze vztahů (3.4.12) a (3.4.18) dostaneme

$$\begin{aligned} D &= \alpha \left(\eta + \frac{1}{\eta} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\eta + \frac{1}{\eta} \right)^2 a^2 - a^2 + b^2} = \\ &= b \left(\eta + \frac{1}{\eta} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\eta + \frac{1}{\eta} \right)^2 b^2 - b^2 + a^2}, \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

$$\begin{aligned} {}^{(j)}\eta &= \frac{D}{b} \eta - \frac{a}{b\eta}, \\ \eta &= \frac{D}{a} {}^{(j)}\eta - \frac{b}{a} \frac{{}^{(j)}\eta}{\eta}. \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

Z těchto vztahů vidíme, že při $\eta \rightarrow \infty$ se událost β oddaluje do dávné minulosti, β_+ do daleké budoucnosti a vzdálenost D se zvětšuje. Rovnoměrný pohyb částice (a) se tedy odehrává v da-

leké minulosti či budoucnosti a částice (b) se oddálila do velkých vzdáleností stejně jako jeden konec struny. V konečné vzdálenosti tedy zůstává pouze urychlovaná částice (a) a polonekonečná struna, což je přesně zdroj, který nás zajímá. Pokud při limitě $\eta \rightarrow \infty$ ponecháme závislost na nekonečném η , získáme přímo již regularizované řešení s ošetřenými divergencemi.

Spočtěme nejdříve linearizovanou metriku odpovídající zdroji (3.4.15). Schwarzschildovské pole v linearizované teorii gravitaci je

$$\overset{un}{\delta} = \frac{2\pi m}{4\pi} \frac{1}{r} dt dt , \quad (3.4.21)$$

Řešení vlnové rovnice se zdrojem

$$\overset{str}{T}_{\alpha\beta} = \Theta(\tilde{z} - a) \Theta(\tilde{z} - b) \quad (3.4.22)$$

shodným výpočtem jako v (3.4.10) dostaneme ve tvaru

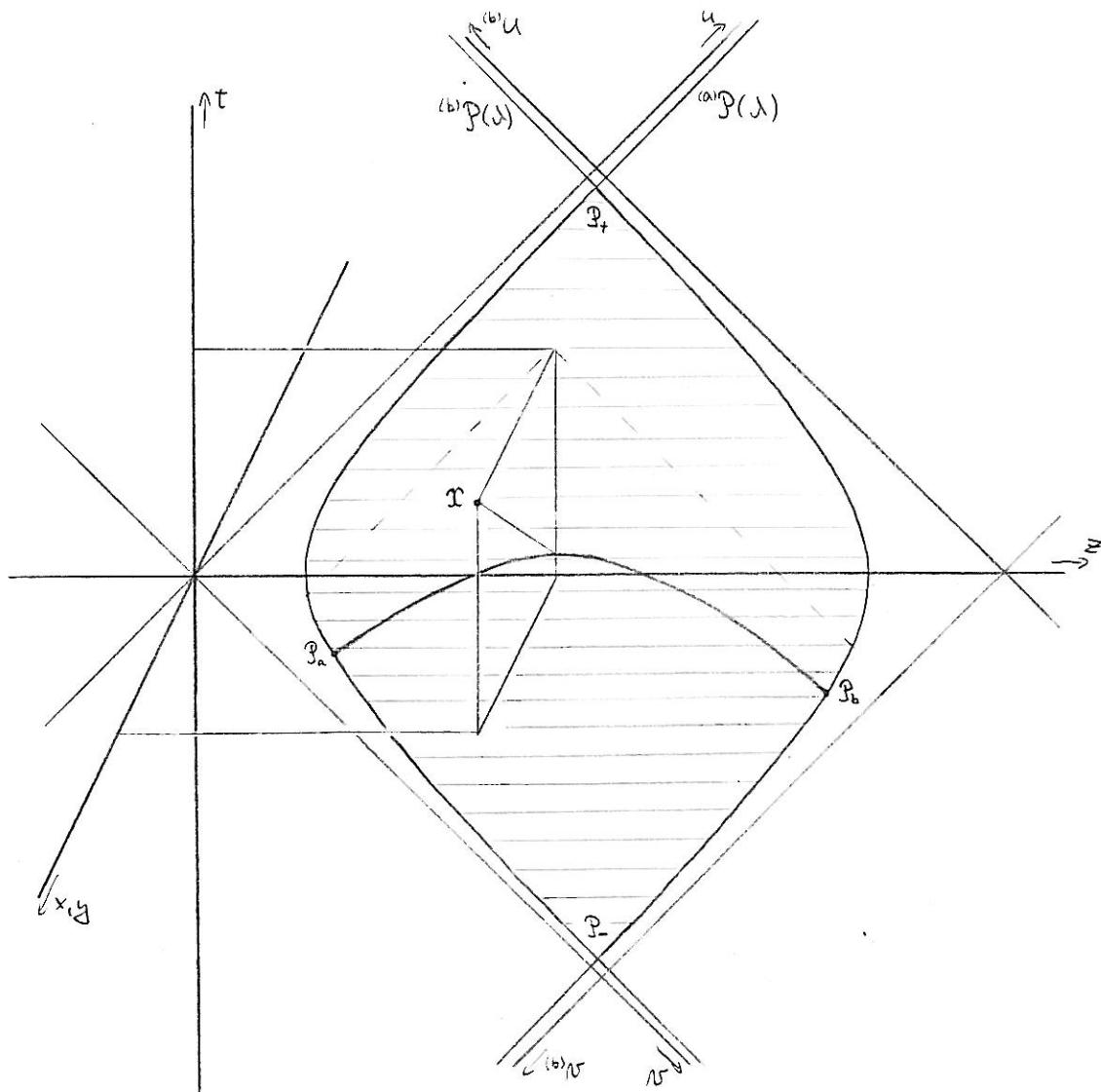
$$\overset{str}{\delta} = \frac{2\pi G}{4\pi} \left[\ln \frac{N' - N}{\rho} \right]_{N=N_a}^{N=N_b} (dt dt - dz dz) . \quad (3.4.23)$$

Zde N_a resp. N_b je řešením rovnic

$$\begin{aligned} \left(u + \frac{\rho^2}{N - N_a} \right) N_a - a^2 &= 0 , \\ \left(D - u + \frac{\rho^2}{(D - N) - (D - N_b)} \right) (D - N_b) - b^2 &= 0 . \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

Geometrická interpretace těchto vztahů je uvedena v obrázku 3.6. Vyřešením dostaneme

$$\begin{aligned} N_a &= \frac{\chi + \xi}{2u} , \\ N_b &= D - \frac{(\chi - \xi)}{2^{(u)} N} . \end{aligned} \quad (3.4.25)$$



obr. 3.6

Gravitační pole v bodě \mathbf{x} retardovaně ovlivňuje události ležící na světelném kuželu minulosti. Vliv struny na pole v \mathbf{x} je tedy dán integrálem příspěvků událostí ležících na hyperbole vyznačené na obrázku. Tento integrál vede na příspěvky od krajních bodů P_a , P_b . Jejich souřadnice jsou

$$U_a = \frac{\chi - \xi}{2N}, \quad {}^{(b)}U_b = \frac{(\chi - \xi)}{2{}^{(b)}N},$$

$$N_a = \frac{\chi + \xi}{2u}, \quad {}^{(b)}N_b = \frac{(\chi - \xi)}{2{}^{(b)}u}.$$

Platí

$$\frac{1}{\rho}(U_a - u) \frac{1}{\rho}(N_a - N) = -1, \quad \frac{1}{\rho}({}^{(b)}U_b - {}^{(b)}u) \frac{1}{\rho}({}^{(b)}N_b - {}^{(b)}N) = -1.$$

Zde u, N, ρ jsou souřadnice bodu x .

Platí identita

$$\frac{1}{\tilde{\mathcal{S}}} (N_b - N) - \frac{1}{\tilde{\mathcal{S}}} ({}^{(b)}N_b - {}^{(b)}N) = 1 . \quad (3.4.26)$$

Využitím (3.4.25) a (3.4.26) dostaneme

$$\begin{aligned} {}^{\text{str}}\tilde{\mathcal{S}} &= \frac{2\pi G}{4\pi} \left(\ln \frac{1}{\tilde{\mathcal{S}}} (N_b - N) + \ln \frac{1}{\tilde{\mathcal{S}}} ({}^{(b)}N_b - {}^{(b)}N) \right) (dt^2 - dz^2) \Theta(t - r) \Theta(r - t) = \\ &= \frac{2\pi G}{4\pi} \left(\ln \left(\frac{R+l}{a} - \frac{uv}{a^2} \right) - \ln \frac{u}{a} - \ln \frac{v}{a} + \ln \left(\frac{{}^{(b)}R+{}^{(b)}l}{b} - \frac{{}^{(b)}u{}^{(b)}v}{b^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \ln \frac{u}{b} - \ln \frac{{}^{(b)}u}{b} \right) (dt^2 - dz^2) \Theta(t - r) \Theta(r - t) . \end{aligned} \quad (3.4.27)$$

Vidíme, že pole struny se nám separovalo na dva výrazy shodného tvaru příslušející k jednotlivým částicím. Člen příslušející jedné částici můžeme identifikovat i ve výrazu (3.4.10). Označme $\tilde{\mathcal{S}}^a$ součet $\tilde{\mathcal{S}}$ a členu z $\tilde{\mathcal{S}}^a$ příslušející částici (a) analyticky rozšířený do celého prostoročasu; tj. pro částici (a)

$$\begin{aligned} {}^{\text{str}}\tilde{\mathcal{S}}^a &= La \left(\frac{1}{R} \frac{l^2}{a^2} dt^2 + \sum \frac{R}{z} dz dz + \frac{l}{z} dt v dz \right) + \\ &+ L \left(\ln \left(\frac{R+l}{a} - \frac{uv}{a^2} \right) - \ln \frac{u}{a} - \ln \frac{v}{a} \right) (dt^2 - dz^2) , \end{aligned} \quad (3.4.28)$$

Zde jsme zavedli zkrácené označení

$$L = \frac{2\pi G}{4\pi} = \frac{2\pi m}{4\pi} \frac{1}{a} . \quad (3.4.29)$$

Použitím (2.2.16) a označení

$${}^{(b)}g_{ab} = d_a X d_b X + d_a y d_b y \quad (3.4.30)$$

dostaneme

$$\begin{aligned}
 {}^{(a)} h &= L \left[\frac{\alpha}{R} \left(\frac{R^2 + l^2}{2\alpha^2} \right) d\tau^2 + \frac{\alpha}{R} \left(\frac{R^2 + l^2}{2\tilde{z}^2} \right) d\tilde{z}^2 + \frac{\partial R}{\tilde{z}^2} d\tau v d\tilde{z} + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\alpha}{2R} - \ln \left(\frac{R+l}{\alpha} - \frac{uv}{\alpha^2} \right) + \ln \frac{v}{\alpha} + \ln \frac{u}{\alpha} \right) {}^{(a)} g \right] = \\
 &= L \left[\frac{\alpha}{R} \left(\frac{R^2 + l^2}{2u^2} \right) du^2 + \frac{\alpha}{R} \left(\frac{R^2 + l^2}{2v^2} \right) dv^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\alpha}{2R} - \ln \left(\frac{R+l}{\alpha} - \frac{uv}{\alpha^2} \right) + \ln \frac{v}{\alpha} + \ln \frac{u}{\alpha} \right) {}^{(a)} g \right], \tag{3.4.31}
 \end{aligned}$$

$${}^{(u)} h = L \left[\frac{1}{2} \frac{\alpha}{R} \left(\frac{1}{2} du^2 + \frac{1}{2} dv^2 + {}^{(a)} g \right) \right]. \tag{3.4.32}$$

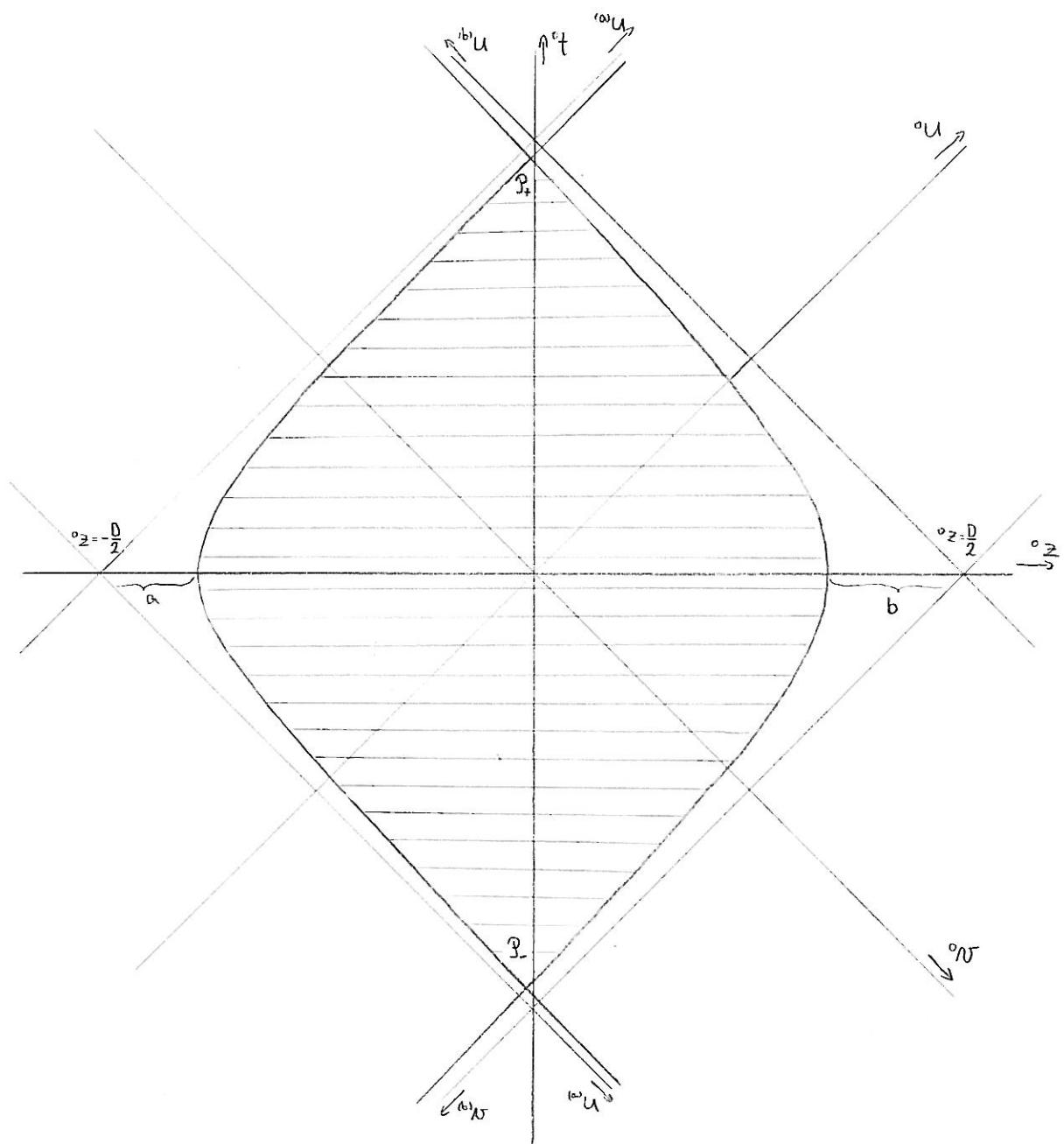
Obdobně pro částici (b). Pro linearizovanou metriku příslušející zdroji (3.4.15) máme

$$\begin{aligned}
 h &= {}^{(a)} h \Theta(x|P_-) \Theta(P_+|x) + {}^{(b)} h \Theta(x|P_-) \Theta(P_+|x) + \\
 &\quad + {}^{(b)} h \Theta(P_-|x) + {}^{(a)} h \Theta(P_+|x) + \\
 &\quad + {}^{(b)} h \Theta(x|P_+) + {}^{(a)} h \Theta(x|P_+). \tag{3.4.33}
 \end{aligned}$$

Pole nekonečné struny

Nyní uděláme malou odbočku. Ověříme, zda námi používaným postupem lze najít metriku nekonečné přímé struny. Tomu v našem modelu odpovídá oddalení obou částic (a) i (b) do nekonečna. Zavedeme-li (obr. 3.7)

$$\begin{aligned}
 {}^{(a)} u &= {}^{(a)} u - \frac{D}{2}, & {}^{(a)} u &= \frac{D}{2} - {}^{(b)} u, \\
 &\text{resp.} && \\
 {}^{(b)} u^- &= {}^{(a)} u^- - \frac{D}{2}, & {}^{(a)} u^- &= \frac{D}{2} - {}^{(b)} u^-.
 \end{aligned} \tag{3.4.34}$$



obr. 3.7

Nekonečnou strunu získáme oddálením obou konců struny do nekonečna. Proto je výhodné užít souřadnice 0u , 0N nevázané s koncem struny.

tak nekonečnou strunu dostaneme v oblasti konečného ${}^{(0)}u, {}^{(0)}v$ při nekonečně velkém D . Potom ${}^{(0)}z^1$ i ${}^{(0)}z^2$ jsou velké a můžeme psát

$$\ell = \frac{{}^{(0)}z^2}{2a} \left(1 - \frac{a^2 + \rho^2}{z^2} \right) , \quad (3.4.35)$$

$$R = \frac{{}^{(0)}z^2}{2a} \left(1 + \frac{\rho^2 - a^2}{z^2} + O\left[\frac{1}{z^4}\right] \right) ,$$

$$\begin{aligned} h &= L \left[2 \frac{{}^{(0)}z^2}{a^2} du^2 + O\left[\frac{1}{z^2}\right] dv^2 + \right. \\ &\quad + \left(O\left[\frac{1}{z^2}\right] - \ln\left(\frac{\rho^2}{a^2} + O\left[\frac{1}{z^2}\right]\right) + \ln\frac{\rho}{a} + \ln\frac{u}{a} + \right. \\ &\quad \left. + O\left[\frac{1}{z^2}\right] - \ln\left(\frac{\rho^2}{b^2} + O\left[\frac{1}{z^2}\right]\right) + \ln\frac{\rho}{b} + \ln\frac{u}{b} \right) {}^{(0)}g = \\ &= L \left[2 du^2 + \ln\frac{D}{4ab} {}^{(0)}g \right. \\ &\quad \left. - \ln\frac{\rho^2}{ab} {}^{(0)}g + O\left[\frac{a}{D}\right] \right] \end{aligned} \quad (3.4.36)$$

První dva členy jsou kalibračně triviální, lze je odtransformovat pomocí transformace (2.2.21). Dostáváme tedy linearizovanou opravu k metrice od nekonečné přímé struny

$$h = -\frac{2\mu\sigma}{4\pi} \ln\frac{\rho^2}{ab} {}^{(0)}g \quad (3.4.37)$$

Plná metrika přímé struny je

$$\begin{aligned} g &= \eta + \varepsilon h + O[\varepsilon^2] = \\ &= -dt^2 + dz^2 + {}^{(0)}g \left(1 - \frac{2\mu\sigma}{4\pi} \varepsilon \ln\frac{\rho^2}{ab} + O[\varepsilon^2] \right) = \\ &= -dt^2 + dz^2 + \left(d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 \right) \left(\frac{\rho^2}{ab} \right)^{-\frac{2\mu\sigma}{4\pi}\varepsilon} + O[\varepsilon^2] \end{aligned} \quad (3.4.38)$$

Záměrnou souřadnic

$$g \rightarrow \hat{g} = \frac{1}{1 - \frac{2\kappa G}{4\pi} \varepsilon} g^{1 - \frac{2\kappa G}{4\pi} \varepsilon} (ab)^{\frac{1}{2} \frac{2\kappa G}{4\pi} \varepsilon} \quad (3.4.39)$$

dostaneme

$$g = -dt^2 + dz^2 + d\tilde{\varphi}^2 + \left(1 - \frac{2\kappa G}{4\pi} \varepsilon\right)^2 \tilde{\varphi}^2 d\varphi^2 + O[\varepsilon^2] \quad (3.4.40)$$

což je známý tvar metriky nekonečné přímé struny (viz. např. [27]). Z tohoto výrazu obdržíme vztah mezi úbytkem úhlu a napětím struny

$$\Delta\varphi = 2\pi \left(1 - \left(1 - \frac{2\kappa G}{4\pi} \varepsilon\right)\right) = 2\kappa G \varepsilon \quad (3.4.41)$$

což je opět známý výsledek (viz. [14]).

Riemannův tenzor urychlené částice se strunou

Vratíme se k naší původní úloze nalezení linearizovaného gravitačního pole jedné urychlené částice s polonekonečnou strunou. Jak jsme již řekli, příslušnou metriku dostaneme v oblasti konečného $U_1 \cap U_2$ pro nekonečné η . Ukazuje se ale, že linearizovaná metrika je v oblasti $U=0$ velmi divergentní. Bude snažší nejdříve najít linearizovaný Riemannův tenzor křivosti a k nalezení metriky se vrátíme dodatečně.

Označme

$$\begin{aligned} Q_{abc} &= \partial_a h_{b\gamma c} = \\ &= \left(\partial_{[a}^{(\mu} h_{b]\gamma c)} + \partial_{[b}^{(\mu} h_{a]\gamma c)} \right) \Theta(x|P_-) \Theta(P_+|x) + \\ &\quad + \left(\partial_{[a}^{(\mu} h_{b]\gamma c)} + \partial_{[b}^{(\mu} h_{a]\gamma c)} \right) \Theta(P_-|x) + \left(\partial_{[a}^{(\mu} h_{b]\gamma c)} + \partial_{[b}^{(\mu} h_{a]\gamma c)} \right) \Theta(x|P_+) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + d_{[s} \left({}^{t-}{}^n h_{b]c} + {}^{t-}{}^n h_{b]c} - {}^{t-}{}^n h_{b]c} - {}^{t-}{}^n h_{b]c} \right) \Big|_{{}^{t-}{}^n h=0} \delta({}^{t-}{}^n h) + \\
& + d_{[s} \left({}^{t-}{}^n h_{b]c} + {}^{t-}{}^n h_{b]c} - {}^{t-}{}^n h_{b]c} - {}^{t-}{}^n h_{b]c} \right) \Big|_{{}^{t-}{}^n h=0} \delta({}^{t-}{}^n h) = \\
& = \left({}^{t-}{}^n Q_{abc} + {}^{t-}{}^n Q_{abc} \right) \Theta(x|\mathcal{P}_-) \Theta(\mathcal{P}_+|x) + \\
& + \left({}^{t-}{}^n Q_{abc} + {}^{t-}{}^n Q_{abc} \right) \Theta(\mathcal{P}_-|x) + \\
& + \left({}^{t-}{}^n Q_{abc} + {}^{t-}{}^n Q_{abc} \right) \Theta(x|\mathcal{P}_+) , \tag{3.4.42}
\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
{}^{t-}{}^n Q_{abc} & = \partial_{[s} {}^{t-}{}^n h_{b]c} , \\
{}^{t-}{}^n Q_{abc} & = \partial_{[s} {}^{t-}{}^n h_{b]c} . \tag{3.4.43}
\end{aligned}$$

${}^{t-}{}^n Q$ je počítáno pouze v oblasti $x \neq 0$. Zde jsme využili skutečnosti, že povrch kužele budoucnosti události \mathcal{P}_- resp. \mathcal{P}_+ je dán rovnicemi ${}^{t-}{}^n h=0$ resp. ${}^{t-}{}^n h$ a spojitosti h na těchto nadplochách (viz. závěr dodatku 3.B). Celkový linearizovaný Riemannův tenzor křivosti metriky h je

$$\begin{aligned}
R_{abcd} & = 2 \partial_{[a} Q_{b]c[d]} = \\
& = \left(2 \partial_{[a} {}^{t-}{}^n Q_{b]c[d]} + 2 \partial_{[a} {}^{t-}{}^n Q_{b]c[d]} \right) \Theta(x|\mathcal{P}_-) \Theta(\mathcal{P}_+|x) + \\
& + \left(2 \partial_{[a} {}^{t-}{}^n Q_{b]c[d]} + 2 \partial_{[a} {}^{t-}{}^n Q_{b]c[d]} \right) \Theta(\mathcal{P}_-|x) + \left(2 \partial_{[a} {}^{t-}{}^n Q_{b]c[d]} + 2 \partial_{[a} {}^{t-}{}^n Q_{b]c[d]} \right) \Theta(x|\mathcal{P}_+) + \\
& + \left({}^{t-}{}^n Q_{ab[c} - {}^{t-}{}^n Q_{ab[c} + {}^{t-}{}^n Q_{ab[c} - {}^{t-}{}^n Q_{ab[c} \right) \Big|_{{}^{t-}{}^n h=0} d_{[a} \left({}^{t-}{}^n h \right) \delta({}^{t-}{}^n h) + \\
& + \left({}^{t-}{}^n Q_{ab[c} - {}^{t-}{}^n Q_{ab[c} + {}^{t-}{}^n Q_{ab[c} - {}^{t-}{}^n Q_{ab[c} \right) \Big|_{{}^{t-}{}^n h=0} d_{[a} \left({}^{t-}{}^n h \right) \delta({}^{t-}{}^n h) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left({}^{acc}R_{abcd} + {}^{acc}R_{ab\bar{c}\bar{d}} \right) \Theta(x|P_-) \Theta(P_+|x) + \\
 &+ \left({}^{un}R_{abcd} + {}^{un}R_{ab\bar{c}\bar{d}} \right) \Theta(P_-|x) + \\
 &+ \left({}^{un}R_{abcd} + {}^{un}R_{ab\bar{c}\bar{d}} \right) \Theta(x|P_+) + \\
 &+ {}^{brd}R_{ab\bar{c}\bar{d}} + {}^{brd}R_{ab\bar{c}\bar{d}} ,
 \end{aligned} \tag{3.4.44}$$

Zde

$${}^{acc}R_{abcd} = 2 \partial_{[d} {}^{acc}Q_{ab]e}{}^e , \tag{3.4.45}$$

$${}^{un}R_{abcd} = 2 \partial_{[d} {}^{un}Q_{ab]e}{}^e ,$$

${}^{acc}R$ opět počítáno mimo oblasti $UN=0$,

$${}^{brd}R_{ab\bar{c}\bar{d}} = \left({}^{acc}Q_{ab}{}^e - {}^{un}Q_{ab}{}^e + {}^{acc}Q_{ab}{}^e - {}^{un}Q_{ab}{}^e \right) \Big|_{t=t_0} \partial_{[d} (t \cdot \eta) \delta(t \cdot \eta) \tag{3.4.46}$$

a obdobně ${}^{brd}R$. V dodatku 3.C je spočteno ${}^{acc}R$ a ${}^{un}R$ (viz. (3.C.7) a (3.C.12)).

$$\begin{aligned}
 {}^{acc}R_{u\eta u\eta} &= -L \frac{3g^2 N^2}{16\pi R^5} , & {}^{acc}R_{uuu\eta} &= -L \frac{3gu}{32\pi R^5} (-\dot{a} - \dot{g}^2 + uw) , \\
 {}^{acc}R_{u\eta u\eta} &= -L \frac{3g^2 u^2}{16\pi R^5} , & {}^{acc}R_{uuv\eta} &= L \frac{3eu}{32\pi R^5} (-\dot{c} - \dot{g}^2 uw) , \\
 {}^{acc}R_{u\eta u\eta} &= L \frac{3g^4 N^2}{16\pi R^5} , & {}^{acc}R_{u\eta\eta\eta} &= -L \frac{3g^3 N}{16\pi R^5} (-\dot{a} - \dot{g}^2 + uw) ,
 \end{aligned} \tag{3.4.47}$$

b) Přesně řečeno je výpočet proveden pouze mimo oblast světočáry částice a světoplochy struny. Z konstrukce ${}^{ac}R$ ale víme, že v této oblasti jsou pohybové rovnice určitě splňeny a tak budeme nadále členy lokalizované v těchto oblastech ignorovat, přestože by měly být v ${}^{ac}R$ obsaženy.

$${}^{ac}R_{\alpha\varphi\alpha\varphi} = \frac{3\varrho^4 u^2}{16a R^5} \quad , \quad {}^{ac}R_{\alpha\varphi\beta\varphi} = -L \frac{3\varrho^2 u}{16a R^5} (-a^2 + \varrho^2 + uN) \quad ,$$

$${}^{ac}R_{\alpha\alpha\alpha\varphi} = L \left(\frac{3\varrho^2 uN}{16a R^5} - \frac{a}{8R^3} \right) \quad , \quad {}^{ac}R_{\alpha\alpha\beta\varphi} = L \left(\frac{3\varrho^2 uN}{16a R^5} - \frac{a}{8R^3} \right) \quad ,$$

$${}^{ac}R_{\beta\varphi\beta\varphi} = L \left(-\frac{3\varrho^2 uN}{4a R^5} + \frac{a\varrho^2}{2R^3} \right) \quad , \quad {}^{ac}R_{\beta\varphi\alpha\varphi} = L \left(\frac{3\varrho^4 uN}{16a R^5} - \frac{a\varrho^2}{8R^3} \right) \quad ;$$

$${}^{un}R_{\alpha\varphi\alpha\varphi} = {}^{un}R_{\alpha\beta\alpha\beta} = -L \frac{3\varrho^2 a}{R^5} \quad ,$$

$${}^{un}R_{\alpha\beta\alpha\beta} = {}^{un}R_{\alpha\alpha\alpha\beta} = L \left(-\frac{3(z-a)^2 a}{R^5} + \frac{a}{R^3} \right) \quad ,$$

$${}^{un}R_{\alpha\alpha\alpha\beta} = -{}^{un}R_{\alpha\beta\alpha\beta} = -L \frac{3(z-a) a\varrho}{R^5} \quad ,$$

$${}^{un}R_{\alpha\varphi\alpha\varphi} = {}^{un}R_{\alpha\beta\alpha\beta} = L \frac{3\varrho^4 a}{R^5} \quad ,$$

$${}^{un}R_{\alpha\beta\alpha\beta} = {}^{un}R_{\alpha\varphi\alpha\varphi} = -L \frac{6\varrho^3 (z-a)a}{R^5} \quad ,$$

$${}^{un}R_{\beta\varphi\beta\varphi} = L \left(-\frac{12\varrho^4 a}{R^5} + \frac{8\varrho^2 a}{R^3} \right) \quad , \quad {}^{un}R_{\alpha\beta\alpha\varphi} = L \left(-\frac{9\varrho^3 (z-a)a}{R^5} + \frac{a\varrho^2}{R^3} \right) \quad ,$$

V limitě $\gamma \rightarrow \infty$ se ${}^{un}R$ a ${}^{un}R \Theta(\tau|\vec{r}_+)$ oddálí do daleké budoucnosti a nebude hrát roli. ${}^{brd}R$, ${}^{un}R$ je pro nekonečné γ spočítáno v dodatku 3.D a limitu polí ${}^{un}R \Theta(\vec{r}|x)$ a ${}^{ac}R$ dostaneme pomocí vztahů z dodatku 3.B

$$\begin{aligned} {}^{brd}R &= (du du\varphi du\varphi - \varrho^2 du\varphi d\varphi du\varphi) \cdot \\ &\quad \times L_a \left(\eta \frac{\varrho^2 (3a^2 + \varrho^2)}{2(a^2 + \varrho^2)^2} \delta(u) + \frac{\varrho^2 N}{2a(a^2 + \varrho^2)^4} (3a^4 - 4a^2\varrho^2 - \varrho^4) \delta(u) - \frac{\varrho^2 (3a^2 + \varrho^2)}{2a(a^2 + \varrho^2)^2} \delta'(u) \right) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} du du\varphi du\varphi + \dots + \varrho^2 du\varphi d\varphi d\varphi + \dots \right) \times \\ &\quad \times L_a \frac{\varrho^3 (3a^2 + \varrho^2)}{a(a^2 + \varrho^2)^3} \delta(u) + O\left(\frac{1}{\gamma}\right) \quad , \end{aligned} \quad (3.4.49)$$

$$\begin{aligned}
 {}^{lin}R\Theta(\mathcal{P}/x) &= (\text{dund}\varphi\text{dud}\varphi - \varphi^2\text{dund}\varphi\text{dud}\varphi) \times \\
 &\times La \left(-\frac{\gamma}{2(a^2+\varphi^2)^2} \delta(u) - \frac{6\pi a^3 \varphi^2}{(a^2+\varphi^2)^4} \delta(u) + \frac{a\varphi^2}{(a^2+\varphi^2)^2} \delta'(u) + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] \right) + \\
 &+ \left(\frac{1}{2}\text{dund}\varphi\text{dud}\varphi + \text{...} + \varphi^2\text{dund}\varphi\text{dud}\varphi + \text{...} \right) \times \\
 &\times La \left(\frac{2\pi a^3}{(a^2+\varphi^2)^3} \delta(u) + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] \right) + O\left[\frac{1}{\gamma}\right], \tag{3.4.50}
 \end{aligned}$$

$${}^{lin}R\Theta(\mathcal{P}_-/x) = O\left[\frac{1}{\gamma}\right], \tag{3.4.51}$$

$${}^{lin}R\Theta(\mathcal{P}_+/x)\Theta(x|\mathcal{P}_-) = O\left[\frac{1}{\gamma}\right]. \tag{3.4.52}$$

Uvážíme-li ještě, že pro $\gamma \rightarrow \infty$ se $R\Theta = 0$ redukuje na $u=0$ (viz. (3.B.14)), dostaneme hledaný linearizovaný Riemannův tenzor křivosti od urychlené částice s polonekonečnou strunou

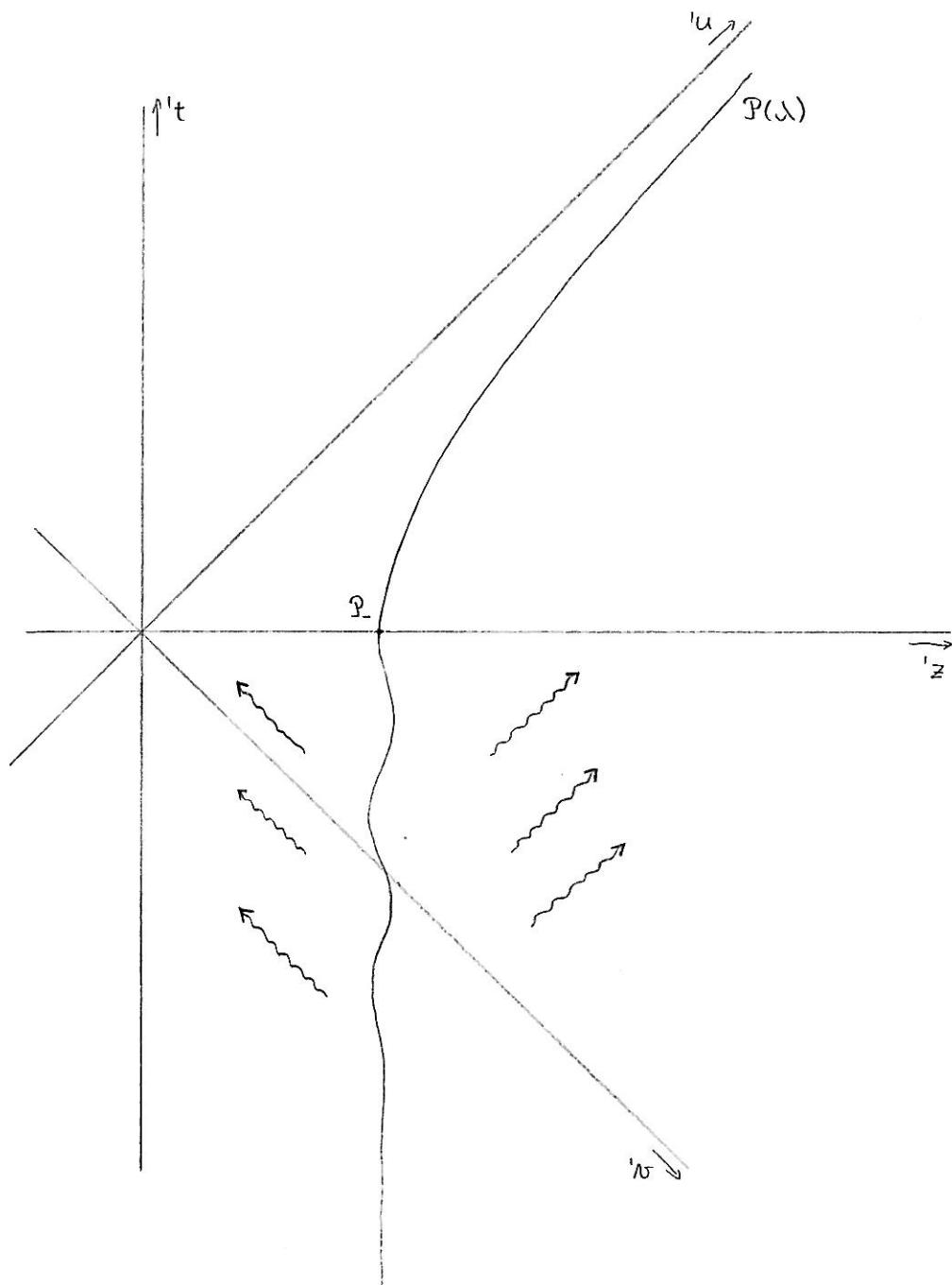
$$\begin{aligned}
 {}^{ret}R &= {}^{sec}R\Theta(u) + {}^{lin}R\Theta(\mathcal{P}/x) + {}^{brd}R = \\
 &= {}^{sec}R\Theta(u) + \\
 &+ (\text{dund}\varphi\text{dud}\varphi - \varphi^2\text{dund}\varphi\text{dud}\varphi) \times \\
 &\times La \left(-\frac{N\varphi^2(3a^2+\varphi^2)}{2(a^2+\varphi^2)^3} \delta(u) - \frac{\varphi^2}{2(a^2+\varphi^2)} \delta'(u) \right) + \tag{3.4.53} \\
 &+ (\text{dund}\varphi\text{dud}\varphi + \text{...} + \varphi^2\text{dund}\varphi\text{dud}\varphi + \text{...}) \times \\
 &\times La \left(\varphi \frac{2a^2+\varphi^2}{(a^2+\varphi^2)^2} \delta(u) \right).
 \end{aligned}$$

První člen je regulární část Riemannova tenzoru (až na členy lokalizované na světočáře částice a světoploše struny diskutované v poznámce *) na str. 67), druhý člen je singulární část lokalizovaná na nadploše $u=0$. Lze se přesvědčit, že Ricciho

tenzor je mimo zdroje nulový, tj. jsou splněny Einsteinovy rovnice ve vakuu.

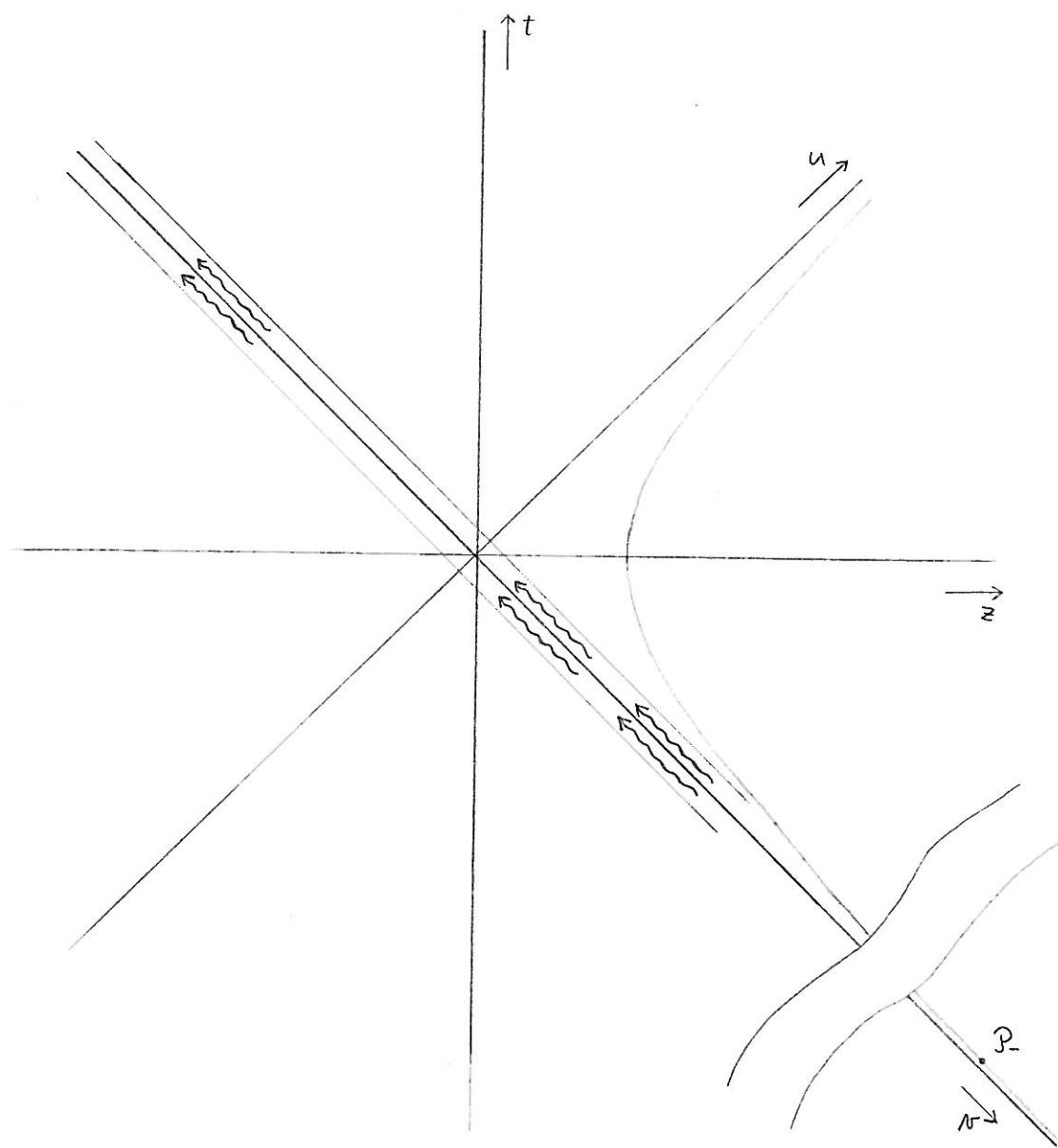
Obecný tvar Riemannova tenzoru a metriky částice se strunou

Věnujme se Riemannovu tenzoru ještě podrobněji. Můžeme se ptát, jakou obecnou strukturu může mít linearizovaný Riemannův tenzor křivosti od urychlené částice s polonekonečnou strunou. V oblasti $u>0$, pokud nechceme připustit existenci nějaké dodatečné gravitační vlny, je linearizovaný Riemannův tenzor křivosti roven ${}^{lin}R$. Na nadploše $u=0$ však neumíme rozoznat vklad částice od příspěvku gravitační vlny. Jinak řečeno, konkrétní tvar linearizovaného Riemannova tenzoru na $u=0$ je dán uspořádáním zdroje v nekonečné minulosti, o kterém nemáme informace. Můžeme však dát jisté obecné podmínky na situaci v dávné minulosti. Budeme nadále předpokládat, že rovnoměrně urychlený pohyb začal v jistém okamžiku P v dávné minulosti o souřadnicích $u=\frac{a}{\gamma}$, $N=a\gamma$ (γ je nekonečné), ovšem pohyb před tímto okamžikem necháme obecný. Pouze požadujeme, aby zdroj směřoval do časového nekonečna (ne izotropního, jak tomu je u neustálé urychleného pohybu) a aby se nejednalo o zářivý zdroj po celou dobu jeho existence. V soustavě souřadnic $'u, 'N$ (viz. (3.4.17)) spojené se souřadnicemi u, N boostem tak, aby souřadnice události P byly $'u=a$, $'N=a$, je obecný charakter pohybu ilustrován na obrázku 3.8. Podmínka na omezenou dobu záření známená, že částice může zářit pouze v oblasti konečného $'u, 'N$, ale ne dříve. Pokud tento systém budeme pozorovat v oblasti konečných souřadnic u, N ($u=\frac{'u}{\gamma}$, $N=\gamma 'N$, γ nekonečné), bude situace vypadat jako na obrázku 3.9. Vidíme, že retardované pole ${}^{ret}R$ od pohybu před okamžikem P se lokalizuje pouze v okolí nadplochy $u=0$ (oblast $u>0$ není ovlivněna pohybem částice před P ;



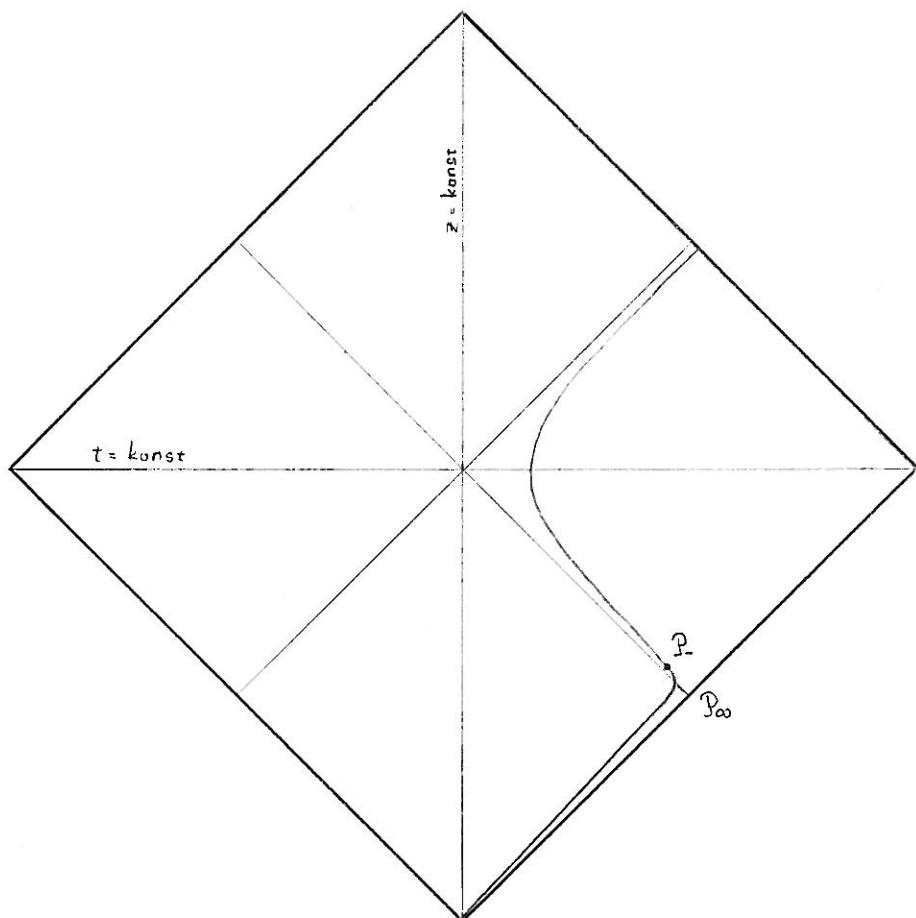
obr. 3.8

Částice se nemůže rovnoměrně urychlovat věčně, její urychlování muselo někdy začít. V soustavě spojené s počátkem urychlování částice P bude mít světočára částice charakter vyznačený na obrázku. Pohyb před událostí P může být obecný, pouze předpokládáme, aby přešel v dřívější minulosti vůči této soustavě v pohyb nezářivý. Vlnovkami je vyznačeno zářivé pole způsobené částicí před okamžikem P .



obr. 3,9

Zde je znázorněna stejná situace jako na obrázku 3.8 vzhledem k soustavě v níž počátek rovnoměrného urychlování \ddot{P} nastal v dávné minulosti. Zářivé pole od pohybu před okamžikem \ddot{P} je lokalizované v úzké oblasti kolem nadplochy $u=0$.



obr. 3.10

Stejná situace jako v předchozích obrázcích znázorněna v Penroseově diagramu (spojeným se soustavou t, z). Částice se pohybuje rovnoměrně (tj. nezáří) z minulého časového nekonečna do blízkosti bodu P_∞ . Tento pohyb probíhá v podstatě v isotropním nekonečnu vůči soustavě t, z ale v časupodobné minulosti vzhledem k ' t, z ' - viz. obr. 3.8. Dále se částice pohybuje obecným (tj. i zářivým) pohybem až do okamžiku P_1 , kdy se začne pohybovat rovnoměrně urychleně. V limitě $\gamma \rightarrow \infty$ okamžik P_1 přechází do P_∞ , tj. P_1 se oddaluje do světelného nekonečna, jak bylo řečeno v poznámce ⁴⁾ na str. 38.

v oblasti $u < 0$ je pole ${}^{sur}R$ nulové díky tomu, že pohyb částice je zářivý pouze pro konečné $|u|, |v|$, ale ne dříve a poloprostor $u < 0$ ovlivňuje právě tato nezářivá oblast, která je však nekonečně daleko). Měřitelné pole lokalizované v nekonečně tenkém (řádu $\frac{1}{\eta}$) okoli $u=0$ bude mít charakter delta-funkcí či jejich derivací. Celou situaci můžeme znázornit též v Penroseově diagramu⁹⁾ – viz. obr. 3.10. Souřadnice ${}^{sur}R'_{abcd}$ linearizovaného Riemannova tensoru ${}^{sur}R$ v soustavě souřadnic u, v, x, y jsou konečné v oblasti konečného $|u|, |v|$, ale i v oblasti konečného $|u|, |v|$ (pole od pohybu před R může být zářivé, nemůže však se vzdáleností růst). Z toho dostáváme, že souřadnice ${}^{sur}R'_{abcd}$ linearizovaného tensoru křivosti ${}^{sur}R$ v souřadnicích u, v, x, y nabývají v oblasti konečného $|u|, |v|$ těchto hodnot

$$\left. \begin{aligned} {}^{sur}R_{uabb} &= \eta^2 {}^{sur}R'_{uabb}, \\ {}^{sur}R_{uvua} &= \eta {}^{sur}R'_{uvua}, \\ {}^{sur}R_{uabc} &= \eta {}^{sur}R'_{uabc}, \\ {}^{sur}R_{uamb} &= {}^{sur}R'_{uamb}, \\ {}^{sur}R_{uawu} &= {}^{sur}R'_{uawu}, \\ {}^{sur}R_{abed} &= {}^{sur}R'_{abed}, \\ {}^{sur}R_{(ostatní)} &= 0 \left[\frac{1}{\eta} \right] \cdot {}^{sur}R'_{(ostatní)} \\ {}^{sur}R_{abcd} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a, b, c, d &= x, y \\ \text{pro } u = 0 \left[\frac{1}{\eta} \right] \end{aligned} \quad (3.4.54)$$

⁹⁾ Stručně je Penroseův diagram zaveden v dodatku 5.A. Podrobněji viz. např. [16].

Abychom dostali pro integrál přes u nenulovou hodnotu (tj. aby pole lokalizované na $u=0$ bylo měřitelné - mělo charakter delta-funkce či její derivace), musí být hodnota integrandu pro $u=0$ alespoň řádu γ : Tedy linearizovaný Riemannův tenzor křivosti ${}^{sur}R$ bude mít v oblasti konečného u, v obecně strukturu

$$\begin{aligned} {}^1_L {}^{sur}R = & dud\varphi dud\varphi A + \\ & + (dudv dud\varphi + \text{r.v.}) \frac{1}{2} B + \\ & + (dudv dud\varphi + \text{r.v.}) \frac{1}{2} C + \\ & + (dud\varphi dud\varphi + \text{r.v.}) D + \quad (3.4.55) \\ & + du\varphi d\varphi du\varphi E + \\ & + (d\varphi u d\varphi du\varphi + \text{r.v.}) F + \\ & + (d\varphi u d\varphi du\varphi + \text{r.v.}) G \end{aligned}$$

kde A, B, C, D, E, F, G jsou funkce lokalizované na $u=0$ (kombinace delta-funkcí a jejich derivací).

Celkový linearizovaný Riemannův tenzor křivosti je dán příspěvem urychleného pohybu a pohybu jemu předcházejícímu

$${}^{ret}R = {}^{acc}R \Theta(u) + {}^{sur}R \quad (3.4.56)$$

Musí být splněn linearizovaný Einsteinův gravitační zákon, což vede na podmínky

$$E = -g^z A, \quad F = g^z B, \quad G = -C, \quad (3.4.57)$$

tj.

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \overset{\text{sur}}{R} = & (du^1 d\varphi du^1 d\varphi - \varphi^2 du^1 d\varphi du^1 d\varphi) A + \\ & + (\frac{1}{2} du^1 du^2 du^1 d\varphi + \omega + \varphi^2 du^1 d\varphi d\varphi + \omega) B + \\ & + (\frac{1}{2} du^1 du^2 du^1 d\varphi + \omega - du^1 d\varphi d\varphi - \omega) C + \\ & + (du^1 d\varphi du^1 d\varphi + \omega) D . \end{aligned} \quad (3.4.58)$$

Dále musí být splněny Bianchiho identity

$$\partial_{[e} \overset{\text{ret}}{R}_{bc]de} = 0 , \quad (3.4.59)$$

což vede na podmínky (viz. (3.E.2))

$$\begin{aligned} B_{,\nu} &= 0 , \\ \varphi B - (\varphi^2 B)_{,\varphi} + \frac{1}{L} \overset{\text{acc}}{R}_{\varphi\varphi\varphi\varphi} \Big|_{\omega=0} \delta(\omega) &= 0 , \\ A_{,\nu} + \frac{1}{2} \frac{1}{\varphi} B + \frac{1}{L} \overset{\text{acc}}{R}_{\nu\varphi\varphi\varphi} \Big|_{\omega=0} \delta(\omega) &= 0 , \\ (\varphi^2 A)_{,\varphi} + \varphi^2 B_{,\nu} + \frac{1}{L} \overset{\text{acc}}{R}_{\nu\varphi\varphi\varphi} \Big|_{\omega=0} \delta(\omega) &= 0 , \\ C_{,\varphi} &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\varphi} C + D_{,\nu} &= 0 , \\ C_{,\nu} + \frac{1}{\varphi} D + D_{,\varphi} &= 0 . \end{aligned}$$

Z (3.4.47) máme

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \overset{\text{acc}}{\int} R_{\varphi\varphi,\varphi} \Big|_{u=0} &= -4\varrho^2 \frac{1}{L} \overset{\text{acc}}{\int} R_{\varphi\varphi\varphi\varphi} \Big|_{u=0} = \frac{4\varrho^4 \dot{\varrho}^2}{(\alpha^2 + \varrho^2)^3}, \\ \frac{1}{L} \overset{\text{acc}}{\int} R_{\varphi\varphi\varphi\varphi} \Big|_{u=0} &= 6 \frac{\varrho^4 \dot{\varrho}^2 N}{(\alpha^2 + \varrho^2)^4}. \end{aligned} \quad (3.4.61)$$

Řešením rovnic (3.4.60) při zachování rotační symetrie okolo osy Σ dostáváme

$$\begin{aligned} A &= -\frac{N \dot{\varrho}^2 (3\alpha^2 + \varrho^2)}{2(\alpha^2 + \varrho^2)^3} \delta(u) - \frac{\dot{\varrho}^2}{2(\alpha^2 + \varrho^2)} \delta'(u) - \frac{1}{2} \frac{N}{\dot{\varrho}^2} B(u) - \frac{1}{2} C_{,u}(u) + \frac{1}{\dot{\varrho}^2} D(u), \\ B &= \varrho \frac{2\alpha^2 + \varrho^2}{(\alpha^2 + \varrho^2)^2} \delta(u) + \frac{1}{\dot{\varrho}} B(u), \\ C &= C(u), \end{aligned} \quad (3.4.62)$$

$$D = -\frac{N}{2\dot{\varrho}} C(u) - \frac{\varrho}{2} C_{,u}(u) + \frac{1}{\dot{\varrho}} D(u),$$

kde A, B, C, D jsou funkce lokalizované na $u=0$, tj. kombinace delta-funkcí a jejich derivací. Pro další výpočty označíme

$$\begin{aligned} {}^0A &= A \Big|_{0,B=0} = -\frac{N \dot{\varrho}^2 (3\alpha^2 + \varrho^2)}{2(\alpha^2 + \varrho^2)^3} \delta(u) - \frac{\dot{\varrho}^2}{2(\alpha^2 + \varrho^2)} \delta'(u), \\ {}^0B &= B \Big|_{0,B=0} = \varrho \frac{2\alpha^2 + \varrho^2}{(\alpha^2 + \varrho^2)^2} \delta(u), \\ {}^{\text{free}}A &= A - {}^0A = -\frac{1}{2} \frac{N}{\dot{\varrho}^2} B(u) - \frac{1}{2} C_{,u}(u) + \frac{1}{\dot{\varrho}^2} D(u), \quad {}^{\text{free}}B = B - {}^0B = \frac{1}{\dot{\varrho}} B(u), \\ {}^{\text{free}}C &= C = C(u), \quad {}^{\text{free}}D = D = -\frac{N}{2\dot{\varrho}} C(u) - \frac{\varrho}{2} C_{,u}(u) + \frac{1}{\dot{\varrho}} D(u). \end{aligned} \quad (3.4.63)$$

Řešení (3.4.53) dostaneme položením

$$\begin{aligned} A, B, C, D &= 0, \\ t.j. \quad A &= {}^0A, \quad B = {}^0B, \quad C = 0, \quad D = 0. \end{aligned} \quad (3.4.64)$$

Známe tedy obecný tvar linearizovaného Riemannova tenzoru křivosti od urychlené částice s polonekonečnou strunou. Jedná se o třídu řešení navzájem se lišících o gravitační vlnu lokalizovanou na nadploše $u=0$, která má strukturu

$$\begin{aligned} \overset{I}{L}^{\text{free}} R = & (dud\varphi dud\varphi - \varphi^2 dud\varphi dud\varphi) \overset{\text{free}}{A} + \\ & + (\frac{1}{2} dudv dud\varphi + \omega + \varphi^2 dud\varphi d\varphi d\varphi + \omega) \overset{\text{free}}{B} + \\ & + (\frac{1}{2} dudv dud\varphi + \omega - dud\varphi d\varphi d\varphi - \omega) \overset{\text{free}}{C} + \\ & + (dud\varphi dud\varphi + \omega) \overset{\text{free}}{D}. \end{aligned} \quad (3.4.65)$$

Jeden reprezentant této třídy řešení je např. (3.4.53).

Jelikož získaný linearizovaný Riemannův tenzor křivosti splňuje pohybové rovnice a Bianchiho identity, musí existovat linearizovaná metrika, z které lze Riemannův tenzor odvodit. V oblasti $u>0$ to samozřejmě je metrika ${}^{ac}h$. Jak jsme již ale řekli, tato metrika je v oblasti $u>0$ singulární. Budeme ji tedy regularizovat - "ořežeme" ji v malé hodnotě $\frac{a}{\beta}$, tj. použijeme metriku

$${}^{bar}h = {}^{ac}h \Theta(u - \frac{a}{\beta}) . \quad (3.4.66)$$

Tato metrika ale nesplňuje Einsteinův gravitační zákon v okolí $u=0$. Musíme k ní ještě přidat členy, které splnění pohybové rovnice na $u=0$ zajistí. Budeme je hledat ve tvaru

$$\overset{I}{L}^{\text{sing}} h = M du^2 + N^{\alpha\beta} g + P dv d\varphi + Q du v d\varphi . \quad (3.4.67)$$

Přímým výpočtem dostaneme linearizovaný Riemannův tenzor křivosti těchto metrik

$$\begin{aligned} {}^{bar}R_{abcd} &= \partial_{[a}(\partial_{b]}{}^{bar}h_{cd]}) = {}^{acc}R_{abcd} + \\ &+ L(d_a u d_b \varphi d_c u d_d \varphi + \varphi^2 d_a u d_b \varphi d_c u d_d \varphi) \mathcal{S} + \end{aligned} \quad (3.4.68)$$

$$+ L(\varphi^2 d_a \varphi d_b \varphi d_c u d_d \varphi + \dots) \mathcal{T} + O[\frac{1}{\gamma}] ,$$

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{\eta}{2a} \delta(u) + \frac{1}{2a} \delta'(u) - \frac{a^3 \nu}{(a^2 + \varphi^2)^2} \delta(u) - \frac{1}{2} \frac{a}{a^2 + \varphi^2} \delta'(u) + \\ &+ \frac{1}{2a} \ln \eta \delta'(u) + \frac{1}{2a} \ln \frac{a^2 + \varphi^2}{\varphi a} \delta'(u) , \end{aligned} \quad (3.4.69)$$

$$\mathcal{S} = \left(-\frac{a^2}{\varphi(a^2 + \varphi^2)^2} + \frac{1}{2a\varphi} \right) \delta(u) ,$$

$${}^{sing}R_{abcd} = \partial_{[a}(\partial_{b]}{}^{sing}h_{cd]}) . \quad (3.4.70)$$

Výraz pro ${}^{sing}R$ je poměrně dlouhý a jeho detailní tvar není velmi zajímavý – viz. (3.E.5), výpočet ${}^{bar}R$ viz. (3.E.14).

Nutno upozornit, že linearizovaný Riemannův tenzor křivosti ${}^{bar}R$ obsahuje nekonečně velké členy. To je způsobeno tím, že ${}^{bar}h$ je námi zvoleným regularizačním způsobem "ořezaná" metrika ${}^{acc}h$ a sama již obsahuje nekonečné členy (členy $\frac{1}{u^2} \Theta(u - \frac{a}{\varphi})$ a $\ln u \Theta(u - \frac{a}{\varphi})$). Divergence v ${}^{bar}R$ se musí kompenzovat nekonečnými členy stejné struktury v ${}^{sing}R$, čehož dosáhnem vhodnou volbou M, N, P, Q .

Nejdříve se pokusíme zjistit metriku pro gravitační vlnu ${}^{free}R$. Porovnáním (3.E.5) a (3.4.65) dostaneme rovnice

$${}^{free}M_{\mu\nu\tau} = 0 ,$$

$${}^{free}N_{\mu\nu} = 0 , \quad {}^{free}N_{\mu\nu} = 0 , \quad {}^{free}N_{\nu\mu} = 0 , \quad (\varphi {}^{free}N_{,\nu})_{,\nu} = 0 ,$$

$$\begin{aligned}
 {}^{\text{free}}M_{1\eta\eta} &= -{}^{\text{free}}B, \quad {}^{\text{free}}N_{1\eta\eta} = -2{}^{\text{free}}B, \\
 {}^{\text{free}}M_{1\eta\eta} + {}^{\text{free}}N_{1uu} &= -2{}^{\text{free}}A, \quad \frac{1}{\bar{\rho}}{}^{\text{free}}M_{1\eta} + {}^{\text{free}}N_{uu} = 2{}^{\text{free}}A, \\
 {}^{\text{free}}Q_{1\eta\eta} &= 0, \quad {}^{\text{free}}P_{1\eta u} = 0, \\
 {}^{\text{free}}Q_{1\eta u} + {}^{\text{free}}P_{1uu} &= 0, \quad {}^{\text{free}}P_{1uu} - {}^{\text{free}}Q_{1\eta\eta} = 0, \\
 \beta({}^{\text{free}}P_{1\eta} \frac{1}{\bar{\rho}})_{,\eta} &= 0, \quad \beta^2 \left(\frac{1}{\bar{\rho}^2} {}^{\text{free}}P_{1u} \right)_{,\eta} = 0, \\
 {}^{\text{free}}Q_{1uu} - {}^{\text{free}}P_{1uu} &= {}^{\text{free}}C, \quad -{}^{\text{free}}Q_{1\eta\eta} + \frac{1}{\bar{\rho}} {}^{\text{free}}Q_{1\eta} = {}^{\text{free}}C, \\
 {}^{\text{free}}Q_{1\eta u} - \frac{2}{\bar{\rho}} {}^{\text{free}}Q_{1uu} &= {}^{\text{free}}D
 \end{aligned} \tag{3.4.71}$$

(viz. (3.4.63)). Řešením těchto rovnic při zanedbávání kalibračně triviálních členů, tj. těch, které se neprojeví v linearizovaném tensoru křivosti, dostaneme

$$\begin{aligned}
 {}^{\text{free}}M &= -\nu \ln \frac{\rho}{\bar{\rho}} B + \beta^2 (\ln \frac{\rho}{\bar{\rho}} - 1) B_{uu} + 2 \ln \frac{\rho}{\bar{\rho}} A, \\
 {}^{\text{free}}N &= -2 \left\{ B du - \ln \frac{\rho}{\bar{\rho}} \right\}, \\
 {}^{\text{free}}P &= -\frac{1}{2} \iint C du du, \\
 {}^{\text{free}}Q &= \frac{1}{2} \nu \left\{ C du + \frac{1}{2} \beta^2 \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{\rho}{\bar{\rho}} \right) C - \frac{1}{2} \right\} D du.
 \end{aligned} \tag{3.4.72}$$

(Nejednoznačnost primitivních funkcí je kalibračně triviální.) To znamená, že metrika $g_{\mu\nu}$ s koeficienty ${}^{\text{free}}M, {}^{\text{free}}N, {}^{\text{free}}P, {}^{\text{free}}Q$ danými (3.4.72) vede k linearizovanému tensoru křivosti gravitační vlny (3.4.65).

Nyní se pokusíme hledat metriku jednoho zástupce třídy linearizovaných tenzorů křivosti systému urychlené částice a polonekonečné struny. Vybereme si linearizovaný Riemannův tenzor křivosti (3.4.53) tj. v (3.4.56) položíme $\partial_i \partial_j C_{ij} = 0$. Porovnáním s $R + \frac{1}{2} g_{ij} R$ dostaneme rovnice

$$\begin{aligned}
 M_{\nu\nu} &= 0 , \\
 N_{\nu\nu} &= 0 , \quad N_{\nu\sigma} = 0 , \quad N_{\sigma\nu} = 0 , \quad (\rho N_{\nu})_{,\nu} = 0 , \\
 M_{\nu\eta} &= - {}^{\circ}B , \quad N_{\nu\eta} = - 2({}^{\circ}B - \mathcal{G}) , \\
 M_{\eta\eta} + N_{\nu\nu} &= - 2({}^{\circ}A - \mathcal{G}) , \quad \frac{1}{2} M_{\nu} + N_{\nu\nu} = 2({}^{\circ}A + \mathcal{G}) , \\
 Q_{\eta\nu} &= 0 , \quad P_{\eta\nu} = 0 , \\
 Q_{\nu\nu} + P_{\nu\nu} &= 0 , \quad P_{\nu\nu} - Q_{\nu\nu} = 0 , \\
 \mathcal{G}(P_{\nu\eta} \frac{1}{\mathcal{G}})_{,\eta} &= 0 , \quad \mathcal{G}^2(P_{\nu\nu} \frac{1}{\mathcal{G}^2})_{,\eta} = 0 , \\
 Q_{\nu\nu} - P_{\nu\nu} &= 0 , \quad -Q_{\eta\eta} + \frac{1}{\mathcal{G}} Q_{\eta\nu} = 0 , \\
 Q_{\eta\nu} - \frac{2}{\mathcal{G}} Q_{\nu\nu} &= 0 .
 \end{aligned} \tag{3.4.73}$$

(srovnej s rovnicemi (3.4.71)). Řešením těchto rovnic (opět až na kalibračně triviální členy) dostaneme

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \mathcal{G}^2} + \ln \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \mathcal{G}^2} \right) \delta(u) + \frac{\alpha^2 + \mathcal{G}^2}{\alpha^2} \left(\ln \frac{\alpha^2 + \mathcal{G}^2}{\alpha^2} - 1 \right) \delta'(u) - \\
 &\quad - \frac{\alpha}{2} \ln \mathcal{G} \delta(u) + \frac{\alpha^2 + \mathcal{G}^2}{2} \left(-\frac{2}{\mathcal{G}} \delta(u) + \ln \mathcal{G} \delta'(u) \right) ,
 \end{aligned} \tag{3.4.74}$$

$$N = \ln \frac{\alpha}{\mathcal{G}} \theta(u) ,$$

$$P = Q = 0 .$$

Obecná metrika urychlené částice s polonekonečnou strunou tedy má (až na kalibraci) následující tvar

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} h^{\text{ret}} &= \frac{1}{L} ({}^{\text{bar}}h + {}^{\text{sing}}h + {}^{\text{free}}h) = \\ &= \frac{1}{L} {}^{\text{acc}}h \Theta(u - \frac{a}{\gamma}) + N^{(z)} g + \\ &+ M dudu + \quad (3.4.75) \\ &+ {}^{\text{free}}M dudu + {}^{\text{free}}N^{(z)} g + {}^{\text{free}}P duvdv + {}^{\text{free}}Q duvdv , \end{aligned}$$

kde ${}^{\text{acc}}h$ je dáno v (3.4.31), M, N v (3.4.74) a ${}^{\text{free}}M, {}^{\text{free}}N, {}^{\text{free}}P, {}^{\text{free}}Q$ v (3.4.72). Tato metrika vede na linearizovaný Riemannův tenzor křivosti

$${}^{\text{ret}}R = {}^{\text{acc}}R \Theta(u) + {}^{\text{sur}}R , \quad (3.4.76)$$

kde ${}^{\text{acc}}R$ je dán v (3.4.47) a ${}^{\text{sur}}R$ v (3.4.58).

Pokud nás zajímá metrika vedoucí na linearizovaný Riemannův tenzor křivosti (3.4.53), položíme (3.4.64) a dostaneme

$$\frac{1}{L} {}^{\text{ret}}h = \frac{1}{L} {}^{\text{acc}}h \Theta(u - \frac{a}{\gamma}) + N^{(z)} g + M dudu \quad (3.4.77)$$

kde M, N jsou dané v (3.4.74).

Vidíme, že metrika je na $u=0$ značně divergentní (delta-funkce násobená nekonečným parametrem regularizace γ). Tato nekonečna však nejsou patologická, neboť vedou na regulární linearizovaný Riemannův tenzor křivosti, v kterém se na ploše $u=0$ vyskytují nanejvýš členy s delta-funkcemi a jejich derivacemi. Dokonce členy s parametrem γ se hrávají

pozitivní roli. V části ${}^{ac}h$ jsme totiž "ořízli" funkci $\Theta(u - \frac{a}{\gamma})$ členy

$$\frac{a}{R} \left(\frac{k+l}{2} \right) \frac{1}{u^2} du^2 + \ln \frac{u}{a} {}^{ac}g = \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \frac{1}{u^2} + \frac{\nu}{2} \frac{1}{u} + O[u^2] \right) du^2 + \ln \frac{u}{a} {}^{ac}g \quad (3.4.78)$$

Srovnáním s (3.A.28), (3.A.29) a (3.A.26) vidíme, že divergentní členy v (3.4.77)

$$\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \left(-\frac{a}{\gamma} \delta(u) + \ln \gamma \delta'(u) \right) - \frac{\nu}{2} \ln \gamma \delta(u) \right) du^2 \quad (3.4.79)$$

přesně zajistí regularizační invarianci metriky ${}^{ac}h$. Díky tomu máme zajištěno, že libovolná veličina získaná z ${}^{ac}h$ neobsahující parametr γ nemůže záviset na způsobu, kterým jsme ${}^{ac}h$ regularizovali.

Pokračujme ale v diskusi metriky ${}^{ac}h$. Všimněme si, že člen $N^a g$ není lokalizovaný na $u=0$, ale je nenulový v celém poloprostoru $u>0$. Při prohlédnutí výrazu pro ${}^{ac}h$ zde nalezneme stejný člen s opačným znaménkem – tyto výrazy se ruší.

Stejně jako pro skalární a elektromagnetické pole můžeme pomocí symetrie nalézt advancované pole symetricky položené částice (-) a složit ho s retardovaným polem částice (+) (viz. obr. 3.2). V linearizovaném tenzoru křivosti se povrchové členy lokalizované na $u=0$ vyruší a dostaneme ${}^{ac}R$. Pro metriku se však všechny povrchové členy nevyruší a zjistíme

$$h = \left({}^{ac}h + L \ln \frac{a}{\gamma} {}^{ac}g \right) \left(\Theta(-\frac{a}{\gamma} - u) + \Theta(\frac{a}{\gamma} - u) \right) - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \frac{a}{\gamma} \delta(u) du du \quad (3.4.80)$$

Lehce nahlédneme, že druhý člen, lokalizovaný na $u=0$, je spojen s regularizační invariancí metriky h .

Jiný tvar metriky urychlené částice se strunou

Vzhledem ke kalibrační volnosti nemůžeme říci, zda retardovaná linearizovaná metrika urychlené částice s polonekonečnou strunou musí obsahovat divergentní členy. Pouze víme, že retardovaný linearizovaný Riemannův tenzor křivosti obsahuje delta-funkce lokalizované na $u=0$. Dokonce v příští kapitole nalezneme linearizovanou metriku \tilde{h} nedivergující na $u=0$ ¹⁰⁾, která je v oblasti $u>0$ kalibračně ekvivalentní s \tilde{h} . Její tvar je (viz. (4.2.12))

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \tilde{h} = & \frac{l-R}{2R} \frac{1}{2} \left(\frac{u}{N} dN^2 + \frac{N}{u} du^2 \right) + \frac{l+R-a}{2R} \frac{1}{2} du dv d\sigma + \\ & + \frac{a}{2R} \left(\frac{2l}{a} - 1 \right) d\varphi^2 - \frac{a}{2R} \varphi^2 \left(\frac{2R}{a} - 1 \right) d\varphi^2 . \end{aligned} \quad (3.4.81)$$

Tuto metriku můžeme použít jako základ naší hledané retardované metriky, tj. obdobně k (3.4.66)

$$\tilde{h} = \tilde{h} \Theta(u) . \quad (3.4.82)$$

Jelikož \tilde{h} je na $u=0$ regulární, nemusíme zavádět žádný parametr regularizace. Metrika \tilde{h} nesplňuje pohybové rovnice na $u=0$. Musíme opět přidat člen lokalizovaný na $u=0$. Budeme ho hledat ve tvaru

$$\frac{1}{L} \tilde{h} = \tilde{M} du^2 + \tilde{N}^{(2)} g . \quad (3.4.83)$$

V dodatku 3.E je vypočten linearizovaný Riemannův tenzor křivosti

¹⁰⁾ Poznamenejme, že delta-funkci nepovažujeme za divergenci – má dobrý integrální smysl. Divergentní jsou členy typu $\frac{1}{u} \Theta(u)$, $\ln u \Theta(u)$ či obsahující nekonečný parametr regularizace η .

$$\begin{aligned}
 \overset{\text{circ}}{L} R = & \overset{\text{acc}}{L} R \Theta(u) + du du \partial_u \partial_u \left({}^0 R + N \frac{\rho^2 - a^2}{2(\rho^2 + a^2)} \delta(u) \right) + \\
 & - \rho^2 du du \partial_\rho \partial_\rho \left({}^0 R + N \frac{1}{2(\rho^2 + a^2)} \delta(u) \right) + \\
 & + \left(\frac{1}{2} du du \partial_u \partial_u + \dots \right) \left({}^0 B - \frac{N}{a^2 \rho^2} \delta(u) \right) + \\
 & + \left(\rho^2 du du \partial_\rho \partial_\rho + \dots \right) {}^0 B .
 \end{aligned} \tag{3.4.84}$$

zúsp dostaneme z výrazu pro $\overset{\text{circ}}{R}$ (viz. (3.E.5)) záměnou $M \rightarrow \tilde{M}$, $N \rightarrow \tilde{N}$, $P, Q = 0$. Porovnáním $\overset{\text{circ}}{R} + \overset{\text{circ}}{R}$ s (3.4.53) dostaneme rovnice

$$\begin{aligned}
 \tilde{M}_{\mu\nu} &= 0 , \\
 \tilde{N}_{\mu\nu} &= 0 , \quad \hat{N}_{\mu\nu} = 0 , \quad \tilde{N}_{\nu\mu} = 0 , \quad (\partial_\nu \tilde{N}_{\mu\nu})_{,\nu} = 0 , \\
 \tilde{M}_{\nu\mu} &= - \frac{Q}{a^2 + \rho^2} \delta(u) , \quad \hat{N}_{\nu\mu} = 0 , \\
 \tilde{M}_{\nu\nu} + \tilde{N}_{\mu\mu} &= N \frac{\rho^2 - a^2}{(\rho^2 + a^2)^2} \delta(u) , \quad \hat{N}_{\mu\mu} + \frac{1}{\rho} \tilde{M}_{\nu\nu} = - N \frac{1}{\rho^2 + a^2} \delta(u)
 \end{aligned} \tag{3.4.85}$$

(srovnej s (3.4.73)). Řešením těchto rovnic při zanedbávání kalibračně triviálních členů obdržíme

$$\begin{aligned}
 \tilde{M} &= - \frac{N}{2} \ln \frac{\rho^2 + a^2}{a^2} \delta(u) , \\
 \hat{N} &= 0 .
 \end{aligned} \tag{3.4.86}$$

Metriku vedoucí na linearizovaný Riemannův tenzor křivosti (3.4.53) lze tedy zapsat ve tvaru

$$\overset{\text{circ}}{h} = \overset{\text{acc}}{h} \Theta(u) - \frac{N}{2} \ln \frac{\rho^2 + a^2}{a^2} \delta(u) du^2 , \tag{3.4.87}$$

kde $\overset{\text{acc}}{h}$ je dáno v (3.4.81).

Vidíme, že jsme se nakonec obešli bez divergencí a regularizací; metrika není však získána přímým výpočtem pomocí Greenovy funkce. Fyzikálně podstatná je ale přítomnost delta-funkcí lokalizovaných na jak v metrice, tak hlavně v linearizovaném tenzoru křivosti. To vypovídá o kumulování gravitačního pole podél hranice oblasti přičinně spjaté s částicí a tedy i o omezené použitelnosti linearizované teorie. Lze očekávat, že v plné teorii gravitace, důsledkem nelinearity, budou na nadploše nastávat větší potíže. V kapitole 4 se přesvědčíme, že tomu tak skutečně je.

Dodatek 3.A Některé vztahy s delta-funkcemi

Delta-funkce na reálných číslech je distribuce ¹¹⁾ definovaná vztahem

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) . \quad (3.A.1)$$

Místo duality \langle , \rangle budeme částečně psát formální integrál, tj.

$$\int \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) . \quad (3.A.2)$$

Platí

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \delta(-x) , \quad f(x) \delta(x) = f(0) \delta(x) , \\ \delta(x) &= \theta'(x) , \end{aligned} \quad (3.A.3)$$

kde

$$\theta(x) \begin{cases} = 1 , & x > 0 \\ = 0 , & x < 0 \end{cases} \quad \text{tj. } \int \theta(x) \varphi(x) dx = \int_0^\infty \varphi(x) dx . \quad (3.A.4)$$

Je-li $f(x)$ prostá (alespoň lokálně ve svých kořenech), pro složenou delta-funkci platí

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_0} \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0) , \quad (3.A.5)$$

kde suma probíhá přes kořeny funkce f (tj. $f(x_0) = 0$). Dále

¹¹⁾ Základy teorie distribucí viz. např. [18], [23].

$$\int \delta'(x) \varphi(x) dx = -\varphi'(0) \quad . \quad (3.A.6)$$

Platí

$$\delta'(-x) = -\delta(x) \quad , \quad (3.A.7)$$

$$f(x) \delta'(x) = (f(x) \delta(x))' - f'(x) \delta(x) = f(0) \delta'(x) - f'(0) \delta(x) \quad . \quad (3.A.8)$$

Splňuje-li \int podmíinku vztahu (3.A.5), platí

$$\begin{aligned} \delta'(\{f(x)\}) &= \frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx} \delta(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx} \sum_{x_0} \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x-x_0) = \\ &= \sum_{x_0} \frac{1}{|f'(x) + f'(x_0)|} \delta'(x-x_0) = \\ &= \sum_{x_0} \left(\frac{1}{|f'(x_0)| |f'(x_0)|} \delta'(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{|f''(x_0)| |f'(x_0)|} \delta(x-x_0) \right) = \\ &= \sum_{x_0} \text{sign } f'(x_0) \frac{1}{(f'(x_0))^2} \left(\delta'(x-x_0) + \frac{\{''(x_0)\}}{\{f'(x_0)\}} \delta(x-x_0) \right) \quad . \end{aligned} \quad (3.A.9)$$

Distribuce na prostoročasu jsou lineární funkcionály (s vhodnou topologií) nad dostatečně hladkou (např. nekonečně hladké s kompaktním nosičem) třídou hustot na prostoročase ¹²⁾

¹²⁾ Hustota (či element objemu) je objekt, který lze na prostoročasu integrovat. Hustoty lze zavést jako fibre-bundle prostor asociovaný s hlavním bunolem tetrád na prostoročase, přičemž standartní fibre je 1-dimensionální a reprezentace Lorentzovy grupy je následovná

$$\tilde{\{[e_a^i]\}} = (\det M^a_b) \tilde{\{[M^a_b e_b^i]\}}$$

Lokálně je pak integrál hustoty definován

$$\int_U \tilde{\{ \}} = \int_U \tilde{\{ [d_e x^e] \}} dx^1 \dots dx^n$$

$$\langle A, \tilde{\varphi} \rangle \rightarrow \mathbb{R} \quad . \quad (3.A.10)$$

Lze též zvolit normování pomocí nějaké kanonicky dané hustoty – např. metrického elementu objemu $\tilde{g}^{\frac{1}{2}}$ daného

$$\tilde{g}^{\frac{1}{2}}[d, x^a] = \sqrt{-\det g_{ab}} \quad . \quad (3.A.11)$$

Potom můžeme distribuce chápat jako funkcionál na třídě funkcí na prostoročase

$$\langle A, \varphi \rangle_{\tilde{g}^{\frac{1}{2}}} \equiv \int \tilde{g}^{\frac{1}{2}}(x) A(x) \varphi(x) = \langle A, \varphi \tilde{g}^{\frac{1}{2}} \rangle \quad , \quad (3.A.12)$$

kde jsme opět pro dualitu \langle , \rangle použili zápis pomocí formálního integrálu.

Tenzorové distribuce pak jsou lineární funkcionály na vhodné třídě tenzorových hustot (resp., v případě normování, funkcí) s opačnou strukturou indexů

$$\langle A_{a_1 \dots}^{b_1 \dots}, \tilde{\varphi}_{b_1 \dots}^{a_1 \dots} \rangle \rightarrow \mathbb{R} \quad . \quad (3.A.13)$$

Delta-funkce lokalizovaná v bodě P normalizovaná vůči elementu objemu $\tilde{g}^{\frac{1}{2}}$ je definovaná

Lokálně je též prostor hustot isomorfní prostoru m -forem přiřazením

$$|\omega|: \Lambda_m M \rightarrow \hat{\mathcal{F}} M, \omega_{e_1 \dots e_m} \mapsto |\omega| \quad ,$$

kde

$$|\omega|[e_i] = \omega_{1 \dots m} \quad , \quad \omega_{e_1 \dots e_m} = \omega_{1 \dots m} e_1^1 \wedge \dots \wedge e_m^m \quad .$$

Podrobnější výklad je možné nalést např v [1].

$$\begin{aligned} \langle \delta_p, \varphi \rangle_{\mathcal{E}^{\sharp}} &= \langle \delta_p, \varphi \mathcal{E}^{\sharp} \rangle = \\ &= \int \mathcal{E}^{\sharp}(x) \varphi(x) \delta(x+p) = \varphi(p) . \end{aligned} \quad (3.A.14)$$

Distribuce lokalizované na různě dimensionálních varietách můžeme definovat pomocí složení obyčejné reálné delta-funkce s funkcí definující podvariety. Konkrétně, chceme-li distribuci lokalizovanou na nadploše $f=0$ a platí-li

$$\mathcal{E}^{\sharp} = |q_1, \dots, q_{n-1}, \lambda d_x f| , \quad (3.A.15)$$

můžeme psát

$$\begin{aligned} \langle \delta(f), \varphi \rangle_{\mathcal{E}^{\sharp}} &= \int \mathcal{E}^{\sharp}(x) \varphi(x) \delta(f(x)) = \\ &= \int df \left\{ |q_1, \dots, q_{n-1}|_{f=0} \right\}(x) \varphi(x) \delta(f) = \\ &= \int |q_1, \dots, q_{n-1}|_{f=0}(x) \varphi(x) , \end{aligned} \quad (3.A.16)$$

kde $|q_1, \dots, q_{n-1}|_{f=0}$ je element objemu indukovaný na nadplochu $f=0$ elementem objemu \mathcal{E}^{\sharp} a normálou df . Obdobně pro souřadnice x^a můžeme psát 13)

$$\begin{aligned} \langle \delta(x^1 - x_o^1) \dots \delta(x^n - x_o^n), \tilde{\varphi} \rangle &= \\ &= \int \tilde{\varphi} \delta(x^1 - x_o^1) \dots \delta(x^n - x_o^n) = \end{aligned}$$

13) Zde

$$d^n x = dx^1 \dots dx^n = |d_{x^1} x^1 \wedge \dots \wedge d_{x^n} x^n|$$

je souřadný element objemu. Platí

$$\mathcal{E}^{\sharp} = \sqrt{-\det g_{ab}} d^n x .$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \tilde{\varphi} [d_a x^a] dx \delta(x^1 - x_0^1) \dots \delta(x^n - x_0^n) = \\
 &= \tilde{\varphi} [d_a x^a] \Big|_{x=x_0}, \tag{3.A.17}
 \end{aligned}$$

t.j.

$$\langle \delta(x^1 - x_0^1) \dots \delta(x^n - x_0^n), \varphi \rangle_{\mathcal{E}^n} = (\text{F-distr } \varphi) \Big|_{x=x_0}, \tag{3.A.18}$$

$$\langle \delta(x^1 - x_0^1) \dots \delta(x^n - x_0^n), \varphi \rangle_{\mathcal{D}^n} = \varphi(x_0).$$

Derivace distribucí jsou zavedeny standardním způsobem

$$\langle \nabla_a A^{b_1 \dots}, \tilde{\varphi}_{b_1 \dots} \rangle = - \langle A^{b_1 \dots}, \nabla_a \tilde{\varphi}_{b_1 \dots} \rangle, \tag{3.A.19}$$

Pro metrickou konexi

$$\langle \nabla_a A^{b_1 \dots}, \varphi_{b_1 \dots} \rangle_{\mathcal{E}^n} = - \langle A^{b_1 \dots}, \nabla_a \varphi_{b_1 \dots} \rangle_{\mathcal{E}^n}. \tag{3.A.20}$$

Nutno poznamenat, že je potřeba se mít velmi na pozoru při používání distribučních derivací. Neplatí například

$$\langle u^a \nabla_a A, \varphi \rangle \stackrel{\text{neplatí}}{=} - \langle A, u^a \nabla_a \varphi \rangle,$$

ale platí

$$\langle u^a \nabla_a A, \varphi \rangle = - \langle A, \nabla_a (u^a \varphi) \rangle. \tag{3.A.21}$$

Je všeobecně známo, že na prostoru distribucí není obecně definováno násobení. Nelze například násobit delta-funkci se skokovou funkcí se skokem v lokalizaci delta-funkce, či dvě

delta-funkce lokalizované ve stejném bodě ¹⁴⁾). Dále ne každá funkce je distribucí. Např. $\frac{1}{x}\Theta(x)$ je neintegratelná v okolí $x=0$ ani v nějakém slabším smyslu ¹⁵⁾. My se však přesto i s takovýmto výrazem setkáme a budeme nutni s nimi pracovat. Tyto problémy lze částečně řešit různými regularizacemi - nahrazením problematického výrazu jiným, parametrizovaným výrazem, který je dobře definován a který při nějaké hodnotě (v našem případě nekonečné) regularizačního parametru vede k původnímu výrazu. S regularizovaným výrazem můžeme formálně počítat a může se stát, že konečný výsledek nebude záviset na parametru regularizace. Nutno mít ale na paměti, že měřitelné veličiny by neměli záviset nejen na parametru regularizace, ale na způsobu regularizace. V případě elektromagnetického pole jsme se setkali např. s výrazem typu

$$\frac{1}{x}\Theta(x) \quad , \quad (3.A.22)$$

který není dobře definován. Pokud zavedeme "oříznutí" v $\frac{1}{y}$, kde y je parametr regularizace, tj.

$$\frac{1}{x}\Theta\left(x-\frac{1}{y}\right) \quad , \quad (3.A.23)$$

nesmíme zapomenout, že při jiném "oříznutí" v bodě $\frac{1}{y}$ (nekořečně blízkém k $\frac{1}{y}$) dostáváme výsledek konečně se lišící

¹⁴⁾ Není myšlena konvolunce. Výraz $\delta_{x-y}\delta_{x-z}$ bez integrace přes x není definovaný, ale konvolunce $\int dx \delta_{x-y}\delta_{x-z} = \delta_{y-z}$ má dobrý smysl.

¹⁵⁾ Pro funkci $\frac{1}{x}$ lze zavést dobře definovanou distribuci $\text{vp}\frac{1}{x}$

$$\langle \text{vp}\frac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\epsilon, \epsilon)} \varphi(x) \frac{1}{x} dx$$

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \frac{1}{x} \Theta(x - \frac{1}{\gamma}) - \frac{1}{x} \Theta(x - \frac{1}{\gamma'}) , \varphi \right\rangle = \\
 &= \int_{\frac{1}{\gamma}}^{\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx - \int_{\frac{1}{\gamma'}}^{\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx = \int_{\frac{1}{\gamma}}^{\frac{1}{\gamma'}} \frac{1}{x} (\varphi(0) + O[x]) = \\
 &= [\varphi(0) \ln x + O[x]] \Big|_{\frac{1}{\gamma}}^{\frac{1}{\gamma'}} = \\
 &= \varphi(0) \ln \frac{\gamma'}{\gamma} + O\left[\frac{1}{\gamma}\right]
 \end{aligned} \tag{3.A.24}$$

t.j.

$$\frac{1}{x} \Theta(x - \frac{1}{\gamma}) = \frac{1}{x} \Theta(x - \frac{1}{\gamma}) + \delta(x) \ln \frac{\gamma'}{\gamma} + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] \tag{3.A.25}$$

Tato nejednoznačnost musí pro výslednou veličinu vymizet.

Často však můžeme tuto nejednoznačnost odstranit přidáním dalšího člena, který zajistí invarianci celkového výrazu (alespoň do řádu $O[\gamma]$). Doplníme-li například k (3.A.23) člen $-\delta(x) \ln \gamma$, dostaneme výraz nezávisející na způsobu regularizace (i když ještě obsahující parametr regularizace)

$$\frac{1}{x} \Theta(x - \frac{1}{\gamma}) - \delta(x) \ln \gamma = \frac{1}{x} \Theta(x - \frac{1}{\gamma}) - \delta(x) \ln \gamma' \tag{3.A.26}$$

Můžeme zavést označení

$$\left[\frac{1}{x} \Theta(x) \right]_{\gamma, \gamma'} = \frac{1}{x} \Theta(x - \frac{1}{\gamma}) - \delta(x) \ln \gamma' \tag{3.A.27}$$

Obdobně pro funkce $\ln x \Theta(x)$ a $\frac{1}{x} \Theta(x)$ dostáváme ($\frac{1}{\gamma}$ a $\frac{1}{\gamma'}$ nekonečně blízké)

$$\ln x \Theta(x - \frac{1}{\gamma}) - \ln x \Theta(x - \frac{1}{\gamma'}) = O\left[\frac{\ln \gamma}{\gamma}\right] \tag{3.A.28}$$

$$\frac{1}{x^2} \Theta(x - \frac{1}{\gamma}) - \frac{1}{x^2} \Theta(x - \frac{1}{\gamma'}) = \delta(x)(\gamma - \gamma') - \delta'(x) \ln \frac{\gamma'}{\gamma} + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] \tag{3.A.29}$$

tj. regularizačně invariantní do řádu $O[\gamma^0]$ je výraz

$$\left[\frac{1}{x^2} \Theta(x) \right]_{\text{reg}} = \frac{1}{x^2} \Theta(x - \frac{1}{\gamma}) - \gamma \delta(x) + \ln \gamma \delta'(x) . \quad (3.A.30)$$

Příklady regularizace jsou ve výpočtu potenciálu elektromagnetického pole v paragrafu 3.3 a ve výpočtech linearizovaného gravitačního pole v paragrafu 3.4.

Nakonec ještě uvedeme Taylorův rozvoj delta-funkce

$$\delta(x+a) = \sum_{m=0}^N \frac{1}{m!} \delta^{(m)}(x) a^m + O[a^{N+1}] \quad (3.A.31)$$

v následujícím smyslu

$$\begin{aligned} \langle \delta(x+a), \varphi(x) \rangle &= \langle \delta(x), \varphi(x-a) \rangle = \\ &= \varphi(-a) = \sum_{m=1}^N \frac{1}{m!} (-a)^m \varphi^{(m)}(x) + O[a^{N+1}] = \\ &= \sum_{m=0}^N \frac{1}{m!} (-a)^m \langle \delta(x), \varphi^{(m)}(x) \rangle + O[a^{N+1}] = \\ &= \left\langle \sum_{m=0}^N \frac{1}{m!} a^m \delta^{(m)}(x) + O[a^{N+1}], \varphi(x) \right\rangle . \end{aligned} \quad (3.A.32)$$

Dodatek 3.B Rozvoje některých funkcí

V kapitole 3 jsou často používané následující funkce

$$\begin{aligned} X &= \alpha^2 + \beta^2 + uv , \quad l = \frac{1}{2\alpha} X , \\ \xi &= \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + uv)^2 - 4\alpha^2 uv} , \quad R = \frac{1}{2\alpha} \xi = \sqrt{\beta^2 - uv} . \end{aligned} \quad (3.B.1)$$

Jejich rozvoje pro malé u jsou

$$l = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha} \left(1 + \frac{v}{\alpha^2 + \beta^2} u \right) , \quad (3.B.2)$$

$$\begin{aligned} R &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha} + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \frac{v}{2\alpha} u + \frac{v^2 (\beta \alpha^2 - (\alpha^2 + \beta^2)^2)}{4\alpha (\alpha^2 + \beta^2)^2} u^2 + O(u^3) = \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha} \left(1 + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} vu + O(u^2) \right) . \end{aligned} \quad (3.B.3)$$

Dále platí

$$\frac{1}{R} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \left(1 - \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} vu + O(u^2) \right) , \quad (3.B.4)$$

$$\frac{R+l}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2} \left(1 + \frac{\beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} vu + O(u^2) \right) , \quad (3.B.5)$$

$$\frac{R+l}{2R} = 1 + \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} vu + \frac{5(\beta^2 - \alpha^2)^2 v^2}{4(\alpha^2 + \beta^2)^4} u^2 + O(u^3) , \quad (3.B.6)$$

$$\frac{1}{R} \left(\frac{R+l}{2} \right)^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha} \left(1 + \frac{vu}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\alpha^4 v^4}{(\alpha^2 + \beta^2)^4} u^2 + O(u^3) \right) , \quad (3.B.7)$$

$$Y \equiv \frac{X}{\xi^2} (X^2 - 6\alpha^2 uv) = 1 + O(u^2) . \quad (3.B.8)$$

Zajímají nás dále hodnoty těchto funkcí na budoucím světelném kuželu události \mathcal{P} . Souřadnice události \mathcal{P} jsou

$$u_- = \frac{a}{\gamma}, v = a\gamma, x_-=y_- = 0. \quad (3.B.9)$$

Je výhodné zavést soustavu $'u, 'v$, v které má událost P souřadnice $'u=a$, $'v=a$ (viz. obr. 3.3)

$$\begin{aligned} 'u &= \gamma u, & 'x &= x, \\ 'v &= \frac{1}{\gamma} v, & 'y &= y. \end{aligned} \quad (3.B.10)$$

Souřadnice $'t, 'z$ a radiální souřadnice $'r$ kolem středu $z=0$, $x, y = 0$ jsou dány

$$\begin{aligned} 't &= \frac{1}{2} ('u - 'v) = \frac{1}{2} (\gamma u - \frac{1}{\gamma} v), \\ 'z &= \frac{1}{2} ('u + 'v) = \frac{1}{2} (\gamma u + \frac{1}{\gamma} v), \\ 'r &= \sqrt{r^2 + ('z - a)^2} = \sqrt{\gamma^2 + (\frac{1}{2}\gamma u + \frac{1}{2\gamma} v - a)^2} > 0. \end{aligned} \quad (3.B.11)$$

Interval mezi událostí a v těchto souřadnicích je dán

$$S^2 = - 't^2 + 'r^2, \quad (3.B.12)$$

Světelný kužel budoucnosti události P je tedy dán rovnicí

$$('t - 'r)|_x = 0, \quad (3.B.13)$$

kde zápis $f|_x$ značí funkci f vyčíslenou na povrchu světelného kuželu budoucnosti události P . Pospojováním těchto vztahů dostáváme

$$u|_x = \frac{'r + 'z}{\gamma}|_x = \frac{\phi^2}{(\gamma^2 - v)} + \frac{a}{\gamma}. \quad (3.B.14)$$

Vidíme, že $('t - 'n)|_{\gamma} = 0$ se pro $\gamma \rightarrow \infty$ redukuje na $u|_{\gamma} = 0$. Dále platí

$$u|_{\gamma} = ('z - 'n)|_{\gamma}, \quad (3.B.15)$$

$$un|_{\gamma} = (2'za - a^2 - \beta^2)|_{\gamma}, \quad (3.B.16)$$

$$l|_{\gamma} = 'z|_{\gamma} = \left(\frac{\gamma \beta^2}{2(a\gamma - u)} - \frac{1}{2\gamma}(au - v) + a \right)|_{\gamma}, \quad (3.B.17)$$

$$R|_{\gamma} = 'n|_{\gamma} = \left(\frac{\gamma \beta^2}{2(a\gamma - u)} + \frac{1}{2\gamma}(au - v) \right)|_{\gamma}, \quad (3.B.18)$$

$$(l+R)|_{\gamma} = \frac{\gamma \beta^2}{(a\gamma - u)}|_{\gamma} + a = \gamma u|_{\gamma}, \quad (3.B.19)$$

$$(l-R)|_{\gamma} = -\frac{1}{2\gamma}(au - v)|_{\gamma} + a = \frac{v}{2\gamma}|_{\gamma}, \quad (3.B.20)$$

$$(1 + \frac{'z - a}{'n})|_{\gamma} = \frac{\beta^2}{'n(2 - \frac{v}{\gamma})}|_{\gamma}, \quad (3.B.21)$$

$$(1 - \frac{'z - a}{'n})|_{\gamma} = \frac{a - \frac{v}{2}}{'\gamma^2}|_{\gamma}. \quad (3.B.22)$$

Rozvoje pro velká γ jsou

$$u|_{\gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{a\gamma} \left(1 + \frac{\beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)} \frac{v}{a\gamma} + O\left[\frac{1}{\gamma^2}\right] \right), \quad (3.B.23)$$

$$l|_{\gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2a} \left(1 + \frac{v}{a\gamma} + O\left[\frac{1}{\gamma^2}\right] \right), \quad (3.B.24)$$

$$R|_{\gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2a} \left(1 + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^2 + \alpha^2} \frac{v}{a\gamma} + O\left[\frac{1}{\gamma^2}\right] \right), \quad (3.B.25)$$

$$(l+R)|_{\gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{a} \left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{v}{a\gamma} + O\left[\frac{1}{\gamma^2}\right] \right), \quad (3.B.26)$$

$$(l-R)|_{\gamma} = \frac{v}{2\gamma} + O\left[\frac{1}{\gamma^2}\right], \quad (3.B.27)$$

$$Y|_{\gamma} = 1 + O\left[\frac{1}{\gamma^2}\right]. \quad (3.B.28)$$

Zavedeme-li dále souřadnice ${}^{(b)}U, {}^{(b)}N$ (obr. 3.5)

$${}^{(b)}U = D - N , \quad {}^{(b)}N = D - U \quad (3.B.29)$$

a konvenci (3.4.14). Pak z požadavků

$$U - N = a^2 , \quad {}^{(b)}U - {}^{(b)}N = b^2 \quad (3.B.30)$$

dostaneme

$$\begin{aligned} D &= a \frac{1}{2} \left(\gamma + \frac{1}{\gamma} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{\gamma} \right)^2 a^2 + b^2 - a^2} = \\ &= b \frac{1}{2} \left({}^{(b)}\gamma + \frac{1}{{}^{(b)}\gamma} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left({}^{(b)}\gamma + \frac{1}{{}^{(b)}\gamma} \right) b^2 + a^2 - b^2} . \end{aligned} \quad (3.B.31)$$

Z toho

$${}^{(b)}\gamma = \frac{1}{b} D - \frac{a}{b} \frac{1}{\gamma} \quad (3.B.32)$$

a rozvojem pro velká γ

$$D = a\gamma \left(1 + \frac{b^2}{a^2\gamma^2} + O\left[\frac{1}{\gamma^2}\right] \right) , \quad (3.B.33)$$

$${}^{(b)}\gamma = \frac{a}{b} \gamma \left(1 + \frac{b^2 - a^2}{a^2} \frac{1}{\gamma^2} + O\left[\frac{1}{\gamma^2}\right] \right) , \quad (3.B.34)$$

$${}^{(b)}U|_* = a\gamma \left(1 - \frac{N}{a\gamma} + \frac{b^2}{a^2} \frac{1}{\gamma^2} + O\left[\frac{1}{\gamma^2}\right] \right) , \quad (3.B.35)$$

$${}^{(b)}N|_* = a\gamma \left(1 + \frac{b^2 - a^2 - S^2}{a^2} \frac{1}{\gamma^2} + O\left[\frac{1}{\gamma^2}\right] \right) , \quad (3.B.36)$$

$${}^{(b)}l|_* = \frac{1}{2} \frac{a^2}{b} \gamma^2 \left(1 - \frac{N}{a\gamma} + O\left[\frac{1}{\gamma^2}\right] \right) , \quad (3.B.37)$$

$${}^{(b)}R|_* = \frac{1}{2} \frac{a^2}{b} \gamma^2 \left(1 - \frac{N}{a\gamma} + O\left[\frac{1}{\gamma^2}\right] \right) , \quad (3.B.38)$$

$$({}^{(b)}l - {}^{(b)}P)|_* = \frac{{}^{(b)}N}{a\gamma}|_* = b \left(1 - \frac{S^2}{a^2\gamma^2} + O\left[\frac{1}{\gamma^2}\right] \right) , \quad (3.B.39)$$

$${}^{(b)}u^{(b)}\nu|_* = a^2 \gamma^2 \left(1 - \frac{\nu}{a\gamma} + O\left(\frac{1}{\gamma}\right) \right), \quad (3.B.40)$$

$${}^{(b)}Y|_* = 1 + O\left(\frac{1}{\gamma}\right). \quad (3.B.41)$$

Na závěr ukážeme, že linearizovaná metrika \hat{h} daná v (3.4.33) je spojitá na nadploše $t - t_R = 0$. Použitím identity (3.4.26), vztahů (3.4.25), (3.B.19), (3.B.20) a (3.4.18) dostaneme

$$\begin{aligned} \left(b \frac{{}^{(b)}R + {}^{(b)}\ell}{{}^{(b)}u\gamma} - \frac{{}^{(b)}\nu}{\gamma} \right)|_* &= \left(\frac{{}^{(b)}u}{\gamma} - b \frac{{}^{(b)}\ell - {}^{(b)}R}{{}^{(b)}u\gamma} \right)^{-1}|_* = \\ &= \frac{1}{\gamma} \left({}^{(b)}u - b \frac{1}{{}^{(b)}\gamma} \right)^{-1}|_* = \frac{1}{\gamma} \left({}^{(b)}u - {}^{(b)}u_* \right)'|_* = \\ &= \frac{1}{\gamma} (\nu_* - \nu)|_* , \end{aligned} \quad (3.B.42)$$

$$\left(a \frac{{}^{(b)}R + {}^{(b)}\ell}{{}^{(b)}u\gamma} - \frac{\nu}{\gamma} \right)|_* = \frac{1}{\gamma} (a\gamma - \nu)|_* = \frac{1}{\gamma} (\nu_* - \nu). \quad (3.B.43)$$

Využitím tohoto, (3.B.18) a opětovným použitím (3.B.19) a (3.B.20) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \left({}^{(b)}h + {}^{(b)}\bar{h} \right)|_* &= \left(\frac{a}{4\pi} \gamma^2 du^2 + \frac{a}{4\pi} \frac{1}{\gamma^2} d\nu^2 + \frac{a}{2\pi} {}^{(b)}g + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b}{4\pi a\gamma} {}^{(b)}\gamma^2 d{}^{(b)}u^2 + \frac{b}{4\pi a\gamma} \frac{1}{{}^{(b)}\gamma^2} d{}^{(b)}\nu^2 + \frac{b}{2\pi a\gamma} {}^{(b)}g \right)|_* . \end{aligned} \quad (3.B.44)$$

Obdobně (viz. (3.B.18))

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \left({}^{(b)}\bar{h} + {}^{(b)}h \right)|_* &= \left(\frac{a}{4\pi} \gamma^2 du^2 + \frac{a}{4\pi} \frac{1}{\gamma^2} d\nu^2 + \frac{a}{2\pi} {}^{(b)}g + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b}{4\pi a\gamma} {}^{(b)}\gamma^2 d{}^{(b)}u^2 + \frac{b}{4\pi a\gamma} \frac{1}{{}^{(b)}\gamma^2} d{}^{(b)}\nu^2 + \frac{b}{2\pi a\gamma} {}^{(b)}g \right)|_* . \end{aligned} \quad (3.B.45)$$

Z (3.B.44) a (3.B.45) vidíme, že metrika \hat{h} daná v okolí

$t_R - t = 0$ výrazem

$$h = (\overset{\text{ee}}{e} h + \overset{\text{ee}}{w} h) \Theta(t - t_R) + (\overset{\text{en}}{e} h + \overset{\text{en}}{w} h) \Theta(t_R - t) \quad (3.B.46)$$

je na $t_R - t = 0$ spojitá.

Budeme hledat linearizovaný Riemannův tenzor křivosti metriky

$$\begin{aligned} {}^{loc}h &= h_{\tau\tau} \left(d\tau^2 + \frac{\alpha^2}{2} d\tilde{z}^2 \right) + h_{\tau\tilde{z}} d\tau v d\tilde{z} + \frac{1}{2} h^{11} g , \\ h_{\tau\tilde{z}} &= L \frac{\chi}{2\alpha z} , \\ h_{\tau\tau} &= L \frac{1}{2\alpha^2 \xi} (\chi^2 - 2\alpha^2 \tilde{z}^2) , \\ h &= L \left(\frac{2\alpha^2}{\xi} - 2 \ln \left(\frac{\chi + \xi}{2\alpha^2} - \frac{\tilde{z}^2}{\alpha^2} \right) + 2 \ln \frac{\tilde{z}}{\alpha} + 2 \frac{\chi}{\alpha} \right) . \end{aligned} \quad (3.C.1)$$

Dérivováním a využitím

$$\begin{aligned} \partial d\tau &= -\frac{1}{2} d\tilde{z} v d\tau , \quad \partial d\tilde{z} = -\frac{\tilde{z}}{\alpha^2} d\tau d\tau , \\ \partial d\varphi &= -\frac{1}{2} d\tilde{z} v d\varphi , \quad \partial d\varphi = \frac{\tilde{z}}{\alpha^2} d\varphi d\tau , \\ \partial(d\tau d\tilde{z}) &= -\frac{1}{2} d\tau v d\tilde{z} d\tilde{z} - \frac{\tilde{z}}{\alpha^2} d\tau d\tau d\tilde{z} , \\ \partial(d\tau d\varphi) &= -\frac{1}{2} d\tau v d\tilde{z} d\varphi + \frac{\tilde{z}}{\alpha^2} d\varphi d\tau d\varphi , \\ \partial(d\tilde{z} d\varphi) &= -\frac{\tilde{z}}{\alpha^2} d\tau d\tau d\varphi + \frac{\tilde{z}}{\alpha^2} d\varphi d\tilde{z} d\varphi , \end{aligned} \quad (3.C.2)$$

$$\begin{aligned} \partial(d\varphi d\varphi) &= \frac{\tilde{z}}{\alpha^2} d\varphi d\varphi d\varphi - \frac{1}{2} d\varphi d\varphi d\varphi - \frac{1}{2} d\varphi d\varphi d\varphi , \\ \partial(d\tau d\tau) &= -\frac{1}{2} d\tau v d\tilde{z} d\tau - \frac{1}{2} d\tau d\tau d\tilde{z} - \frac{1}{2} d\tilde{z} d\tau d\tau , \\ \partial(d\tilde{z} d\tilde{z}) &= -\frac{\tilde{z}}{\alpha^2} d\tau d\tau d\tilde{z} - \frac{\tilde{z}}{\alpha^2} d\tau d\tilde{z} d\tau \end{aligned}$$

dostáváme v oblasti $\omega > 0, \varphi > 0$ (viz. poznámka 8) na straně 67)

$$\begin{aligned}
 {}^{abc}Q_{abc} &= \partial_p {}^{abc}h_{bc} = \\
 &= d_{[c}\tau d_{b]} \tilde{z} d_c \tau (-h_{\tau\tau,\tilde{z}}) + \\
 &+ d_{[c}\tau d_{b]} \varphi d_c \tau (-h_{\tau\tau,\varphi}) + \\
 &+ d_{[c}\tilde{z} d_{b]} \varphi d_c \tau (-h_{\tau\tilde{z},\varphi}) + \\
 &+ d_{[c}\tau d_{b]} \tilde{z} d_c \tilde{z} (-h_{\tau\tilde{z},\tilde{z}} - \frac{1}{2} h_{\tau\tilde{z}}) + \\
 &+ d_{[c}\tau d_{b]} \varphi d_c \tilde{z} (-h_{\tilde{z},\varphi}) + \quad (3.C.3) \\
 &+ d_{[c}\tilde{z} d_{b]} \varphi d_c \tilde{z} (-\frac{\alpha^2}{2} h_{\tau\tau,\varphi}) + \\
 &+ d_{[c}\tau {}^{(2)}g_{b]c} \frac{1}{2} h_{\tau\tau} + \\
 &+ d_{[c}\tilde{z} {}^{(2)}g_{b]c} \frac{1}{2} h_{\tau\tilde{z}} + \\
 &+ d_{[c}\varphi d_{b]} \varphi d_c \varphi \frac{1}{2} \varphi^2 h_{\tau\varphi} ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^{abc}R_{abcd} &= 2 \partial_p {}^{abc}Q_{[abd]c} = \\
 &= d\tau \wedge d\tilde{z} d\tau \wedge d\tilde{z} (-h_{\tau\tau,\tilde{z}\tilde{z}} + \frac{1}{2} h_{\tau\tau,\tilde{z}}) + \\
 &+ d\tau \wedge d\varphi d\tau \wedge d\varphi (-h_{\tau\tau,\varphi\varphi} + \frac{1}{2} \frac{\tilde{z}^2}{\alpha^2} h_{\tau\tilde{z}}) + \\
 &+ d\tau \wedge d\varphi d\tau \wedge d\varphi (-\varphi h_{\tau\tau,\varphi} + \frac{1}{2} \frac{\tilde{z}^2}{\alpha^2} \varphi^2 h_{\tau\tilde{z}}) + \\
 &+ d\tilde{z} \wedge d\varphi d\tilde{z} \wedge d\varphi (-\frac{\alpha^2}{2} h_{\tau\tau,\varphi\varphi} - \frac{1}{2} h_{\tau\tilde{z}\tilde{z}}) + \\
 &+ d\tilde{z} \wedge d\varphi d\tilde{z} \wedge d\varphi (-\frac{\alpha^2}{2} \varphi h_{\tau\tau,\varphi} - \frac{1}{2} \varphi^2 h_{\tau\tilde{z}\tilde{z}}) + \quad (3.C.4) \\
 &+ d\varphi \wedge d\varphi d\varphi \wedge d\varphi (-\frac{1}{2} \varphi^2 h_{\tau\varphi\varphi} - \frac{1}{2} \varphi h_{\tau\varphi}) + \\
 &+ (d\tau \wedge d\tilde{z} d\tau \wedge d\varphi + \text{c.v.}) (-h_{\tau\tau,\varphi\tilde{z}}) + \\
 &+ (d\tau \wedge d\varphi d\tilde{z} \wedge d\varphi + \text{c.v.}) (-h_{\tau\tilde{z},\varphi\varphi} + \frac{1}{2} \frac{1}{\tilde{z}} h_{\tau\tau}) + \\
 &+ (d\tau \wedge d\varphi d\tilde{z} \wedge d\varphi + \text{c.v.}) (-\varphi h_{\tau\tilde{z},\varphi} + \frac{1}{2} \frac{1}{\tilde{z}} \varphi^2 h_{\tau\tau}) + \\
 &+ (d\tilde{z} \wedge d\varphi d\varphi \wedge d\varphi + \text{c.v.}) (-\frac{1}{2} \varphi^2 h_{\tau\tilde{z}\varphi}) .
 \end{aligned}$$

Nyní již zbývají jen dlouhé a úmorné výpočty derivací funkcí $h_{\tau\tau}$, $h_{\tau\bar{\tau}}$, h . Výsledky jsou

$$\chi_{,\bar{z}} = 2\bar{z}, \quad \chi_{,q} = 2q, \quad ,$$

$$\xi_{,\bar{z}} = \frac{2}{\xi} (-a^2 + q^2 + \bar{z}^2) \bar{z}, \quad \xi_{,q} = \frac{2\chi_q}{\xi}, \quad ,$$

$$h_{\tau\bar{z},q} = L \frac{q}{a\bar{z}}, \quad ,$$

$$h_{\tau\bar{z},qq} = L \frac{1}{a\bar{z}}, \quad ,$$

$$h_{,q\bar{z}} = L \frac{2}{a\bar{z}},$$

$$h_{,\bar{z}\bar{z}} = L \frac{2\chi}{\xi^3 \bar{z}} (\chi^2 - 6a^2 \bar{z}^2) + \frac{2a^2 \bar{z}}{\xi^3}, \quad ,$$

$$h_{,q\bar{q}} = -L \frac{4a^2 q \chi}{\xi^2} - L \frac{2}{\xi^2} (-a^2 + q^2 + \bar{z}^2), \quad ,$$

$$h_{,q\bar{z}} = L \frac{48a^4 q \bar{z}}{\xi^5} (-a^2 - q^2 + \bar{z}^2),$$

$$(q_h)_{,q} = L \frac{8 \cdot 12 a^4 q^2 \bar{z}^2}{\xi^5} - L \frac{16a^4 q}{\xi^3}, \quad ,$$

$$h_{\tau\tau,q} = L \frac{\chi_q}{a^2 \xi^3} (\chi^2 - 6a^2 \bar{z}^2), \quad ,$$

$$h_{\tau\tau,qq} = L \frac{48a^2 q^2 \bar{z}^4}{\xi^5} + L \frac{\chi}{a^2 \xi^3} (\chi^2 - 6a^2 \bar{z}^2), \quad ,$$

$$h_{\tau\tau,\bar{z}} = L \frac{\chi \bar{z}}{a^2 \xi^3} (\chi^2 - 6a^2 \bar{z}^2) + L \frac{4a^2 \bar{z}^3}{\xi^2}, \quad ,$$

$$h_{\tau\tau,\bar{z}\bar{z}} = L \frac{12 a^2 \bar{z}^2}{\xi^5} (\bar{z}^2 - a^2 - q^2)^2 + L \frac{\chi}{a^2 \xi^3} (\chi^2 - 6a^2 \bar{z}^2), \quad ,$$

$$h_{,\bar{z}\bar{z}} = -L \frac{8 \cdot 12 a^4 q^2 \bar{z}^2}{\xi^5} - L \frac{2\chi}{\xi^2 \bar{z}^2} (\chi^2 - 6a^2 \bar{z}^2) + L \frac{8a^4}{\xi^3}. \quad .$$

(3.C.5)

Dosazením do (3.C.4) dostaneme pro nenulové složky

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} R_{\tau z \bar{\tau} \bar{z}} &= \frac{24a^2\varrho^2\bar{z}^4}{\xi^5} - \frac{4a^2\bar{z}^2}{\xi^3}, & \frac{1}{L} R_{\tau z \bar{\tau} \bar{\tau}} &= -\frac{12a^2\varrho^2\bar{z}^3}{\xi^5}(-a^2-\varrho^2+\bar{z}^2), \\ \frac{1}{L} R_{\tau \bar{\tau} \bar{\tau} \bar{\tau}} &= -\frac{24a^2\varrho^2\bar{z}^4}{\xi^5} + \frac{2a^2\bar{z}^2}{\xi^3}, & \frac{1}{L} R_{\tau \bar{\tau} \bar{\tau} \bar{\tau}} &= \frac{2a^2\varrho^2\bar{z}^2}{\xi^3}, \\ \frac{1}{L} R_{z \bar{\tau} \bar{\tau} \bar{\tau}} &= \frac{24a^4\varrho^4\bar{z}^2}{\xi^5} - \frac{2a^4\varrho^2}{\xi^3}, & \frac{1}{L} R_{\bar{z} \bar{\tau} \bar{\tau} \bar{\tau}} &= -\frac{2a^4}{\xi^3}, \\ \frac{1}{L} R_{\tau \bar{\tau} \bar{\tau} \bar{\tau}} &= -\frac{24a^4\varrho^4\bar{z}^2}{\xi^5} - \frac{4a^4\varrho^2}{\xi^3}, & \frac{1}{L} R_{\bar{z} \bar{\tau} \bar{\tau} \bar{\tau}} &= -\frac{12a^4\varrho^4\bar{z}^2}{\xi^5} + \frac{4a^4\varrho^2}{\xi^3}. \end{aligned} \quad (3.C.6)$$

Transformací do souřadného systému U, \bar{U} dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} R_{uvu\bar{s}} &= -\frac{3\varrho^2\nu}{32aR^5}(-a^2-\varrho^2+uv), & \frac{1}{L} R_{u\bar{v}u\bar{s}} &= -\frac{3\varrho^2\nu^2}{16aR^5}, \\ \frac{1}{L} R_{uvu\bar{s}} &= \frac{3\varrho u}{32aR^5}(-a^2-\varrho^2+uv), & \frac{1}{L} R_{u\bar{v}u\bar{s}} &= -\frac{3\varrho^2u^2}{16aR^5}, \\ \frac{1}{L} R_{u\bar{v}\bar{v}\bar{s}} &= -\frac{3\varrho^2\nu}{16aR^5}(-a^2-\varrho^2+uv), & \frac{1}{L} R_{u\bar{v}\bar{v}\bar{s}} &= \frac{3\varrho^4\nu^2}{16aR^5}, \\ \frac{1}{L} R_{u\bar{v}\bar{v}\bar{s}} &= -\frac{3\varrho^3u}{16aR^5}(-a^2-\varrho^2+uv), & \frac{1}{L} R_{u\bar{v}\bar{v}\bar{s}} &= \frac{3\varrho^6u^2}{16aR^5}, \\ \frac{1}{L} R_{uvu\bar{v}} &= \frac{3\varrho^2uv}{16aR^5} - \frac{a}{8R^3}, & \frac{1}{L} R_{\bar{v}\bar{v}\bar{v}\bar{s}} &= -\frac{3\varrho^4uv}{4aR^5} + \frac{\varrho^2a}{2R^3}, \\ \frac{1}{L} R_{u\bar{v}\bar{v}\bar{v}} &= \frac{3\varrho^4uv}{16aR^5} - \frac{a\varrho^2}{8R^3}, & \frac{1}{L} R_{u\bar{v}\bar{v}\bar{v}} &= \frac{3\varrho^2uv}{16aR^5} - \frac{a\varrho^2}{8R^3}. \end{aligned} \quad (3.C.7)$$

Dále spočteme linearizovaný Riemannův tenzor křivosti ${}^{un}R$ metriky částice stojící v $z=a$, $x,y=0$. Vycházíme z metriky

$${}^{un}h = \frac{1}{2} \frac{1}{R} \left(\frac{1}{2} du^2 + \frac{1}{2} dv^2 + {}^{un}g \right), \quad (3.C.8)$$

kde

$$R = \sqrt{\varrho^2 + (z-a)^2}, \quad z = \frac{1}{2}(u+v). \quad (3.C.9)$$

Platí

$$\begin{aligned} d \frac{1}{R} &= -\frac{1}{R^3} (\varphi d\varphi + (z-a) dz) , \\ \partial(d \frac{1}{R}) &= \frac{2}{R^5} (\varphi d\varphi + (z-a) dz)(\varphi d\varphi - (z-a) dz) - \frac{1}{R^2} (\varphi^2 g + dz^2) . \end{aligned} \quad (3.C.10)$$

Odtud přímým vyčíslením

$$\begin{aligned} L {}^{un}Q_{abc} &= L \partial_{[a} {}^{un}h_{b]c} = d_u u \wedge d_v v d_w w \frac{1}{2} \frac{\alpha}{4R^3} + \\ &+ d_u u \wedge d_v v d_w w \frac{1}{2} \frac{\alpha \varphi}{4R^3} + \\ &+ d_u u \wedge d_v v d_w w \frac{1}{4} \frac{\alpha(z-a)}{4R^3} + \\ &+ d_u u \wedge d_v v d_w w \left(-\frac{1}{4} \frac{\alpha(z-a)}{4R^3} \right) + \\ &+ d_u u \wedge d_v v d_w w \left(-\frac{1}{2} \frac{\alpha(z-a)}{4R^3} \right) + \\ &+ d_u u \wedge d_v v d_w w \left(-\frac{1}{2} \frac{\alpha(z-a)}{4R^3} \right) + \\ &+ d_u u \wedge d_v v d_w w \left(-\frac{\alpha^3 \varphi}{4R^3} \right) + \\ &+ d_u u \wedge d_v v d_w w \left(-\frac{1}{2} \frac{\alpha(z-a)\varphi^2}{4R^3} \right) + \\ &+ d_u u \wedge d_v v d_w w \left(-\frac{1}{2} \frac{\alpha(z-a)\varphi^2}{4R^3} \right) , \end{aligned} \quad (3.C.11)$$

$${}^{un}R_{u\varphi u\varphi} = {}^{un}R_{v\varphi v\varphi} = -L \frac{3\varphi^2 a}{R^5} ,$$

$${}^{un}R_{u\varphi v\varphi} = {}^{un}R_{v\varphi u\varphi} = L \left(-\frac{3(z-a)^2 a}{R^5} + \frac{a}{R^3} \right) ,$$

$${}^{un}R_{u\varphi w\varphi} = -{}^{un}R_{v\varphi w\varphi} = -L \frac{3(z-a)a\varphi}{R^5} ,$$

$${}^{un}R_{u\varphi v\varphi} = {}^{un}R_{v\varphi v\varphi} = L \frac{3\varphi^4 a}{R^5} ,$$

$${}^{un}R_{u\varphi w\varphi} = -{}^{un}R_{v\varphi w\varphi} = -L \frac{6\varphi^3(z-a)a}{R^5} ,$$

$${}^{un}R_{\varphi\varphi\varphi\varphi} = L \left(-\frac{12\varphi^4 a}{R^5} + \frac{8\varphi^2 a}{R^3} \right) , \quad {}^{un}R_{u\varphi w\varphi} = L \left(-\frac{3\varphi^3(z-a)}{R^5} + \frac{a\varphi^2}{R^3} \right) .$$

Dodatek 3.D Distribuční limity některých funkcí

Nejdříve nalezneme distribuční limitu funkcí

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{R} \Theta(u_{l_*} - u) , \quad \frac{1}{R^3} \Theta(u_{l_*} - u) , \\ \frac{\eta^2}{R^5} \Theta(u_{l_*} - u) , \quad \frac{(z-a)\eta}{R^5} \Theta(u_{l_*} - u) \end{aligned} \quad (3.D.1)$$

pro $\eta \rightarrow \infty$. Zde (viz. (3.B.23))

$$R = \sqrt{\rho^2 + (z-a)^2}$$

$$z = \frac{1}{2} (\eta u + \frac{1}{\eta} v) , \quad (3.D.2)$$

$$u_{l_*} = \frac{\alpha^2 + \rho^2}{\alpha \eta} \left(1 + \frac{\rho^2}{(\alpha^2 + \rho^2)} \frac{v}{\alpha \eta} + O\left[\frac{1}{\eta^2}\right] \right) ,$$

Pro $u = U[\eta]$ ¹⁶⁾ máme

$$\frac{\eta}{R} = \frac{1}{|u|} + O\left[\frac{1}{\eta}\right] . \quad (3.D.3)$$

V blízkosti $u=0$ může však být chování jiné. Zkoumejme tedy funkci

$$S(u) = \frac{\eta}{R} \Theta(u_{l_*} - u) - \frac{1}{|u|} \Theta(-\frac{\alpha}{\eta} - u) , \quad (3.D.4)$$

která je lokalizovaná v oblasti $u=0$ (pro η nekonečné). Pro libovolnou testovací funkci $\varphi(u)$ můžeme psát

¹⁶⁾ $\alpha = O[\eta^*]$ znamená, že $\frac{\alpha}{\eta^*}$ je nejvýše konečné číslo. $a = U[\eta^*]$ znamená, že $\frac{a}{\alpha} = O\left[\frac{1}{\eta^*}\right]$, tj. $\frac{\eta^*}{a}$ je nejvýše konečné. Tedy $a = U[\eta^*]$ znamená $a \neq O\left[\frac{1}{\eta}\right]$.

$$\int du S(u) \varphi(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} \int_{u=A}^{u=B} u^m S(u) du + O\left[\frac{1}{\eta}\right], \quad (3.D.5)$$

kde jsme využili toho, že $S(u) = O\left[\frac{1}{\eta}\right]$ pro $u = U[\eta^\circ]$ a že pro $u = O\left[\frac{1}{\eta}\right]$ lze $\varphi(u)$ nahradit jejím rozvojem v u . Integrační meze A, B jsou zvoleny konečné, což lze zvolutit díky vlastnostem testovací funkce (např. kompaktní nosič). Dále platí

$$\begin{aligned} \int_{u=A}^{u=B} \frac{u^m}{R} du &= \frac{2}{\eta^{m+1}} \int_{u=A}^{u=b} \frac{\left(\zeta - \frac{u}{2\eta}\right)^m}{(\zeta^2 + (\zeta - u)^2)^{1/2}} d(\zeta - u) = \\ &= \frac{2}{\eta^{m+1}} \int_{u=A}^{u=b} \frac{(\zeta - u)^m}{(\zeta^2 + (\zeta - u)^2)^{1/2}} d(\zeta - u) \left(1 + O\left[\frac{1}{\eta}\right]\right) = \\ &= \frac{2}{\eta^{m+1}} \int_{u=A}^{u=b} \varrho^m \operatorname{sh}^m \vartheta d\vartheta, \end{aligned} \quad (3.D.6)$$

kde jsme užili substituce

$$(\zeta - u) = \varrho \operatorname{sh} \vartheta. \quad (3.D.7)$$

Integraci per partes dostaneme

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sh}^m \vartheta d\vartheta &= \frac{1}{m} \operatorname{ch} \vartheta \operatorname{sh}^{m-1} \vartheta - \frac{m-1}{m(m-2)} \operatorname{ch} \vartheta \operatorname{sh}^{m-2} \vartheta + \dots \\ &\quad + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{(m-1)(m-3)\dots 1}{m(m-2)\dots 1} \operatorname{ch} \vartheta \quad \text{pro } m \text{ liché}, \\ \int \operatorname{sh}^m \vartheta d\vartheta &= \frac{1}{m} \operatorname{ch} \vartheta \operatorname{sh}^{m-1} \vartheta - \frac{m-1}{m(m-2)} \operatorname{ch} \vartheta \operatorname{sh}^{m-2} \vartheta + \dots \\ &\quad - \frac{(m-1)\dots 3}{m(m-2)\dots 2} \operatorname{ch} \vartheta \operatorname{sh} \vartheta + (-1)^{\frac{m-2}{2}} \frac{(m-1)(m-3)\dots 1}{m(m-2)\dots 2} \vartheta \quad \text{pro } m \text{ sude}. \end{aligned} \quad (3.D.8)$$

Uvážíme-li řád mezi integrování $A = O[\eta^\circ]$ a $b = O\left[\frac{1}{\eta}\right]$, tak

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \vartheta \Big|_{u=A} &= \frac{\zeta - u}{\varrho} \Big|_{u=A} = O[\eta], \quad \operatorname{sh} \vartheta \Big|_{u=b} = O[\eta^\circ], \\ \operatorname{ch} \vartheta \Big|_{u=A} &= \sqrt{1 + \left(\frac{\zeta - u}{\varrho}\right)^2} \Big|_{u=A} = O[\eta], \quad \operatorname{ch} \vartheta \Big|_{u=b} = O[\eta^\circ]. \end{aligned} \quad (3.D.9)$$

Po dosazení do (3.D.6) dostaneme pro $m > 0$

$$\begin{aligned} \int_{u=A}^{u=b} \frac{u^m}{|u|} du &= \frac{2^{m+1}}{m\gamma^{m+1}} \left. \operatorname{erf} u \operatorname{sh}^{m-1} u \right|_{u=A} \left(1 + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] \right) = \\ &= -\frac{1}{m\gamma} |u| u^{m-1} \Big|_{u=A} \left(1 + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] \right) = \\ &= \frac{1}{m\gamma} A^m \left(1 + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] \right) . \end{aligned} \quad (3.D.10)$$

Obdobně pro $m < 0$, $A = O[\gamma^0] < 0$ a $b = O[\frac{1}{\gamma}] < 0$ máme

$$\int_{u=A}^{u=b} \frac{u^m}{|u|} du = -\frac{1}{m} \left[u^m \right]_{u=A}^{u=b} = \frac{1}{m} A^m \left(1 + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] \right) . \quad (3.D.11)$$

Dosadíme (3.D.10) a (3.D.11) do (3.D.5)

$$\begin{aligned} \int S \varphi du &= \varphi(0) \int_{u=A}^{u=b} S du + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} \left(\int_{u=A}^{u=u_b} du \frac{u^m \gamma}{|u|} - \int_{u=A}^{u=\frac{a}{\gamma}} du \frac{u^m}{|u|} \right) = \\ &= \varphi(0) \left(\int_{u=A}^{u=u_b} du \frac{1}{|u|} - \int_{u=A}^{u=\frac{a}{\gamma}} du \frac{1}{|u|} \right) + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] = \\ &= \varphi(0) \left(\left[\operatorname{arsh} \frac{|z-a|}{\gamma} \right]_{u=A}^{u=u_b} + \left[\ln \frac{|u|}{a} \right]_{u=A}^{u=\frac{a}{\gamma}} \right) + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] = \\ &= \varphi(0) \left(\ln \left(\frac{|z-a|}{\gamma} + \sqrt{1 + \left(\frac{|z-a|}{\gamma} \right)^2} \right) \Big|_{u=u_b} + \ln \left(-\frac{|z-a|}{\gamma} + \sqrt{1 + \left(\frac{|z-a|}{\gamma} \right)^2} \right) \Big|_{u=A} \right) + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] \\ &\quad + \ln \frac{1}{\gamma} - \ln \frac{|A|}{a} + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] = \\ &= \varphi(0) \left(\ln \left(\frac{a^2 - a^2}{2a\gamma} + \frac{a^2 + a^2}{2a\gamma} \right) + \ln \frac{|A|\gamma}{\gamma} + \ln \left(1 + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] \right) - \ln \frac{|A|\gamma}{a} + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] \right) = \\ &= O\left[\frac{1}{\gamma}\right] \end{aligned} \quad (3.D.12)$$

Dostáváme tedy

$$\frac{\gamma}{\pi} O(u - u_b) = \frac{1}{|u|} O(-\frac{a}{\gamma} - u) + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] \quad (3.D.13)$$

a obě funkce můžeme při nekonečném γ ztotožnit.

Funkce $\frac{1}{R^3}, \frac{\gamma^2}{R^5}, \frac{\gamma^{(z-a)}}{R^5}$ jsou pro $u \in U[\gamma]$ řádu $O\left[\frac{1}{\gamma}\right]$. Zbývá vypočítat chování v okolí $u=0$. Můžeme psát

$$\int_{u=R}^{u=b} \frac{U^m}{R^3} du = \frac{2^{m+1}}{\gamma^{m+1}} \int_{(|z-a|=\theta[\gamma])}^{(|z-a|=\theta[\gamma])} d(|z-a|) \frac{((z-a)+a-\frac{1}{2}R)^m}{(\gamma^2 + (z-a)^2)^{\frac{m+1}{2}}} . \quad (3.D.14)$$

Pro $m \geq 2$ je zřejmě dominantní chování v oblasti velkých hodnot $(z-a)$. Zde můžeme integrand změnit - v čitateli ponechat pouze nejvyšší mocninu v $(z-a)$ a ve jmenovateli $|z-a|^3$, tj.

$$\begin{aligned} \int_{u=R}^{u=b} du \frac{U^m}{R^3} &= \frac{2^{m+1}}{\gamma^{m+1}} \int_{(|z-a|=\theta[\gamma])}^{(|z-a|=\theta[\gamma])} \frac{(z-a)^m}{|z-a|^3} d(|z-a|) \left(1 + O\left[\frac{1}{\gamma}\right]\right) = \\ &= \frac{1}{\gamma^{m+1}} \left(O[\gamma^{m-2}] + O[\ln \gamma] \right) = \\ &= O\left[\frac{1}{\gamma^2}\right] \end{aligned} \quad \text{pro } m \geq 2 \quad (3.D.15)$$

Obdobně

$$\int_{u=R}^{u=b} du \frac{U^m}{R^5} = O\left[\frac{1}{\gamma^4}\right] \quad \text{pro } m \geq 4 \quad (3.D.16)$$

Pro malé m máme přesným zintegrováním (viz. např. [15] 2.271-2.273)

$$\begin{aligned} \int_{u=R}^{u=b} du \frac{U^m}{R^3} &= \frac{2}{\gamma} \left[\frac{1}{\gamma^2} \frac{(z-a)}{R} \right]_{u=R}^{u=b} \quad \text{pro } m=0 \\ &= \frac{4}{\gamma^2} \left[\frac{a}{\gamma^2} \frac{(z-a)}{R} - \frac{1}{\gamma} \right]_{u=R}^{u=b} \left(1 + O\left[\frac{1}{\gamma}\right]\right) = O\left[\frac{1}{\gamma^2}\right] \quad \text{pro } m=1 , \end{aligned} \quad (3.D.17)$$

$$\begin{aligned} \int_{u=R}^{u=b} du \frac{U^m}{R^5} &= \frac{2}{\gamma} \left[\frac{1}{\gamma^4} \left(\frac{(z-a)}{R} - \frac{1}{3} \frac{(z-a)^3}{R^3} \right) \right]_{u=R}^{u=b} \quad \text{pro } m=0 , \\ &= \frac{4}{\gamma^2} \left[-\frac{1}{3} \frac{1}{R^3} + \frac{a}{\gamma^4} \left(\frac{(z-a)}{R} - \frac{1}{3} \frac{(z-a)^3}{R^3} \right) \right]_{u=R}^{u=b} \left(1 + O\left[\frac{1}{\gamma}\right]\right) \quad \text{pro } m=1 , \\ &= O\left[\frac{1}{\gamma^3}\right] \quad \text{pro } m=2 , \\ &= O\left[\frac{1}{\gamma^4}\right] \quad \text{pro } m=3 . \end{aligned} \quad (3.D.18)$$

Stejným způsobem dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{u=A}^{u=b} du \frac{(z-a) u^m}{\eta^5} &= \frac{2}{3} \left[-\frac{1}{3\eta^3} \right]_{u=A}^{u=b} \quad \text{pro } m=0 , \\ &= \frac{4}{3} \left[\frac{(z-a)^3}{3\eta^2\eta^3} - \frac{a}{3\eta^3} \right]_{u=A}^{u=b} \left(1+O\left(\frac{1}{\eta}\right) \right) \quad \text{pro } m=1 , \quad (3.D.19) \\ &= O\left[\frac{1}{\eta^3}\right] \quad \text{pro } m \geq 2 . \end{aligned}$$

Nyní již můžeme zkoumat distribuční chování funkcí (3.D.1) v okolí $u=0$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\eta^3} \Theta(u|_*-u), \varphi \right\rangle &= \int_{u=A}^{u=B} du \frac{1}{\eta^3} \Theta(u|_*-u) \varphi(u) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(0) \int_{u=A}^{u=u_*} \frac{u^m}{\eta^3} du = O\left(\frac{1}{\eta}\right) . \quad (3.D.20) \end{aligned}$$

t.j. pro η nekonečné

$$\frac{1}{\eta^3} \Theta(u|_*-u) = 0 . \quad (3.D.21)$$

Dále

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\gamma(z-a)}{\eta^5} \Theta(u|_*-u), \varphi \right\rangle &= \int_{u=A}^{u=B} du \frac{\gamma(z-a)}{\eta^5} \Theta(u|_*-u) \varphi(u) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(0) \gamma \int_{u=A}^{u=u_*} \frac{(z-a) u^m}{\eta^5} du = \\ &= \varphi(0) 2 \left[-\frac{1}{3\eta^2} \right]_{u=A}^{u=u_*} + O\left[\frac{1}{\eta}\right] = \\ &= -\varphi(0) \frac{2}{3} \left(\frac{2a}{a^2+\eta^2} \right)^3 + O\left[\frac{1}{\eta}\right] . \quad (3.D.22) \end{aligned}$$

t.j. pro η nekonečné

$$\frac{\gamma(z-a)}{\eta^5} \Theta(u|_*-u) = -\frac{2}{3} \left(\frac{2a}{a^2+\eta^2} \right)^3 \delta(u) \quad (3.D.23)$$

a konečně

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{\gamma^{(1z-a)}}{\eta^5} \Theta(u_{l_*}-u), \varphi \right\rangle &= \int_{-\infty}^{u_*} du \frac{\gamma^2}{\eta^5} \Theta(u_{l_*}-u) \varphi(u) = \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(0) \gamma^2 \int_{-\infty}^{u_*} \frac{u^m}{\eta^5} du + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] = \\
 &= \varphi(0) 2\gamma \left[\frac{1}{\eta^4} \left(\frac{1z-a}{\eta} - \frac{1}{3} \frac{(1z-a)^3}{\eta^3} \right) \right]_{-\infty}^{u_*} + 4\varphi'(0) \left[-\frac{1}{\eta^2} + \frac{a}{\eta^4} \left(\frac{1z-a}{\eta} - \frac{1}{3} \frac{(1z-a)^3}{\eta^3} \right) \right]_{-\infty}^{u_*} + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] = \\
 &= -\varphi(0) \gamma \frac{8(3a^2+\rho^2)}{3(\rho^2+a^2)^3} + \varphi(0) \frac{32a^3N}{(\rho^2+a^2)^4} + 16\varphi'(0) \frac{a}{3(a^2+\rho^2)^2} + O\left[\frac{1}{\gamma}\right]
 \end{aligned} \tag{3.D.24}$$

tj. pro γ velké

$$\frac{\gamma^2}{\eta^5} \Theta(u_{l_*}-u) = \gamma \delta(u) \frac{8(3a^2+\rho^2)}{3(\rho^2+a^2)^3} + \delta(u) \frac{32Na^3}{(\rho^2+a^2)^4} - \delta'(u) \frac{16a}{3(a^2+\rho^2)^2} . \tag{3.D.25}$$

S těmito výsledky již můžeme provést limitu $\gamma \rightarrow \infty$ linearizovaného Riemannova tensoru ${}^{un}R$ (${}^{un}R$ viz. (3.4.48) se záměnou $u \leftrightarrow {}'u$, $v \leftrightarrow {}'v$). Dostáváme

$$\begin{aligned}
 {}^{1un}R \Theta(u_{l_*}-u) &= (du_1 d\eta du_1 d\eta - \rho^2 du_1 d\eta du_1 d\varphi) \cdot \\
 &\quad \cdot \left(-\gamma \delta(u) \frac{\rho^2(3a^2+\rho^2)a}{2(a^2+\rho^2)^3} - \delta(u) \frac{6Na^4\rho^2}{(a^2+\rho^2)^4} + \delta'(u) \frac{a^2\rho^2}{(a^2+\rho^2)^2} \right) + \\
 &\quad \cdot \left(\frac{1}{2} du_1 dv_1 du_1 d\eta + \dots + \rho^2 du_1 d\eta d\varphi d\eta d\varphi + \dots \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \left(\frac{2\rho a^4}{(a^2+\rho^2)^3} \delta(u) \right) + O\left[\frac{1}{\gamma}\right]
 \end{aligned} \tag{3.D.26}$$

V dalším budeme počítat povrchový člen ${}^{1un}R$ (viz. (3.4.46))

$${}^{1bd}R_{abcd} = \left({}^{ext}Q_{ab|c} + {}^{int}Q_{ab|c} - {}^{un}Q_{ab|c} - {}^{un}Q_{ab|c} \right) d_a({}'t - {}'r) \delta({}'t - {}'r) \delta({}'t - {}'r) . \tag{3.D.27}$$

Plati

$$d(t'-n) = \frac{1}{2} \eta \left(1 - \frac{t-z-a}{n}\right) du - \frac{1}{2} \eta \left(1 + \frac{t-z-a}{n}\right) dv - \frac{\varrho}{n} d\varphi , \quad (3.D.28)$$

$$\mathcal{S}(t'-n) = \left| (t'-n)_{uv} \right|^{-1} \delta(u-u_*) = \frac{2}{\eta(1 - \frac{t-z-a}{n})} \delta(u-u_*) , \quad (3.D.29)$$

tj.

$$d(t'-n) \mathcal{S}(t'-n) = \left(du - \frac{\varrho}{(a\gamma-v)^2} dv - \frac{2\varrho}{(a\gamma-v)} d\varphi \right) \delta(u-u_*) . \quad (3.D.30)$$

Transformací (3.C.3) do souřadnic u, v, ϱ, φ dostaneme

$$\begin{aligned} Q = & du \wedge dv \wedge du \left(-\frac{1}{2u} \right) \left(Y + 1 + \underbrace{\frac{4\tilde{z}^2 a^4}{\xi^3}}_{\text{F}} \right) + \\ & + du \wedge dv \wedge dv \left(-\frac{1}{2v} \right) \left(Y - 1 + \underbrace{\frac{4\tilde{z}^2 a^4}{\xi^3}}_{\text{F}} \right) + \\ & + du \wedge d\varphi \wedge du \left(-\frac{\varrho}{4u^2} \right) (Y+1) + \\ & + dv \wedge d\varphi \wedge dv \left(-\frac{\varrho}{4v^2} \right) (Y-1) + \\ & + du \wedge d\varphi \wedge d\varphi \left(\frac{1}{4u} \right) \left(Y + 1 + \underbrace{\frac{4\tilde{z}^2 a^4}{\xi^3}}_{\text{F}} \right) + \\ & + du \wedge d\varphi \wedge d\varphi \left(\frac{\varrho^2}{4u} \right) \left(Y + 1 + \underbrace{\frac{4\tilde{z}^2 a^4}{\xi^3}}_{\text{F}} \right) + \\ & + dv \wedge d\varphi \wedge d\varphi \left(\frac{1}{4v} \right) \left(Y - 1 + \underbrace{\frac{4\tilde{z}^2 a^4}{\xi^3}}_{\text{F}} \right) + \\ & + dv \wedge d\varphi \wedge d\varphi \left(\frac{\varrho^2}{4v} \right) \left(Y - 1 + \underbrace{\frac{4\tilde{z}^2 a^4}{\xi^3}}_{\text{F}} \right) + \\ & + d\varphi \wedge d\varphi \wedge d\varphi \left(\frac{a^2 \varrho^3 \chi}{\xi^3} - \frac{\varrho}{2\xi} (-\tilde{a}^2 + \tilde{\varrho}^2 + \tilde{z}^2) \right) , \end{aligned} \quad (3.D.31)$$

kde

$$Y = \frac{\chi}{\xi^3} (\chi^2 - 6a^2 \tilde{z}^2) . \quad (3.D.32)$$

Odečteme-li od tohoto Q získané z (3.C.11) záměrou $u \leftrightarrow u'$, $v \leftrightarrow v'$ dostaneme

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{L} [Q]_* &\equiv \frac{1}{L} (\overset{\text{acc}}{Q} - \overset{\text{un}}{Q}) \Big|_* = \\
 &= d\eta d\alpha d\omega \left(-\frac{1}{8u} \left(Y + 1 + \frac{4\tilde{z}^2 a^4}{\xi^3} \right) - \frac{\gamma}{4} \frac{(\tilde{z}-a)a}{4' \eta^3} \right) \Big|_* + \\
 &+ d\eta d\alpha d\omega \left(\frac{1}{8u} \left(Y - 1 + \frac{4\tilde{z}^2 a^4}{\xi^3} \right) + \frac{1}{4\eta} \frac{(\tilde{z}-a)a}{4' \eta^2} \right) \Big|_* + \\
 &+ d\eta d\alpha d\omega \left(-\frac{\rho}{4u^2} (Y+1) - \frac{\gamma^2}{2} \frac{\rho a}{4' \eta^3} \right) \Big|_* + \\
 &+ d\eta d\alpha d\omega \left(-\frac{\rho}{4u^2} (Y-1) - \frac{1}{2\eta^2} \frac{\rho a}{4' \eta^3} \right) \Big|_* + \\
 &+ d\eta d\alpha d\omega \left(\frac{1}{4u} \left(Y + 1 + \frac{4\tilde{z}^2 a^4}{\xi^3} \right) + \frac{\gamma}{2} \frac{(\tilde{z}-a)a}{4' \eta^3} \right) \Big|_* + \\
 &+ d\eta d\alpha d\omega d\varphi \left(\frac{1}{4u} \left(Y + 1 + \frac{4\tilde{z}^2 a^4}{\xi^3} \right) + \frac{\gamma}{2} \frac{(\tilde{z}-a)a}{4' \eta^3} \right) \Big|_* + \\
 &+ d\eta d\alpha d\omega d\varphi \left(\frac{1}{4u} \left(Y - 1 + \frac{4\tilde{z}^2 a^4}{\xi^3} \right) + \frac{1}{2\eta} \frac{(\tilde{z}-a)a}{4' \eta^3} \right) \Big|_* + \\
 &+ d\eta d\alpha d\omega d\varphi \left(\frac{1}{4u} \left(Y - 1 + \frac{4\tilde{z}^2 a^4}{\xi^3} \right) + \frac{1}{2\eta} \frac{(\tilde{z}-a)a}{4' \eta^3} \right) \Big|_* + \\
 &+ d\eta d\alpha d\omega d\varphi \left(-\frac{\rho^2 \rho^3 \chi}{\xi^3} - \frac{\rho}{2\xi} (-a^2 + \tilde{z}^2 + \tilde{z}^2) + \frac{\rho^3 a}{4' \eta^3} \right) \Big|_* . \tag{3.D.33}
 \end{aligned}$$

Rozvoj $[\overset{\text{co}}{Q}]_*$ v γ (využitím rozvojů z appendixu 3.B) je

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{L} [\overset{\text{co}}{Q}]_* &= d\eta d\alpha d\omega \left(-\gamma \frac{\alpha \rho^2 (3a^2 + \rho^2)}{4(a^2 + \rho^2)^3} + O[\gamma^0] \right) + \\
 &+ d\eta d\alpha d\omega \left(-\gamma \frac{\rho^2 \alpha^2 \rho (3a^2 + \rho^2)}{2(a^2 + \rho^2)^3} + \gamma \frac{\alpha \rho u}{(a^2 + \rho^2)^4} (\rho^4 + 4\rho^2 a^2 - 3a^4) + O[\gamma^0] \right) + \\
 &+ d\eta d\alpha d\omega d\varphi \left(-\frac{\rho(\rho^2 - a^2)(\rho^4 + a^4 + 4a^2 \rho^2)}{2(a^2 + \rho^2)^3} + O\left[\frac{1}{\tilde{z}}\right] \right) \tag{3.D.34} \\
 &+ (d\eta d\alpha d\omega d\varphi + d\eta d\alpha d\omega d\varphi \rho^2) \cdot \\
 &\cdot \left(\gamma \frac{\rho^2 (3a^2 + \rho^2) a}{2(\rho^2 + a^2)^3} + \frac{u \rho^2}{2(a^2 + \rho^2)^4} (9a^4 - 4a^2 \rho^2 - \rho^4) + O\left[\frac{1}{\tilde{z}}\right] \right) .
 \end{aligned}$$

Obdobně pro částici

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{L} [\overset{\text{co}}{Q}]_* &\equiv \frac{1}{L} (\overset{\text{acc}}{Q} - \overset{\text{un}}{Q}) \Big|_* = \\
 &= d\eta d\alpha d\omega d\varphi \left(-\frac{\rho}{2} \right) + O\left[\frac{1}{\tilde{z}}\right] . \tag{3.D.35}
 \end{aligned}$$

Součet příspěvků od obou částic je

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{L} ([{}^{(a)}Q]_* + [{}^{(b)}Q]_*) &= \\
 &= du_1 du_2 du (-\gamma \frac{\alpha \rho^2 (3\alpha^2 + \rho^2)}{4(\alpha^2 + \rho^2)^3} + O[\gamma]) + \\
 &+ du_1 d\rho du (-\gamma^2 \frac{\alpha^2 \rho (3\alpha^2 + \rho^2)}{2(\alpha^2 + \rho^2)^3} + \gamma \frac{\alpha \nu \alpha}{(\alpha^2 + \rho^2)^4} (\rho^4 + 4\rho^2 \alpha^2 - 3\alpha^4) + O[\gamma]) + \\
 &+ d\rho_1 d\rho d\varphi (-\frac{\rho^5 (3\alpha^2 + \rho^2)}{(\alpha^2 + \rho^2)^2} + O[\frac{1}{\gamma}]) + \\
 &+ (du_1 d\rho d\rho + \rho^2 du_1 d\rho d\varphi) * \\
 &\times \left(\gamma \frac{\alpha \rho^2 (3\alpha^2 + \rho^2)}{2(\rho^2 + \alpha^2)^3} + \frac{\alpha^2 \rho^2}{2(\alpha^2 + \rho^2)^4} (\beta \alpha^4 - 4\alpha^2 \rho^2 - \rho^4) + O[\frac{1}{\gamma}] \right) .
 \end{aligned} \tag{3.D.36}$$

Využitím (3.D.30) dostáváme

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{L} {}^{brd}R &= \delta(u_{l*} - u) \left[(du_1 d\rho du_2 d\rho - \rho^2 du_1 d\varphi du_2 d\varphi) * \right. \\
 &\quad \times \left(\gamma \frac{\alpha \rho^2 (3\alpha^2 + \rho^2)}{2(\alpha^2 + \rho^2)^3} + \frac{\rho^2 \nu}{2(\alpha^2 + \rho^2)^4} (\beta \alpha^4 - 4\alpha^2 \rho^2 - \rho^4) + O[\frac{1}{\gamma}] \right) + \\
 &+ (du_1 du_2 du_2 d\rho + \infty + \rho^2 du_1 d\varphi d\rho_1 d\varphi + \infty) * \\
 &\quad \left. \times \left(\frac{\rho^3 (3\alpha^2 + \rho^2)}{2(\alpha^2 + \rho^2)^3} + O[\frac{1}{\gamma}] \right) \right] .
 \end{aligned} \tag{3.D.37}$$

Využitím (3.A.31) můžeme psát

$$\begin{aligned}
 \gamma \delta(u - u_{l*}) &= \gamma \delta(u) - \delta'(u) u_{l*} \gamma + O[\frac{1}{\gamma}] = \\
 &= \gamma \delta(u) - \frac{\alpha^2 + \rho^2}{\alpha} \delta'(u) + O[\frac{1}{\gamma}] .
 \end{aligned} \tag{3.D.38}$$

Celkově tedy dostáváme výsledek

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{L} {}^{brd}R &= (du_1 d\rho du_2 d\rho - \rho^2 du_1 d\varphi du_2 d\varphi) * \\
 &\quad \times \left(\gamma \frac{\alpha \rho^2 (3\alpha^2 + \rho^2)}{2(\alpha^2 + \rho^2)^3} \delta(u) + \frac{\rho^2 \nu}{2(\alpha^2 + \rho^2)^4} (\beta \alpha^4 - 4\alpha^2 \rho^2 - \rho^4) \delta(u) - \frac{\rho^2 (3\alpha^2 + \rho^2)}{2(\alpha^2 + \rho^2)^2} \delta'(u) \right) + \\
 &+ \left(\frac{1}{2} du_1 du_2 du_2 d\rho + \infty + \rho^2 du_1 d\varphi d\rho_1 d\varphi + \infty \right) * \\
 &\quad \times \left(\frac{\rho^3 (3\alpha^2 + \rho^2)}{2(\alpha^2 + \rho^2)^3} \delta(u) \right) + O[\frac{1}{\gamma}] .
 \end{aligned} \tag{3.D.39}$$

Dodatek 3.E Výpočty metrik h a h^{sing}

Nejprve vyjádříme Bianchiho identity pro linearizovaný Riemannův tenzor (3.4.56)

$$\begin{aligned} \partial_{[e}^{ret} R_{bc]de} &= \partial_{[e}^{acc} R_{bc]de} (\Theta(u) + \partial_e^{sur} R_{bc]de}) = \\ &= (\partial_e^{acc} R_{bc]de}) \Theta(u) + \partial_e u^{acc} R_{bc]de} \Big|_{u=0} \delta(u) + \partial_e^{sur} R_{bc]de} . \end{aligned} \quad (3.E.1)$$

Přímým výpočtem za použití vztahů (3.C.2) a hodnot ${}^{acc}R$ na $u=0$ dostaneme

$$\begin{aligned} 3 \partial_{[e}^{ret} R_{bc]de} &= (3 \partial_{[e}^{acc} R_{bc]de}) \Theta(u) + \\ &+ du_1 du_1 d\varphi du_1 d\varphi {}^{acc} R_{\nu\eta\nu\eta} \Big|_* \delta(u) + \\ &+ du_1 du_1 d\varphi du_1 d\varphi (-g^2 {}^{acc} R_{\nu\eta\nu\eta} \Big|_*) \delta(u) + \\ &+ du_1 du_1 d\varphi du_1 du_1 (R_{\mu\nu\nu\eta} \Big|_* \delta(u) - \frac{1}{2} B_{1\mu}) + \\ &+ du_1 du_1 d\varphi du_1 d\varphi (R_{\mu\nu\nu\eta} \Big|_* \delta(u) + (g^2 A)_{,\eta} + g^2 B_{1\mu}) + \\ &+ du_1 du_1 d\varphi d\varphi du_1 d\varphi (R_{\nu\eta\eta\eta} \Big|_* \delta(u) - g^2 B_{1\mu}) + \quad (3.E.2) \\ &+ du_1 du_1 d\varphi du_1 d\varphi {}^{acc} R_{\nu\eta\eta\eta} \Big|_* \delta(u) + \\ &+ du_1 du_1 d\varphi du_1 d\varphi (R_{\nu\eta\eta\eta} \Big|_* \delta(u) - A_{1\mu} + \frac{1}{2} B_{1\eta}) + \\ &+ du_1 du_1 d\varphi du_1 d\varphi (g^2 R_{\nu\eta\eta\eta} \Big|_* \delta(u) + g^2 A_{1\mu} + \frac{1}{2} g^2 B) + \\ &+ du_1 d\varphi du_1 d\varphi du_1 d\varphi g^2 B_{1\mu} + \\ &+ (du_1 d\varphi du_1 d\varphi d\varphi du_1 d\varphi (g^2 B + {}^{acc} R_{\eta\eta\eta\eta} \Big|_* \delta(u) - (g^2 B)_{,\eta}) , \end{aligned}$$

kde složky ${}^{acc}R_{abcd}$ jsou dány v (3.4.47). Pro obecnou metriku tvaru

$$h^{\text{sing}} = M du^2 + N^{\nu\eta} g + P du d\varphi + Q du d\varphi \quad (3.E.3)$$

derivováním (opět s využitím (3.C.2)) máme

$$\begin{aligned}
{}^{sing}Q_{abc} &= \partial_{[a} {}^{sing}h_{bc]} = \\
& d_u d_v d_w (-\frac{1}{2} M_{uv}) + d_u d_v d_w (-\frac{1}{2} M_{vw}) + \\
& + d_u {}^{(2)}g_{v]c} N_{uv} + d_u {}^{(2)}g_{w]c} N_{uw} + \\
& + d_v {}^{(2)}g_{u]c} N_{vu} + d_v u d_w v d_w \varphi \left(-Q_{uv} + P_{uv} \right) + \\
& + d_u u d_v w d_w u \frac{1}{2} Q_{vw} + d_v u d_w v d_w u \frac{1}{2} Q_{uv} + \\
& + d_u v d_w v d_w \varphi \frac{1}{2} Q_{vw} + d_u v d_w v d_w \varphi \frac{1}{2} P_{vw} + \\
& + d_u v d_w v d_w \varphi \frac{1}{2} \left(-P_{uv} + \frac{1}{2} P \right) + d_u v d_w v d_w \varphi \frac{1}{2} P_{uv} + \\
& + d_u u d_w v d_w u \frac{1}{2} P_{uv} + d_v u d_w v d_w u \frac{1}{2} P_{uv} , \tag{3.E.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{sing}R_{abcd} &= 2 \partial_{[a} {}^{sing}Q_{b]cd} = (d_u d_v d_w d_x \varphi + \omega) (-\frac{1}{2} M_{uv}) + \\
& + (d_u d_v d_w d_x \varphi + \omega) (\frac{1}{2} Q_{uvu} - \frac{1}{2} P_{uvu}) + (d_u d_v d_w d_x \varphi + \omega) (-\frac{1}{2} N_{uvu}) + \\
& + (d_u d_v d_w d_x \varphi + \omega) (-\frac{1}{2} P_{uvw} + \frac{1}{2} Q_{uvw}) + (d_u d_v d_w d_x \varphi + \omega) (-\frac{\rho^2}{2} N_{uvw}) + \\
& + (d_u d_v d_w d_x \varphi + \omega) (\frac{1}{2} Q_{vuu} - \frac{1}{2} Q_{uuu}) + (d_u d_v d_w d_x \varphi + \omega) (-\frac{\rho^2}{2} N_{vuu}) + \\
& + (d_u d_v d_w d_x \varphi + \omega) (\frac{1}{2} P_{vuu} - \frac{1}{2} P_{uuu}) + (d_u d_v d_w d_x \varphi + \omega) (-\frac{\rho^2}{2} N_{vuu}) + \\
& + (d_u d_v d_w d_x \varphi + \omega) (\frac{1}{2} Q_{vvg} - \frac{1}{2} Q_{vgv}) + d_u d_v d_w d_x \varphi (-\frac{1}{2} M_{vvg}) + \tag{3.E.5} \\
& + (d_u d_v d_w d_x \varphi + \omega) (\frac{1}{2} P_{vvg} - \frac{1}{2} P_{vgv}) + d_u d_v d_w d_x \varphi (-\frac{1}{2} N_{vvg} - \frac{1}{2} M_{vvg}) + \\
& + (d_u d_v d_w d_x \varphi + \omega) (\frac{1}{2} Q_{vuu} - \frac{1}{2} Q_{uuu} - \frac{1}{2} P_{vuu}) + d_u d_v d_w d_x \varphi (-\frac{1}{2} N_{vuu} - \frac{1}{2} M_{vuu}) + \\
& + (d_u d_v d_w d_x \varphi + \omega) (\frac{1}{2} P_{vuu} - \frac{1}{2} P_{uuu} - \frac{1}{2} Q_{vuu}) + d_u d_v d_w d_x \varphi (-\frac{\rho^2}{2} N_{vuu}) + \\
& + (d_u d_v d_w d_x \varphi + \omega) \frac{1}{2} Q_{vvg} + d_u d_v d_w d_x \varphi (-\frac{\rho^2}{2} N_{vvg} - \frac{\rho}{2} M_{vvg}) + \\
& + (d_u d_v d_w d_x \varphi + \omega) \frac{1}{2} P_{vvg} + d_u d_v d_w d_x \varphi (-\frac{\rho^2}{2} N_{vvg} - \frac{\rho}{2} N_{vgv}) .
\end{aligned}$$

Dále spočteme linearizovaný Riemannův tensor křivosti metriky

$$\overset{\text{bar}}{h} = \overset{\text{acc}}{h} \Theta(u - \frac{a}{\gamma}) , \quad (3.E.6)$$

kde $\overset{\text{acc}}{h}$ je dán v (3.4.31). Platí

$$\overset{\text{bar}}{Q}_{abc} = \partial_{[e} \overset{\text{bar}}{h}_{b]f} = (\partial_e \overset{\text{acc}}{h}_{b]f}) \Theta(u) + d_{[e} u \overset{\text{acc}}{h}_{b]f} \Big|_{u=\frac{a}{\gamma}} \delta(u - \frac{a}{\gamma}) , \quad (3.E.7)$$

$$\overset{\text{bar}}{R}_{abcd} = 2 \partial_{[e} \overset{\text{bar}}{Q}_{b]c[d]} =$$

$$= \overset{\text{acc}}{R}_{abcd} \Theta(u) +$$

$$+ 2 (\partial_{[e} \overset{\text{acc}}{h}_{b]f}) \Big|_{u=\frac{a}{\gamma}} d_{[e} u \delta(u - \frac{a}{\gamma}) + \quad (3.E.8)$$

$$+ 2 \partial_{[e} (\overset{\text{acc}}{h}_{b]f} \Big|_{u=\frac{a}{\gamma}} d_{[e} u) \delta(u - \frac{a}{\gamma}) +$$

$$+ 2 d_{[e} u \overset{\text{acc}}{h}_{b]f} \Big|_{u=\frac{a}{\gamma}} d_{[e} u \delta(u - \frac{a}{\gamma}) .$$

Přímé výpočty dají

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [d_{[e} u \overset{\text{acc}}{h}_{b]f}]_{u=\frac{a}{\gamma}} &= (d_e u \wedge d_b \varphi d_c \varphi + \varphi^2 d_e u \wedge d_c \varphi d_b \varphi) \cdot \\ &\times \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \varphi^2} - \ln \frac{\alpha^2 + \varphi^2}{\alpha^2} + \ln \frac{\varphi}{\alpha} - \ln \gamma \right) + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] , \end{aligned} \quad (3.E.9)$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{1}{2} d_{[e} u \overset{\text{acc}}{h}_{b]f} \Big|_{u=\frac{a}{\gamma}} d_{[e} u &= (d_e u \wedge d_b \varphi d_c \varphi \wedge d_d \varphi + \varphi^2 d_e u \wedge d_c \varphi d_b \varphi \wedge d_d \varphi) \cdot \\ &\times \left(-\frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \varphi^2} + \frac{1}{2} \ln \gamma + \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha^2 + \varphi^2}{\alpha \varphi} \right) , \end{aligned} \quad (3.E.10)$$

$$2 \frac{1}{2} \partial_{[e} (\overset{\text{acc}}{h}_{b]f} d_{[e} u) \Big|_{u=\frac{a}{\gamma}} = \varphi^2 d_e u \wedge d_b \varphi d_c \varphi \wedge d_d \varphi \left(-\frac{\alpha^4}{\varphi(\alpha^2 + \varphi^2)^2} + \frac{1}{2\varphi} \right) . \quad (3.E.11)$$

Dále s využitím výrazu (3.C.3) pro $\overset{\text{acc}}{Q}_{abc}$

$$\begin{aligned}
 2 \frac{1}{L} \left(\partial_{\mu}^{acc} h_{\nu\zeta} \right) \Big|_{u=\frac{a}{2}} d_{\mu} u &= (d_u d_{\varphi} d_u d_{\varphi} + \varphi^2 d_u d_{\varphi} \varphi d_u d_{\varphi} \varphi) \times \\
 &\times \left(-\frac{\gamma}{2a} - \frac{a^4 N}{(a^2 + \varphi^2)^2} \right) + \\
 &+ \varphi^2 d_u d_{\varphi} \varphi d_u d_{\varphi} \left(-\frac{a^4}{\varphi(a^2 + \varphi^2)^2} + \frac{1}{2\varphi} \right) .
 \end{aligned} \tag{3.E.12}$$

Dosazením do (3.E.8) a využitím (3.A.31) dostaneme

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{L} \tilde{R} &= \frac{1}{L} \tilde{R} \Theta(u - \frac{a}{2}) + \\
 &+ (d_u d_{\varphi} d_u d_{\varphi} + \varphi^2 d_u d_{\varphi} \varphi d_u d_{\varphi}) \varPhi + \\
 &+ \varphi^2 (d_{\varphi} d_{\varphi} d_u d_{\varphi} + d_u d_{\varphi} d_{\varphi} d_{\varphi}) \varUpsilon ,
 \end{aligned} \tag{3.E.13}$$

kde

$$\begin{aligned}
 \varPhi &= -\frac{\gamma}{2a} \delta(u) + \frac{1}{2a} \delta'(u) - \frac{a^3 N}{(a^2 + \varphi^2)^2} \delta(u) - \frac{1}{2} \frac{a}{a^2 + \varphi^2} \delta'(u) + \\
 &+ \frac{1}{2a} \ln \gamma \delta'(u) + \frac{1}{2a} \ln \frac{a^2 + \varphi^2}{\varphi a} \delta'(u) ,
 \end{aligned} \tag{3.E.14}$$

$$\varUpsilon = \left(-\frac{a^3}{\varphi(a^2 + \varphi^2)^2} + \frac{1}{2a\varphi} \right) \delta(u) .$$

Obdobně vypočteme linearizovaný Riemannův tenzor křivosti metriky

$$\tilde{h} = \tilde{h} \Theta(u) , \tag{3.E.15}$$

kde \tilde{h} je dána v (3.4.81). Využitím rozvojů v appendixu 3.B můžeme tuto metriku zapsat

$$\begin{aligned}
 \overset{1}{\tilde{L}}^{\text{acc}} h = & \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \nu^2 + O[u] \right) du^2 + O[u^2] d\nu^2 + \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{2\alpha^2\beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^3} \nu u + O[u^2] \right) du v d\nu + \\
 & + \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\alpha^2(3\beta^2 + \alpha^2)}{(\alpha^2 + \beta^2)^3} \nu u + O[u^2] \right) d\beta^2 - \\
 & - \beta^2 \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\alpha^2(\beta^2 - \alpha^2)}{(\alpha^2 + \beta^2)^3} \nu u + O[u^2] \right) d\varphi^2 .
 \end{aligned} \tag{3.E.16}$$

Obdobně k (3.E.8) máme

$$\begin{aligned}
 \overset{\text{bar}}{\tilde{R}}_{abcd} = & \overset{\text{acc}}{R}_{abcd} \Theta(u) + \\
 & + 2 \left(\partial_{[e} \overset{\text{acc}}{h}_{b]} \Big|_{u=0} \right) d_{[e} u \delta_{b]} + \\
 & + 2 d_{[e} \left(\overset{\text{acc}}{h}_{b]} \Big|_{u=0} d_{b]} u \right) \delta(u) + \\
 & + 2 d_{[e} u \overset{\text{acc}}{h}_{b]} \Big|_{u=0} d_{b]} u \delta'(u) .
 \end{aligned} \tag{3.E.17}$$

Jednotlivé členy dostaneme přímým výpočtem z (3.E.16)

$$\begin{aligned}
 \overset{1}{\tilde{L}} \partial_{[e} u \overset{\text{acc}}{h}_{b]} \Big|_{u=0} = & \frac{1}{2} d_e u \wedge d_{b]} \nu d_{[e} u \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} + \\
 & + d_e u \wedge d_{b]} \beta d_{[e} \beta \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} - d_e u \wedge d_{b]} \varphi d_{[e} \varphi \frac{1}{2} \frac{\beta^4}{\alpha^2 + \beta^2} ,
 \end{aligned} \tag{3.E.18}$$

$$\begin{aligned}
 \overset{1}{\tilde{L}} d_{[e} u \overset{\text{acc}}{h}_{b]} \Big|_{u=0} d_{b]} u = & - d_e u \wedge d_{b]} \beta d_{[e} u \wedge d_{b]} \beta \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} + \\
 & + d_e u \wedge d_{b]} \varphi d_{[e} u \wedge d_{b]} \varphi \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} ,
 \end{aligned} \tag{3.E.19}$$

$$\begin{aligned}
 2 \overset{1}{\tilde{L}} \partial_{[e} \left(\overset{\text{acc}}{h}_{b]} \Big|_{u=0} d_{b]} u \right) = & d_e u \wedge d_{b]} \nu d_{[e} u \wedge d_{b]} \beta \frac{\alpha^2 \beta}{2(\alpha^2 + \beta^2)^2} + \\
 & + d_e u \wedge d_{b]} \varphi d_{[e} \beta \wedge d_{b]} \varphi \frac{\beta^3 (2\alpha^2 + \beta^2)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} ,
 \end{aligned} \tag{3.E.20}$$

$$\begin{aligned}
 2\frac{1}{L}(\partial_{[e} h_{e]f})|_{u=0} d_{[e} u = & d_e u \wedge d_{\varphi} \varphi d_e u \wedge d_{\varphi} \varphi \frac{\alpha^2 \rho}{2(\alpha^2 + \rho^2)^2} + \\
 & + d_e \varphi \wedge d_{\varphi} \varphi d_e u \wedge d_{\varphi} \varphi \frac{\rho^2(2\alpha^2 + \rho^2)}{(\alpha^2 + \rho^2)^2} - \\
 & - d_e u \wedge d_{\varphi} \varphi d_e u \wedge d_{\varphi} \varphi \frac{\alpha^2(3\rho^2 + \alpha^2)}{2(\alpha^2 + \rho^2)^3} \nu + \\
 & + \rho^2 d_e u \wedge d_{\varphi} \varphi d_e u \wedge d_{\varphi} \varphi \frac{\alpha^2(\rho^2 - \alpha^2)}{2(\alpha^2 + \rho^2)^3}.
 \end{aligned} \tag{3.E.21}$$

Dosazením do (3.E.17) dostaneme

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{L} \tilde{R} = & \frac{1}{L} R \Theta(u) + \\
 & + d_u d_\varphi d_u d_\varphi \left(-\frac{\nu \rho^2(3\alpha^2 + \rho^2)}{2(\alpha^2 + \rho^2)^3} \delta(u) + \nu \frac{\rho^2 - \alpha^2}{2(\rho^2 + \alpha^2)^2} \delta(u) \right) - \\
 & - \rho^2 d_u d_\varphi d_u d_\varphi \left(-\frac{\nu \rho^2(3\alpha^2 + \rho^2)}{2(\alpha^2 + \rho^2)^3} \delta(u) + \nu \frac{1}{2(\rho^2 + \alpha^2)} \delta(u) \right) + \tag{3.E.22} \\
 & + \frac{1}{2} (d_u d_\varphi d_\varphi d_\varphi + \nu) \left(\rho \frac{2\alpha^2 + \rho^2}{(\alpha^2 + \rho^2)^2} \delta(u) - \frac{\rho}{\alpha^2 + \rho^2} \delta(u) \right) + \\
 & + \rho^2 (d_u d_\varphi d_\varphi d_\varphi + \nu) \left(\rho \frac{2\alpha^2 + \rho^2}{(\alpha^2 + \rho^2)^2} \delta(u) \right).
 \end{aligned}$$

4. GRAVITAČNÍ POLE URYCHLENÝCH ZDROJŮ

V této kapitole se pokusíme nalezt odpověď na otázku jak vypadá retardované gravitační pole urychleného zdroje v rámci plné OTR. Uvidíme, že odpověď bude spíše negativní. Přestože existuje široká třída řešení Einsteinových gravitačních rovnic odpovídajících urychleným zdrojům, nelze z nich zkonstruovat pole retardované. V závěru uvedeme fyzikální příčiny této skutečnosti.

4.1 Obecné boost-rotačně symetrické gravitační pole

Za urychlený zdroj a jeho gravitační pole budeme v rámci OTR považovat prostoročas s rotační a boostovou symetrií. To znamená, že metrika má dva Killingovy vektory, které jsou navzájem kolmé a navíc existuje systém 2-ploch kolmých na oba Killingovy vektory. Jeden Killingův vektor - odpovídající rotaci - je prostorupodobný a má kompaktní orbity. Druhý Killingův vektor - odpovídající boostu - má v různých oblastech prostoročasu různý charakter a jeho orbity jsou nekompaktní. Dále budeme požadovat, aby prostoročas byl asymptoticky plochý (přesná formulace viz. [4]). Zdroje musí být symetrické vůči rotaci a boostu. Navíc předpokládejme, že se nachází pouze na ose rotace.

Obecnou metriku tohoto typu nalezneme v [5] - má tvar

$$g = \frac{1}{z^2 - t^2} (e^\lambda (t dt - z dz)^2 - e^\mu (t dz - z dt)^2) + e^\lambda d\eta^2 + \eta^2 e^{-\mu} d\varphi^2 \quad (4.1.1)$$

Zde $t, z \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in (0, 2\pi)$ jsou souřadnice, jejichž úplná interpretace je daná samotnou metrikou. Poznamenejme však, že rotační Killingův vektor je

$$\xi_R^a = \frac{\partial^a}{\partial \varphi} \quad (4.1.2)$$

a boostový Killingův vektor je

$$\xi_B^a = z \frac{\partial^a}{\partial t} + t \frac{\partial^a}{\partial z} \quad (4.1.3)$$

μ, λ jsou funkce závisející pouze na $A = \varphi^2$ a $B = (z^2 - t^2)$ (tj. na orbitě Killingových vektorů) a v oblasti mimo zdroje splňují

$$A \mu_{,AA} + B \mu_{,BB} + \mu_{,B} + \mu_{,B} = 0 , \quad (4.1.4)$$

$$(A+B) \lambda_{,A} = B (A \mu_{,A}^2 - B \mu_{,B}^2 + 2A \mu_{,A} \mu_{,B}) + \\ + (A-B) \mu_{,A} - 2B \mu_{,B} , \quad (4.1.5)$$

$$(A+B) \lambda_{,B} = A (B \mu_{,B}^2 - A \mu_{,A}^2 + 2B \mu_{,A} \mu_{,B}) + \\ + (A-B) \mu_{,B} + 2A \mu_{,A} .$$

Rovnice (4.1.4) je ekvivalentní vlnové rovnici v plochém prostoročase s cylindrickými souřadnicemi t, z, φ .

Metrika (4.1.1) je regulární mimo $A=0$ a $B=0$, regularita na ose rotace $\varphi=0$ a nadploše $B=0$ závisí na chování funkcí μ a λ . Z (4.1.5) pro $B=0$ resp. $A=0$ dostáváme

$$\mu(A, 0) - \lambda(A, 0) = K_1 , \quad (4.1.6)$$

$$\mu(0, B) + \lambda(0, B) = K_2 , \quad (4.1.7)$$

kde K_1 a K_2 jsou konstanty. Podmínka regularity na $B=0$ vede na podmínu $K_1=0$, tj.

$$\lambda(A, 0) = \mu(A, 0) \quad (4.1.8)$$

V opačném případě se prostoročas rozseparuje na 4 navzájem odělené prostoročasy. Nadplochy $B=0$ se stávají nekonečnem těchto prostoročasů (délka neisotropní křivky konvergující k $B=0$ je nekonečná). Podmínka regularity na $A=0$ dá $K_2=0$, tj.

$$\lambda(0, B) + \mu(0, B) = 0 \quad (4.1.9)$$

Pokud $\partial_r K_2 = \text{konst}$, je metrika na $\varrho=0$ neanalytická. Struktura této neanalytičnosti odpovídá struktuře známé kónické singularity. Kónická singularita je charakteristická úbytkem úhlu v malém okolí osy, tj. uvažujeme-li kružnice $\varrho = \text{konst}$ kolem osy, σ nazveme její obvod a p její poloměr (měřeno pomocí metriky), tak při $\varrho \rightarrow 0$ podíl $\frac{\sigma}{p}$ nejde k 2π . Kónickou singularitu lze odvodnit přítomností lineárního zdroje na ose $\varrho=0$ - struny ¹). Pokud se na ose budou nacházet i složitější zdroje, nebudeme moci v těchto oblastech použít rovnice (4.1.7) a metrika je zde obecně neregulární. Tato neregularita ale nemusí nutně znamenat singularitu. Jsou známy řešení (např. tzv. C-metriky - viz. [17]), pro které jsou funkce μ, λ neregulární na ose v nějakém intervalu $B \in (a_i^+, a_i^-)$, ovšem neregularita metriky je pouze souřadnicová - ve skutečnosti má strukturu nadplochy přes kterou lze metriku v principu prodloužit. Tuto nadplochu můžeme chápát jako povrch hmoty resp. horizont urychljené černé díry. Podrobnější rozbor je možno nalézt v [9], [12].

Zavedeme-li souřadnice u, v a \tilde{z}, τ vztahy (3.1.2) a (3.1.11), tak metrika (4.1.1) lze psát

$$g = \frac{e^\lambda - e^m}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{u}{v} du^2 + \frac{v}{u} dv^2 \right) + \frac{e^\lambda + e^m}{2} \frac{1}{2} du v dv + \\ + e^\lambda d\varphi^2 + \varrho^2 e^{-m} d\varphi^2 = \quad (4.1.10)$$

¹) Metriku nekonečné struny v prázdném prostoručase jsme uvedli v (3.4.40). Přestože byla odvozena pouze v linearizované teorii, jedná se o přesné řešení Einsteinových rovnic - viz. např. [27], [28].

$$= -\frac{\hat{z}^2}{a^2} e^{\nu} d\tau^2 + e^{\lambda} d\hat{z}^2 + e^{\lambda} d\hat{\rho}^2 - \hat{\rho}^2 e^{-\nu} d\varphi^2 \quad (4.1.11)$$

a Killingovy vektory mají tvar

$$\xi^{\hat{z}} = \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \xi^{\hat{\tau}} = a \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (4.1.12)$$

Pro úplnost uvedme ještě Christoffelovy symboly v souřadnicích $\tau, \hat{z}, \hat{\rho}, \varphi$, Riemannův tenzor křivosti a Ricciho tenzor metriky (4.1.1) (viz. [5], appendix B; Pozor na opačnou signaturu metriky a tímto způsobené opačné znaménko Ricciovou tensoru.) Vše je počítané mimo osu $\varphi = 0$, platí zde obdoba poznámky 8) ze str. 67.

$$\begin{aligned} \Gamma_{\hat{\rho}\hat{\rho}}^{\hat{\rho}} &= \frac{1}{2} \lambda_{,\hat{\rho}}, \quad \Gamma_{\hat{\rho}\hat{z}}^{\hat{z}} = \frac{1}{2} \lambda_{,\hat{z}}, \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^{\hat{\rho}} &= e^{-\lambda-\nu} \left(\frac{1}{2} \hat{\rho}^2 M_{,\hat{\rho}} - \hat{\rho} \right), \\ \Gamma_{\hat{z}\hat{z}}^{\hat{\rho}} &= -\frac{1}{2} \lambda_{,\hat{\rho}}, \quad \Gamma_{\tau\tau}^{\hat{\rho}} = \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \frac{\hat{z}^2}{a^2} M_{,\hat{z}}, \\ \Gamma_{\hat{\rho}\varphi}^{\varphi} &= \frac{1}{\hat{\rho}} - \frac{1}{2} M_{,\hat{\rho}}, \quad \Gamma_{\varphi\hat{z}}^{\hat{z}} = -\frac{1}{2} M_{,\hat{z}}, \\ \Gamma_{\hat{\rho}\hat{\rho}}^{\hat{z}} &= -\frac{1}{2} \lambda_{,\hat{z}}, \quad \Gamma_{\hat{\rho}\hat{\tau}}^{\hat{\tau}} = \frac{1}{2} \lambda_{,\hat{\tau}}, \quad (4.1.13) \\ \Gamma_{\hat{z}\hat{z}}^{\hat{\tau}} &= \frac{1}{2} \lambda_{,\hat{\tau}}, \quad \Gamma_{\hat{\rho}\tau}^{\tau} = \frac{1}{2} M_{,\hat{\tau}}, \\ \Gamma_{\tau\tau}^{\hat{z}} &= e^{\nu-\lambda} \left(\frac{\hat{z}^2}{a^2} + \frac{1}{2} \frac{\hat{z}^2}{a^2} M_{,\hat{z}} \right), \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^{\hat{z}} &= \frac{1}{2} \hat{\rho}^2 e^{-\lambda-\nu} M_{,\hat{z}}, \\ \Gamma_{\hat{z}\tau}^{\tau} &= \frac{1}{\hat{z}} + \frac{1}{2} M_{,\hat{z}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\varphi\varphi\varphi\varphi} &= -e^{-M} \tilde{\rho}^2 \left(-\frac{1}{2} M_{,SS} + \frac{1}{4} (M_{,S}\lambda_{,S} - M_{,Z}\lambda_{,Z}) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{\tilde{\rho}} (\lambda_{,S} + 2M_{,S}) + \frac{1}{4} M_{,S}^2 \right) , \\
 R_{\varphi\bar{z}\varphi\bar{z}} &= -\frac{1}{2} e^{\lambda} (\lambda_{,SS} + \lambda_{,ZZ}) , \\
 R_{\bar{z}S\bar{z}S} &= -e^M \frac{\tilde{\rho}^2}{\alpha^2} \left(-\frac{1}{2} M_{,SS} - \frac{1}{4} M_{,S}^2 + \frac{1}{4} (M_{,S}\lambda_{,S} - M_{,Z}\lambda_{,Z}) - \frac{1}{2} \frac{1}{\tilde{\rho}} \lambda_{,Z} \right) , \\
 R_{\varphi\bar{z}\varphi\bar{z}} &= -e^M \tilde{\rho}^2 \left(-\frac{1}{2} M_{,ZZ} + \frac{1}{4} M_{,Z}^2 - \frac{1}{4} (M_{,S}\lambda_{,S} - M_{,Z}\lambda_{,Z}) + \frac{1}{2} \frac{1}{\tilde{\rho}} \lambda_{,S} \right) , \\
 R_{\varphi\bar{z}\varphi\bar{z}} &= -e^{\lambda} \tilde{\rho}^2 \frac{\tilde{\rho}^2}{\alpha^2} \left(\frac{1}{4} (M_{,S}^2 + M_{,Z}^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} M_{,Z} - \frac{1}{\tilde{\rho}} M_{,S} \right) \right) , \tag{4.1.14} \\
 R_{\bar{z}T\bar{z}T} &= -e^M \frac{\tilde{\rho}^2}{\alpha^2} \left(-\frac{1}{2} M_{,ZZ} - \frac{1}{4} M_{,Z}^2 - \frac{1}{4} (M_{,S}\lambda_{,S} - M_{,Z}\lambda_{,Z}) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{\tilde{\rho}} (\lambda_{,Z} - 2M_{,Z}) \right) ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\varphi\varphi\varphi\bar{z}} &= -e^M \tilde{\rho}^2 \left(\frac{1}{2} M_{,S\bar{z}} - \frac{1}{4} M_{,S} M_{,\bar{z}} - \frac{1}{4} (M_{,Z}\lambda_{,S} + M_{,S}\lambda_{,Z}) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{\tilde{\rho}} (\lambda_{,Z} + M_{,\bar{z}}) \right) , \\
 R_{\varphi\varphi\bar{z}\bar{T}} &= -e^M \frac{\tilde{\rho}^2}{\alpha^2} \left(-\frac{1}{2} M_{,S\bar{z}} - \frac{1}{4} M_{,S} M_{,\bar{z}} + \frac{1}{4} (M_{,Z}\lambda_{,S} + M_{,S}\lambda_{,Z}) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{\tilde{\rho}} (\lambda_{,S} - M_{,\bar{z}}) \right) ,
 \end{aligned}$$

$$Ric_{SS} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tilde{\rho}} (2M_{,S} + \lambda_{,S}) - \lambda_{,SS} - \lambda_{,ZZ} - M_{,S}^2 - \frac{1}{2} \lambda_{,Z} \right) ,$$

$$Ric_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} e^{-M-\lambda} \tilde{\rho}^2 \left(M_{,SS} + \lambda_{,ZZ} + \frac{1}{\tilde{\rho}} M_{,S} + \frac{1}{2} M_{,Z} \right) ,$$

$$Ric_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tilde{\rho}} (\lambda_{,Z} - 2M_{,Z}) - \lambda_{,SS} - \lambda_{,ZZ} - M_{,Z}^2 - \frac{1}{\tilde{\rho}} \lambda_{,S} \right) , \tag{4.1.15}$$

$$Ric_{\varphi\bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tilde{\rho}} (M_{,Z} + \lambda_{,Z}) + \frac{1}{2} (\lambda_{,S} - M_{,S}) - M_{,S} M_{,Z} \right) ,$$

$$Ric_{TT} = e^{2M} \frac{\tilde{\rho}^2}{\alpha^2} \frac{1}{\tilde{\rho}^2} Ric_{\varphi\varphi} .$$

Explicite vidíme, že rovnice (4.1.4) a (4.1.5) zaručují platnost Einsteinových vakuových rovnic.

4.2 Pole dvou urychlených částic

Uvedeme si konkrétní metriku typu (4.1.1) odpovídající dvěma navzájem opačně urychleným hmotným objektům pohybujícím se pod vlivem polonekonečných strun (v souřadnicích t, x, y, z je systém znázorněn na obrázku 4.1). Takovýto systém je diskutován v [6,10] a je dán funkcemi

$$\mu = \frac{m\omega}{4\pi} \left(-\frac{1}{R} + \frac{2}{\alpha} \right) = L \left(1 - \frac{\alpha}{2R} \right), \quad (4.2.1)$$

$$\lambda = \left(\frac{m\omega}{4\pi} \right)^2 \frac{\rho^2(z^2-t^2)}{\alpha^2 R^4} + \frac{2m\omega}{4\pi\alpha^2 R} (\rho^2 + z^2 - t^2) = L^2 \frac{\rho^2(z^2-t^2)}{4R^4} + L \frac{\rho^2+z^2-t^2}{\alpha R}, \quad (4.2.2)$$

kde R je dáno definicí (3.2.13), m je hmota částic a $\alpha = \frac{1}{\alpha}$ je parametr charakterizující zrychlení.

Vidíme, že

$$\mu(\rho, 0) = \lambda(\rho, 0), \quad (4.2.3)$$

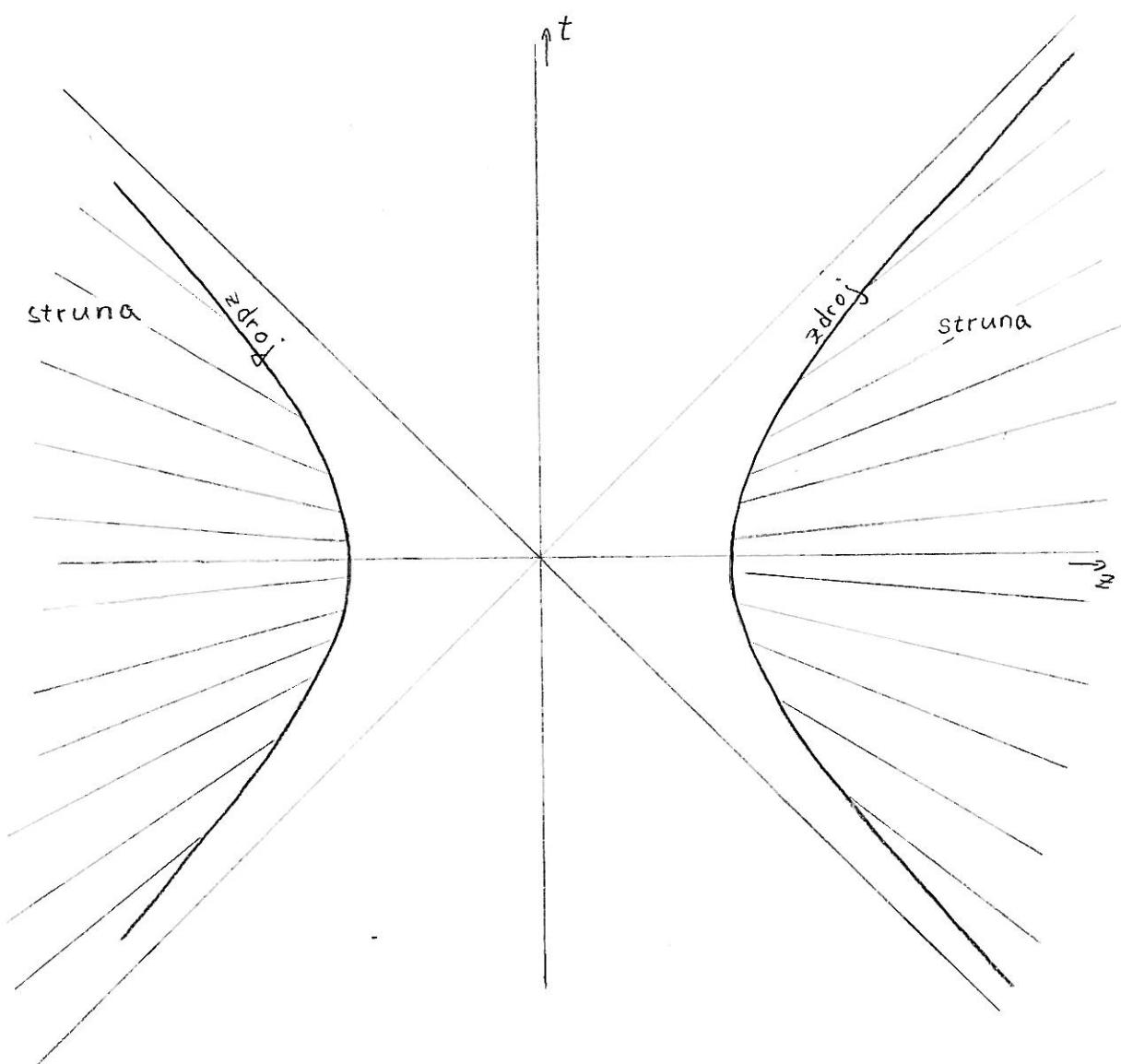
takže tato metrika je regulární na $u, v = 0$. Dále pro $\tilde{z} < 0, \rho = 0$

$$\mu(0, \tilde{z}) + \lambda(0, \tilde{z}) = 0 \quad (4.2.4)$$

a pro $\tilde{z} > 0, \rho = 0$

$$\mu(0, \tilde{z}) + \lambda(0, \tilde{z}) = 4L \quad (4.2.5)$$

tj. v oblasti $\tilde{z} < 0$ se na ose $\rho = 0$ nenachází žádný zdroj, v $\tilde{z} = 0^+$, $\rho = 0$ je lokalizovaná hmota a v oblasti $\tilde{z} > 0^+$, $\rho = 0$ se nachází struna. Nutno poznamenat, že struktura singularity na $\tilde{z} = 0^+, \rho = 0$ (kterou interpretujeme jako přítomnost hmotného zdroje) je poměrně složitá a jedná se o skutečnou singularity



obr. 4.1

Metrika (4.1.1) s M a λ určenými v (4.2.1), (4.2.2) odpovídá dvěma hmotným objektům, které jsou lokalizované na ose z a urychlované polonekonečnými strunami ležícími též na ose z . Situace je v souřadnicích t, x, y, z znázorněna na obrázku.

neskrytou pod horizontem (viz. [21]).

Nyní nalezneme linearizaci tohoto gravitačního pole. Budeme předpokládat, že hmotnosti a zrychlení hmotných objektů jsou malé, konkrétně

$$\frac{2\mu}{4\pi} m \alpha = \frac{2\mu}{4\pi} \frac{m}{\alpha} = \frac{2\mu}{4\pi} G = L \ll 1 \quad . \quad (4.2.6)$$

Potom dostáváme

$$\mu = L \left(1 - \frac{\alpha}{2R} \right) \quad , \quad (4.2.7)$$

$$\lambda = L \frac{\alpha}{2R} \frac{\beta^2 + \mu \alpha}{\alpha^2} + O[L^2] \quad . \quad (4.2.8)$$

Vzhledem k velké kalibrační volnosti linearizované metriky, bude výhodnější linearizovat Riemannův tenzor křivosti. Ve výrazu (4.1.14) lze zanedbat všechny kvadratické členy v μ a λ (jsou rádu $O[L^2]$) a dostaneme

$$\begin{aligned} {}^{lin} R_{\varphi\varphi\varphi\varphi} &= - \beta^2 \left(-\frac{1}{2} \mu_{,qq} - \frac{1}{2} \frac{1}{\beta} (\lambda_{,q} + 2\mu_{,q}) \right) \quad , \\ {}^{lin} R_{\varphi\varphi\tilde{q}\tilde{q}} &= - \frac{1}{2} (\lambda_{,qq} + \lambda_{,\tilde{q}\tilde{q}}) \quad , \\ {}^{lin} R_{\tau q\tau q} &= - \frac{\tilde{q}^2}{\alpha^2} \left(-\frac{1}{2} \mu_{,qq} - \frac{1}{2} \frac{1}{\tilde{q}} \lambda_{,\tilde{q}} \right) \quad , \\ {}^{lin} R_{\tilde{q}\tilde{q}\varphi\tilde{q}} &= - \beta^2 \left(-\frac{1}{2} \mu_{,\tilde{q}\tilde{q}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\beta} \lambda_{,\tilde{q}} \right) \quad , \\ {}^{lin} R_{\varphi\tau\varphi\tau} &= - \beta^2 \frac{\tilde{q}^2}{\alpha^2} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tilde{q}} \mu_{,\tilde{q}} - \frac{1}{\beta} \mu_{,q} \right) \quad , \\ {}^{lin} R_{\tilde{q}\tau\tilde{q}\tau} &= - \frac{\tilde{q}^2}{\alpha^2} \left(-\frac{1}{2} \mu_{,\tilde{q}\tilde{q}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\tilde{q}} (\lambda_{,\tilde{q}} - 2\mu_{,\tilde{q}}) \right) \quad , \\ {}^{lin} R_{\varphi\varphi\varphi\tilde{q}} &= - \beta^2 \left(\frac{1}{2} \mu_{,q\tilde{q}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\beta} (\lambda_{,q} + \mu_{,q}) \right) \quad , \\ {}^{lin} R_{\varphi\tau\varphi\tau} &= - \frac{\tilde{q}^2}{\alpha^2} \left(-\frac{1}{2} \mu_{,q\tilde{q}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\tilde{q}} (\lambda_{,q} - \mu_{,q}) \right) \quad . \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Přímým výpočtem dostaneme

$$\begin{aligned}
 \overset{1}{L} M_{1g} &= \frac{l g}{2a R^3}, \\
 \overset{1}{L} M_{1gg} &= \frac{1}{4a^2 R^5} \left(2alR^2 + 2g^2 R^2 - 6l^2 g^2 \right), \\
 \overset{1}{L} M_{1\hat{z}\hat{z}} &= \frac{g \hat{z}}{2a^2 R^5} \left(-2l^2 - \hat{z}^2 + 3al \right), \\
 \overset{1}{L} M_{1\hat{z}} &= \frac{\hat{z}(l-a)}{2a R^3}, \\
 \overset{1}{L} M_{1\hat{z}\hat{z}} &= \frac{1}{4a^2 R^5} \left(-(2al - 2g^2) \left(l^2 - \frac{\hat{z}^2}{a^2} \right) - 6\hat{z}^2(l-a)^2 \right), \quad (4.2.10) \\
 \overset{1}{L} \omega_{1g} &= \frac{2g}{\xi} - \frac{(X-a^2)2aX}{\xi^3} + O[L] \\
 \overset{1}{L} \omega_{1\hat{z}} &= \frac{2\hat{z}}{\xi} - \frac{(X-a^2)(2\hat{z}X - 2a^2 2\hat{z})}{\xi^3} + O[L], \\
 \overset{1}{L} \omega_{1gg} &= \frac{2}{\xi} - \frac{8g^2 X + 2(X-a^2)X + 4g^2(X-a^2)}{\xi^3} + 3 \frac{4g^2 X^2 (X-a^2)}{\xi^5} + O[L], \\
 \overset{1}{L} \omega_{1\hat{z}\hat{z}} &= \frac{2}{\xi} - \frac{(8\hat{z}^2 - 2(X-a^2))(X-2a^2) - 4\hat{z}^2(X-a^2)}{\xi^3} + 3 \frac{4\hat{z}^2(X-a^2)(X-2a^2)}{\xi^5} + O[L].
 \end{aligned}$$

Dosazením do (4.2.9) zjistíme, že

$$\overset{1}{L} R = \overset{acc}{R}. \quad (4.2.11)$$

Pokud linearizujeme přímo metriku, dostaneme

$$\begin{aligned}
 \overset{1}{L} \overset{acc}{h} &= \frac{l-R}{2R} \frac{1}{2} \left(\frac{u}{v} du^2 + \frac{v}{u} dv^2 \right) + \frac{l+R-a}{2R} \frac{1}{2} du v dv + \\
 &+ \frac{a}{2R} \left(\frac{2l}{a} - 1 \right) d\hat{z}^2 - \frac{a}{2R} \hat{z}^2 \left(\frac{2R}{a} - 1 \right) d\varphi^2, \quad (4.2.12)
 \end{aligned}$$

což je právě linearizovaná metrika, kterou jsme již uvedli v (3.4.81). Tímto jsme ukázali, že metrika (3.4.81) a metrika (3.4.31), získaná pomocí Grenových funkcí, jsou linearizované

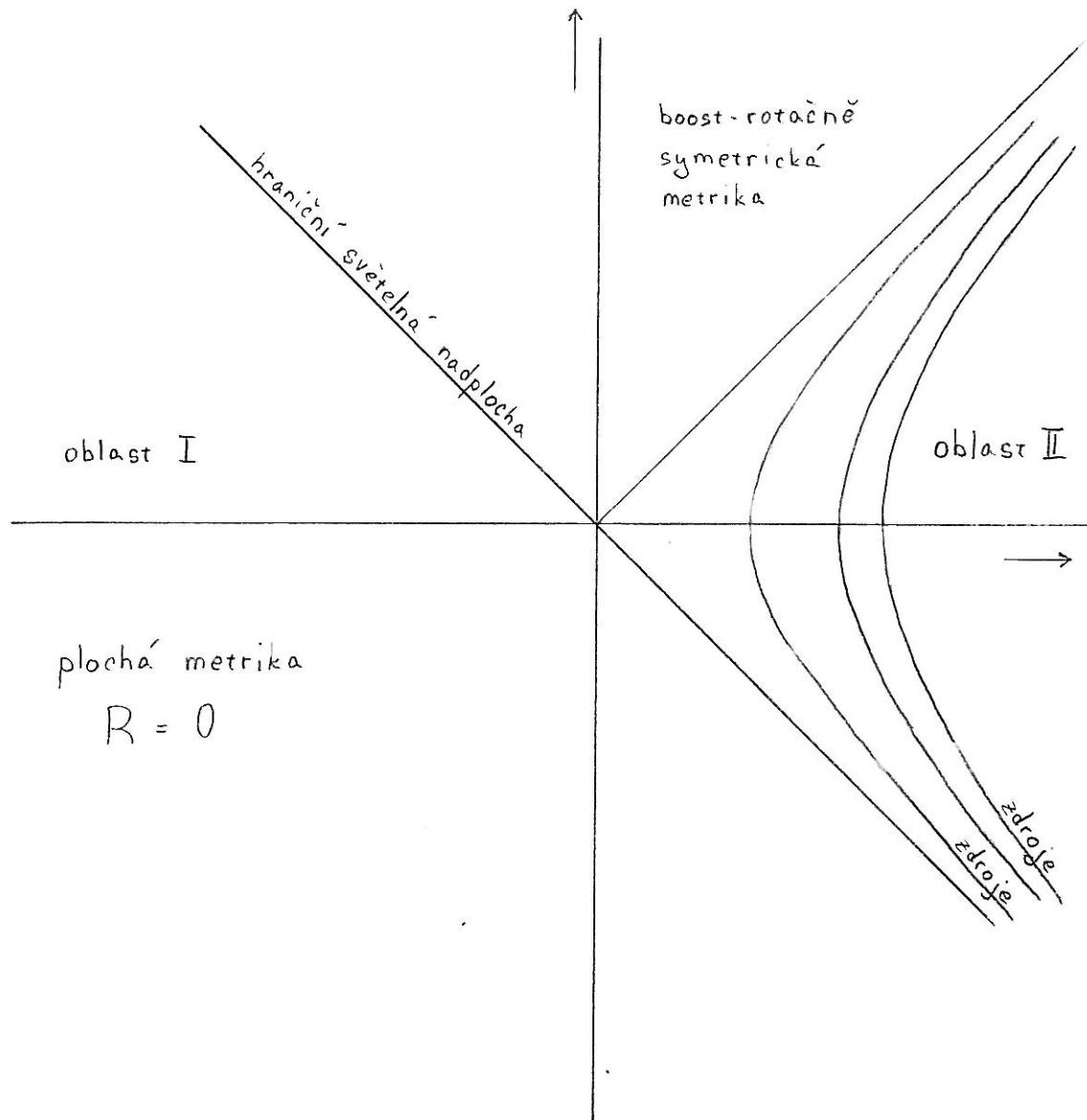
metriky vedoucí v oblasti $U \neq 0$ ke stejnemu linearizovanému Riemannovu tenzoru křivosti. V oblasti $U > 0$ proto musí být spojeny kalibrační transformací.

4.3 Retardované gravitační pole urychleného zdroje

Nyní se pokusíme specifikovat, co považujeme za retardované gravitační pole urychleného zdroje. Budeme požadovat, aby prostoročas reprezentující retardované gravitační pole urychleného zdroje se skládal z dvou oblastí oddělených od sebe světelnou nadplochou (obr. 4.2). Zdroje budou lokalizované v oblasti II a budou mít, stejně jako metrika v oblasti II, boost-rotační symetrii ve smyslu popsaném v odstavci 4.1. Oblast I neleží v budoucnosti žádné události z oblasti II (hranice obou oblastí je světelná nadplocha) a tak se zde nemohou projevit žádné retardované efekty zdrojů. Proto budeme požadovat, aby v oblasti I byla plochá metrika. V oblasti II, jak jsme již řekli, požadujeme boost-rotační symetrii metriky, takže zde metrika musí být daná výrazem (4.1.1).

Vidíme, že jak v oblasti I, tak v oblasti II je splněn Einsteinův gravitační zákon. Zbývá ještě otázka, zda je splněn i na hranici obou oblastí. Nebo jinak řečeno, ptáme se jakým způsobem musíme napojit plochou metriku v oblasti I a boost-rotačně symetrické metriky v oblasti II aby byl splněn Einsteinův gravitační zákon na tomto napojení.

Je známý fakt (viz. např. [2], [3]), že metrika v rámci OTR musí být dostatečně hladká, v nejhorším případě spojitá. Případná nespojitost vede k nejednoznačnosti mnoha operací v bodech nespojitosti, resp. k delta-funkcím v konexi. Riemannův tenzor je však kvadratický v konexi, což implikuje násobení delta-funkcí, které není dobře definováno. Proto požadujeme, aby plochá metrika v oblasti I a boost-rotačně symetrická metrika v oblasti II byly napojeny spojitě. Zvolme v oblasti I souřadnice U, V, R, ϕ v nichž má metrika tvar



obr. 4.2

Retardované gravitační pole hmotného objektu rovnoměrně urychlovaného polonekonečnou strunou by muselo být dáno boost-rotičně symetrickou metrikou (4.1.1) v oblasti II a plochou metrikou v oblasti I. Oblast I totiž není kauzálně spojená s oblastí II - je oddělena světelnou nadplochou.

$$g_I = \frac{1}{2} dU v dV + dR^2 + R^2 d\phi^2 \quad (4.3.1)$$

a oblast I je daná podmínkou

$$U < 0 \quad , \quad (4.3.2)$$

V oblasti II zvolíme souřadnice u, v, ϱ, φ , v nichž má boost-rotačně symetrická metrika tvar (4.1.11) a oblast II je dána podmínkou

$$u > 0 \quad , \quad (4.3.3)$$

Metrika (4.1.11) musí být regulární na hranici oblasti II, tj. pro $u=0$. Musí být tedy splněna podmínka (4.1.8).

Zatím nevíme, jak jsou souřadnice V, R, ϕ a v, ϱ, φ identifikovány na nadploše $U=u=0$. Díky rotační symetrii můžeme pouze ztotožnit úhlové souřadnice, tj.

$$\phi = \varphi \quad , \quad (4.3.4)$$

Vztah V, R a v, ϱ zatím zůstává obecný. Z požadavku spojitého navázání metrik v oblasti I a II plynne požadavek shodnosti indukovaných metrik na hraniční nadploše. Restrikce metriky (4.3.1) na hranici $U=0$ dostaneme

$$g_I = dR^2 + R^2 d\phi^2 \quad (4.3.5)$$

a restrikci metriky (4.1.11) na hranici $u=0$ dostaneme s využitím (4.1.8)

$$g_{II} = e^{M(\varrho^2, 0)} d\varrho^2 + \varrho^2 e^{-M(\varrho^2, 0)} d\varphi^2 =$$

$$= e^{\mu(\varphi^z, 0)} (\varrho_{1R} dR + \varrho_{1V} dV) (\varrho_{1R} dR + \varrho_{1V} dV) + \varrho^z e^{-\mu(\varphi^z, 0)} d\varphi^z . \quad (4.3.6)$$

Porovnáním dostaneme podmínky

$$\begin{aligned} e^{\mu(\varphi^z, 0)} \varrho_{1R} &= 1 , \quad \varrho^z e^{-\mu(\varphi^z, 0)} = R^z , \\ \varrho_{1R} \varrho_{1V} &= 0 , \quad \varrho_{1V}^z = 0 . \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Jednoduché úpravy vedou na

$$\begin{aligned} \varrho_{1V} &= 0 , \\ \varrho \varrho_{1R} &= R , \quad \frac{1}{\varrho} \varrho_{1R} e^{\mu(\varphi^z, 0)} = \frac{1}{R} . \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Integrací a využitím $\varrho > 0$, $R > 0$ a $\varrho = 0 \rightarrow R = 0$ dostáváme

$$\varrho = R , \quad e^{\mu(\varphi^z, 0)} = 1 . \quad (4.3.9)$$

Tímto jsme dospěli k podmínce

$$\mu(\varphi^z, 0) = 0 \quad (4.3.10)$$

Vzhledem k tomu, že μ řeší vlnovou rovnici v souřadnicích u, r, φ a závisí pouze na ur a φ^z , je tato podmínka velmi silná - vede k triviálnímu řešení ²⁾

$$\mu(A, B) = \lambda(A, B) = 0 . \quad (4.3.11)$$

²⁾ Využitím (4.1.4) a (4.1.5) dostaneme z (4.3.10) též $\mu_{AB}(\varphi^z, 0) = 0$, což omezuje μ jako řešení vlnové rovnice na rovinné vlny šířící se ve směru osy z identicky nulové na $u=0$. Ty jsou však vyloučeny boostovou symetrií M .

Dospěli jsme tedy k tomu, že nelze spojitě napojit neutriviální boost-rotačně symetrickou metriku na plochou metriku podél nadplochy $u=0$. Co ale tento výsledek říká fyzikálně? Vždyť intuitivně cítíme, že retardované pole od libovolného zdroje, tedy i rovnoměrně urychleného, by mělo existovat. Potíž ale zřejmě tkví v tom, že náš zdroj se urychluje neustále. Díky tomu dochází ke kumulaci gravitačního pole podél hranice oblasti příčinně spojené se zdrojem. Takovéto kumulování gravitačního pole však v plné teorii může vést až k změně charakteru prostoročasu - prostoročas se může jakoby "rozříznout". V okolí hranice, kde se příspěvky od zdroje kumuluji může gravitační pole vzrůst do nekonečna, což lze interpretovat jako zmíněné "odříznutí" oblasti příčinně spojené se zdrojem od zbytku prostoročasu. V případě takového "odříznutí" nemá smysl mluvit o oblasti I - nemůžeme se do ní z oblasti se zdroji dostat ani z ní obdržet nějaký signál. Nemá samozřejmě ani smysl podmínka spojitého navázání metrik obou oblastí. Naopak metrika oblasti II musí být na hranici oblasti divergentní. Této situaci odpovídá boost-rotačně symetrická metrika (4.1.11) v oblasti $u>0$, $v>0$, která není na hranici $B=0$ regulární, tj. není spněna podmínka (4.1.8).

Dotkněme se ještě druhé stránky problému. Ve skutečnosti není úplně jasné, že by retardovaná metrika od něčeho co nazýváme "rovnoměrně urychlený zdroj" měla být boostově symetrická. Potíž je však v tom, že pokud nebudeme požadovat boostovou symetrii metriky, ztrácí se nám význam slov "rovnoměrně urychlený zdroj" - již nemáme boostový Killingův vektor, pomocí něhož byla definována symetrie zdroje (invariance při posunutí podél orbit tohoto vektoru). Proto není jasné, jak by problém nalezení čistě retardovaného gravitačního pole rovnoměrně urychleného zdroje bez požadavku boostové symetrie šel vůbec nějak zformulovat.

5. URYCHLENÉ POLE A KONFORMNÍ TRANSFORMACE

V této kapitole při zkoumání polí rovnoměrně urychlených zdrojů využijeme konformních vlastností těchto polí. Konformní vlastnosti polí s nulovou hmotou mají však mnohem širší uplatnění. Hrají klíčovou roli v popisu chování polí ve světelném nekonečnu a tedy ve zkoumání zářivých vlastností polí. Konformní transformace nám umožňují přetrasformovat nekonečno do konečné vzdálenosti. Proto využitím invariance polních rovnic vůči konformní transformaci lze úlohu ve fyzikálním prostoročasu přetrasformovat na úlohu v prostoročasu s nekonečnem "stáhlým" do konečna, v kterém lze snadno zkoumat zářivé chování pole.

5.1 Konformní transformace

Budeme se tedy nejdříve zabývat samotnou konformní transformací a transformačními vlastnostmi různých polí. Konformní transformaci budeme rozumět transformaci metriky zachávající úhly mezi vektory a přičinnou strukturu prostoročasu. Úhel mezi dvěma vektory je dán vztahem ¹⁾

$$\cos \hat{\alpha}(\alpha^\circ, b^\circ) = \frac{\alpha^\circ b^\circ g_{ab}}{\|\alpha\| \|\beta\|}, \quad (5.1.1)$$

$$\|\alpha\| = (\alpha^\circ g_{ab} \alpha^\circ)^{1/2}, \quad \|\beta\| = (\beta^\circ g_{ab} \beta^\circ)^{1/2}.$$

Transformace s těmito vlastnostmi mají tvar

$$\Theta: g \rightarrow \hat{g} = \Omega^2 g, \quad (5.1.2)$$

kde Ω je reálná kladná skalární funkce na prostoročase. Jelikož $\Omega^2 > 0$, zachovává se přičinná struktura - časupodobné vektory se převádí na časupodobné, prostorupodobné na prostorupodobné a isotropní na isotropní.

Obecné tensorové objekty můžeme podle jejich transformačních vlastností vůči konformní transformaci rozdělit na tzv. konformní hustoty váhy s . Konformní hustota váhy s se při konformní transformaci transformuje následovně

¹⁾ Výraz (5.1.1) nedefinuje úhel nednoznačně ani v euklidovské geometrii. Jednoznačnost se v tomto případě dosáhne volbou definičního oboru, např.

$$\|\alpha\| \in \mathbb{R}_+, \quad \hat{\alpha}(\alpha^\circ, b^\circ) = \langle 0, \pi \rangle.$$

V Minkowského geometrii pojetí úhlu mezi vektory a veli

$$A \rightarrow \hat{A} = \Sigma^s A . \quad (5.1.3)$$

Váha součinu konformních hustot je součet vah jednotlivých činitelů

$$(\hat{A}\hat{B}) = \hat{A} \hat{B} = \Sigma^s A \Sigma^n B = \Sigma^{s+n} AB . \quad (5.1.4)$$

Přirozené geometrické, metricky nezávislé objekty (jako δ_i^i , $\delta_i^k \delta_j^l$ atd.) se při konformní transformaci zachovávají, tj. jsou konformními hustotami váhy 0.

$$\hat{\delta}_i^i = \delta_i^i . \quad (5.1.5)$$

Transformace metriky indukuje transformaci metricky závislých objektů. Stručně vypíšeme některé z nich. Z posledních dvou vztahů dostáváme, že metrika s indexy "nahore" je konformní hustota váhy -2

$$\hat{\tilde{g}}^{ab} \hat{g}_{bc} = \hat{\delta}_c^a \Rightarrow \hat{\tilde{g}}^{ab} = \Sigma^{-2} \tilde{g}^{ab} . \quad (5.1.6)$$

Ortonormální báse kovektorů e_a^a ($a=1,2,\dots m$) v každém bodě prostoručasu

$$g_{ab} = \eta_{ab} e_a^a e_b^b , \quad \eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (5.1.7)$$

kosti vektoru získáme analytickým prodloužením z euklidovské oblasti. Úhel i velikost zde mohou nabývat komplexních hodnot a pomínky jednoznačnosti můžeme např. zvolit

$\|\alpha\| \in \mathbb{R}^+$ pro α^a prostorupodobné
 $-i\|\alpha\| \in \mathbb{R}^+$ pro α^a časupodobné orientované do budoucnosti
 $i\|\alpha\| \in \mathbb{R}^+$ pro α^a časupodobné orientované do minulosti,

$$\operatorname{Re} \varphi(\alpha^a, b^b) \in (0, \pi) , \quad \operatorname{Im} \varphi(\alpha^a, b^b) \in \mathbb{R}^+ .$$

je váhy 1

$$\hat{e}_a^a = \Omega e_a^a . \quad (5.1.8)$$

Úplně antisymetrický tenzor

$$\varepsilon_{a_1 \dots a_m} = e_{a_1}^1 \wedge \dots \wedge e_{a_m}^m \quad (5.1.9)$$

je konformní hustotou váhy m

$$\hat{\varepsilon}_{a_1 \dots a_m} = \Omega^m \varepsilon_{a_1 \dots a_m} . \quad (5.1.10)$$

Obdobně také element objemu je konformní hustotou váhy m

$$\hat{g}^{ab} = |\hat{\varepsilon}_{a_1 \dots a_m}| = |\Omega|^m |\varepsilon_{a_1 \dots a_m}| = \Omega^m g^{ab} . \quad (5.1.11)$$

Delta-funkce normovaná na element objemu je konformní hustotou váhy $-m$. Pro konformně nezávislou testovací funkci φ totiž platí

$$\langle \hat{S}_P, \varphi \hat{g}^{ab} \rangle = \langle \hat{S}_P, \varphi \Omega^m g^{ab} \rangle = \varphi(P) = \langle S_P, \varphi g^{ab} \rangle . \quad (5.1.12)$$

Dále se budeme zabývat transformací metrické konexe. Konexe je indukovaná metrikou vztahem

$$\hat{\nabla}_a \hat{g}_{bc} = 0 . \quad (5.1.13)$$

Rozdíl dvou konexí lze popsat tensorovou veličinou, proto můžeme psát (srovnej s (2.1.9))

$$\hat{\nabla}_a a^b - \nabla_a a^b = Q_{ae}^b a^e , \quad (5.1.14)$$

$$\hat{\nabla}_a T_{a_1 \dots}^b - \nabla_a T_{a_1 \dots}^b = Q_{ae}^b T_{a_1 \dots}^{eb} + \dots - Q_{ae}^c T_{a_1 \dots}^{eb} - \dots . \quad (5.1.15)$$

Dosazením (5.1.2) do (5.1.13) a využitím (5.1.15) dostaneme (srovnej s (2.1.10))

$$Q_{ab}^e = \lambda_a S_b^e + \lambda_b S_a^e - \bar{\lambda}^e g_{ab}, \quad (5.1.16)$$

kde

$$\lambda_a = d_a \ln S^2 = S^{-1} d_a S, \quad \bar{\lambda}^e = \bar{g}^{ab} \lambda_b. \quad (5.1.17)$$

Pro konformní hustotu váhy s můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_a \hat{A}_{e_1 \dots}^b &= \hat{\nabla}_a (S^e A_{e_1 \dots}^b) = \\ &= S^e (\nabla_a A_{e_1 \dots}^b + Q_{ee_1}^b A_{e_2 \dots}^b + \dots - Q_{ee_1}^e A_{e_2 \dots}^b - \dots + e \lambda_e A_{e_1 \dots}^b). \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

Obdobou k (2.1.11) dostaneme vztah pro Riemannův tenzor

$$\hat{R}_{abc}^d = R_{abc}^d - \nabla_a Q_{bc}^d + \nabla_b Q_{ac}^d + Q_{ae}^e Q_{bc}^d - Q_{be}^e Q_{ac}^d. \quad (5.1.19)$$

Zúžením

$$\hat{Ric}_{ab} = Ric_{ab} - (m-2) \nabla_a \lambda_b - g_{ab} \nabla_m \bar{\lambda}^m + (m-2) \lambda_a \lambda_b - (m-2) g_{ab} \lambda_m \bar{\lambda}^m, \quad (5.1.20)$$

$$\hat{R} = S^2 (R - 2(m-1) \nabla_m \bar{\lambda}^m - (m-2)(m-1) \lambda_m \bar{\lambda}^m). \quad (5.1.21)$$

Weylův konformní tenzor křivosti je definován

$$\begin{aligned} C_{abcd} &= R_{abcd} - \frac{1}{(m-2)} (g_{ac} Ric_{bd} - g_{ad} Ric_{bc} - g_{bc} Ric_{ad} + g_{bd} Ric_{ac}) + \\ &+ \frac{1}{(m-1)(m-2)} R (g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc}). \end{aligned} \quad (5.1.22)$$

Přímým, ale dlouhým výpočtem dostaneme, že je to konformní hustota váhy 2

$$\hat{C}_{abcd} = \sum^2 C_{abcl} ; \quad (5.1.23)$$

pro následující rozložení indexů dostaneme konformní invariant

$$\hat{C}_{abc}^{d} = C_{abc}^{d} . \quad (5.1.24)$$

Dále se zabývajme konformními vlastnostmi některých polních rovnic. Začneme skalárním polem. Předpokládejme, že skalární pole ϕ je konformní hustota váhy s . Přímým výpočtem dostaváme

$$\begin{aligned} \hat{\square} \hat{\phi} &= \hat{\nabla} \cdot \hat{\vec{g}} \cdot \hat{\nabla} \hat{\phi} = \\ &= \sum^{s-2} (\nabla \cdot \vec{g} \cdot \nabla \phi + (2s+m-2) \vec{\lambda} \cdot \nabla \phi + \\ &\quad + s\phi \nabla \cdot \vec{\lambda} + s(m+s-2) \lambda \cdot \vec{\lambda} \phi) . \end{aligned} \quad (5.1.25)$$

Srovnáme-li toto s transformačními vlastnostmi skalární křivosti, dostaneme pro $s = -\frac{m}{2} + 1$, $m > 1$

$$\hat{\nabla} \cdot \hat{\vec{g}} \cdot \hat{\nabla} \hat{\phi} - \frac{m-2}{4(m-1)} \hat{R} \hat{\phi} = \sum^{-\left(\frac{m}{2}+1\right)} (\nabla \cdot \vec{g} \cdot \nabla \phi - \frac{m-2}{4(m-1)} R \phi) . \quad (5.1.26)$$

Zdroj J_s interpretujeme jako prostorovou hustotu skalárního náboje - tj. integrací přes prostorovou nadplochu dostaváme celkový skalární náboj

$$Q = \int_{\Sigma} J_s d^{m-1}\Sigma \quad (5.1.27)$$

Zde $d^{m-1}\Sigma$ je element objemu prostoru podobné nadplochy. Je-li e_a^{α} ($a=0,1,\dots,m-1$) ortonormální báse, e_a^0 je normála k nadploše Σ , tak

$$d^3\Sigma = |e_{s_1} \wedge \dots \wedge e_{s_{m-1}}|_{\Sigma} | \quad (5.1.28)$$

a pomocí (5.1.8) vidíme, že se jedná o konformní hustotu váhy $m-1$. Celkový náboj je globální veličina a je přirozené ji považovat za konformní invariant. To nastává, je-li \hat{J}_s konformní hustota váhy $-(m-1)$

$$\hat{J}_s = \mathcal{R}^{-(m-1)} J_s . \quad (5.1.29)$$

Vidíme, že je-li v dimensi $m=4$ skalární pole konformní hustotou váhy -1 , skalární hustota náboje konformní hustotou váhy -3 , tak rovnice skalárního pole (2.2.2) s $\xi = -\frac{1}{6}$ je konformně invariantní

$$(\square - \frac{1}{6} R) \phi = J_s \rightarrow (\hat{\square} - \frac{1}{6} \hat{R}) \hat{\phi} = \hat{J}_s \quad (5.1.30)$$

Budeme-li v případě elektromagnetického pole předpokládat, že potenciál A_s i intenzita F_s jsou konformní hustoty váhy 0, dostaneme ²⁾

$$F = dA \rightarrow \hat{F} = \hat{d}\hat{A} , \quad (5.1.31)$$

$$\hat{\nabla} \cdot \hat{F} = \mathcal{R}^{-4} (\nabla \cdot F + (m-4) \lambda \cdot F) . \quad (5.1.32)$$

Nechť \hat{J}_E je prostorová hustota elektromagnetického toku. Celkový náboj na prostorupodobné nadploše je dán vztahem

²⁾ $\hat{F}^a = \tilde{g}^{ab} \tilde{g}^{cd} F_{bd}$ je metricky nezávislý objekt a proto $\hat{d}_a = d_a$.

$$Q = \int J_E^a n_a d\sigma \Sigma \quad (5.1.33)$$

Zde n_a je jednotková normála k nadploše, tj. $n_a = e_a^\theta$ v notaci (5.1.28). Z požadavku konformní invariance globálního elektromagnetického náboje opět dostáváme podmíinku na transformační vlastnosti elektromagnetického toku

$$\hat{J}_E = \sum^m J_E \quad , \quad (5.1.34)$$

tj. \hat{J}_E je konformní hustota váhy $-m$. Opět pro $m=4$ dostáváme konformně invariantní rovnice elektromagnetického pole

$$\begin{aligned} F = dA &\rightarrow \hat{F} = \hat{d}\hat{A} \\ \hat{\nabla} \cdot \hat{F} = -\hat{J}_E &\rightarrow \hat{\nabla} \cdot \hat{F} = -\hat{J}_E \quad , \end{aligned} \quad (5.1.35)$$

Obdobně pro kalibrační pole považujeme-li kalibrační stupně volnosti za konformní invarianty, dostáváme pro kalibrační konexi ³⁾

$$\hat{D}_a = D_a \quad , \quad \text{tj. } \hat{A}_{aB}^B = A_{aB}^B \quad (5.1.36)$$

a pro kalibrační intenzitu (tenzor křivosti kalibrační konexe) ⁴⁾

³⁾ Zde je uvažována konexe pouze na kalibračním bundle prostoru. Pokud ji rozšíříme na konexi v tečném bundlu pomocí metrické konexe, tak se bude samozřejmě transformovat pomocí vztahu (5.1.15).

⁴⁾ \hat{D}_a je metricky nezávislý objekt a proto $\hat{D}_a = D_a$. $F^a = \hat{g}^{ab} \hat{g}^{cd} F_{bd}$ je konformní hustota váhy -4 .

$$\hat{F}_{ab} = 2 \hat{\partial}_{[a} \hat{A}_{b]} + i\ell [\hat{A}_{a}, \hat{A}_b] = F_{ab} . \quad (5.1.37)$$

Pohybová rovnice se transformuje podle vztahu

$$\hat{D}_a \hat{F}^{ab} = \tilde{\Omega}^4 (D_a \hat{F}^{ab} + (m-4) \lambda_a \hat{F}^{ab}) . \quad (5.1.38)$$

Bude-li λ_k obdobně k elektromagnetickému toku konformní hustota váhy -4 , dostáváme v dimensi $m=4$ konformně invariantní rovnice kalibračního pole

$$F_{ab}^B \text{ je tensor křivosti } D_a \rightarrow \quad (5.1.39)$$

$$\rightarrow \hat{F}_{ab}^B \text{ je tensor křivosti } \hat{D}_a ,$$

$$D_a \hat{F}^{ab} = \lambda_k^b \rightarrow \hat{D}_a \hat{F}^{ab} = \hat{\lambda}_k^b . \quad (5.1.40)$$

Rovnice gravitačního pole nejsou konformně invariantní. Ze vztahů (5.1.20), (5.1.21) dostaneme

$$\begin{aligned} \hat{Ric} - \frac{1}{2} \hat{g} \hat{R} &= Ric - \frac{1}{2} g R + \\ &+ (m-2)(g \nabla \tilde{\lambda} - \nabla \lambda + \lambda \lambda - (m-2)g \lambda \tilde{\lambda}) . \end{aligned} \quad (5.1.41)$$

Druhý člen na pravé straně je obecně nenulový a vidíme, že Einsteinův gravitační zákon nezachovává při konformní transformaci svůj tvar. Pouze v případě vakuových rovnic, kdy

$$Ric = 0 \quad (5.1.42)$$

a tedy i

$$\underline{R}_{abcd} = \underline{C}_{abcd}, \quad (5.1.43)$$

dostáváme

$$\hat{\underline{R}}_{abc}{}^d = \underline{R}_{abc}{}^d \quad (5.1.44)$$

a pohybové rovnice teorie gravitace zachovávají při konformní transformaci svůj tvar

$$\begin{aligned} \underline{R}_{abc}{}^d &\text{ je tensor křivosti } g_{ab} \rightarrow \\ &\rightarrow \hat{\underline{R}}_{abc}{}^d \text{ je tensor křivosti } \hat{g}_{ab}, \end{aligned} \quad (5.1.45)$$

$$Ric = 0 \rightarrow \hat{R}^c_{bc} = 0. \quad (5.1.46)$$

Stejná situace je i v případě linearizované teorii gravitace.

5.2 Bodová konformní transformace plochého prostoru

Budeme nyní zkoumat speciální transformaci plochého 4-dimensionálního prostoročasu

$$E_{\vec{\alpha}} : M \rightarrow M \quad , \quad P \rightarrow P' \quad , \quad (5.2.1)$$

$$\chi^a(P) = \bar{S}^{-1}(P) (x^a(P) - \vec{x}^2(P) \vec{\alpha}^a) \quad ,$$

$$\bar{S}(P) = 1 - 2 x^a(P) \vec{\alpha}_a + \vec{x}^2(P) \vec{\alpha}^2 \quad , \quad (5.2.2)$$

kde $x^a = (t, x, y, z)$, $a=0,1,2,3$ jsou inerciální souřadnice a \vec{x}^a jsou souřadnice nějakého globálního vektoru⁵⁾ v souřadnicích x^a a

$$\vec{x}^2(P) = x^a x^b \eta_{ab} \quad , \quad \vec{\alpha}^2 = \vec{\alpha}^a \vec{\alpha}^b \eta_{ab} \quad , \quad (5.2.3)$$

$$\vec{\alpha}_a = \eta_{ab} \vec{x}^b \quad , \quad \eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} .$$

Inverzní transformace je daná vztahy

$$\chi^a(P) = S^{-1}(P) (x^a(P) + \vec{x}^2(P) \vec{\alpha}^a) \quad , \quad (5.2.4)$$

$$S = 1 + 2 x^a \vec{\alpha}_a + \vec{x}^2 \vec{\alpha}^2 \quad . \quad (5.2.5)$$

⁵⁾ Globální vektory lze definovat v affinních (tj. plochých) prostorech - jsou to prvky zaměření affinního prostoru. Zhruba řečeno je můžeme považovat za rozdíly bodů. Globální vektory můžeme také modelovat konstantními vektorovými poli. Pokud je budeme používat budeme je značit šipkou, tj. $\vec{\alpha}$, \vec{x}, \dots . Nutno ale dát pozor na nedorozumění, někdy jsme použili šipku i pro obecné tenzorové objekty.

Definujeme-li nové souřadnice x'^a vztahem

$$x'^a(\beta') = x^a(\beta) , \quad \text{kde} \quad \Sigma: P \rightarrow P' , \quad (5.2.6)$$

dostáváme

$$x'^a = \Sigma^{-1}(x^a + \vec{x}^z \vec{\alpha}^a) . \quad (5.2.7)$$

Transformace Σ_α indukuje transformaci vektorů a tenzorů a tedy i metriky

$$\Sigma_\alpha: g \rightarrow g' \quad (5.2.8)$$

Je samozřejmé, že g' je opět plochá metrika - souřadnice x'^a jsou její inerciální souřadnice. Metriku g' můžeme ale vyjádřit i pomocí metriky g .

$$\begin{aligned} g' &= \eta_{ab} dx'^a dx'^b = \\ &= \eta_{ab} d(\Sigma^{-1}(x^a + \vec{x}^z \vec{\alpha}^a)) d(\Sigma^{-1}(x^a + \vec{x}^z \vec{\alpha}^a)) = \\ &= \Sigma^{-2} \eta_{ab} dx^a dx^b + \\ &\quad + \Sigma^{-2} (d\vec{x}^z \sqrt{dx^a \vec{\alpha}_a + \vec{x}^z d\vec{x}^z \vec{\alpha}^z}) - \\ &\quad - \Sigma^{-3} (d\Sigma \sqrt{dx^a (x_a + \vec{x}^z \vec{\alpha}_a)} + d\Sigma \sqrt{dx^z (x^a \vec{\alpha}_a + \vec{x}^z \vec{\alpha}^z)}) + \\ &\quad + \Sigma^{-4} d\Sigma d\Sigma (\vec{x}^z + 2 \vec{x}^z x^a \vec{\alpha}_a + (\vec{x}^z)^2 \vec{\alpha}^z) = \\ &= \Sigma^{-2} g + \\ &\quad + \Sigma^{-2} \left(\frac{1}{2} d\vec{x}^z \sqrt{d(2x^a \vec{\alpha}_a + \vec{x}^z)} \right) + \\ &\quad + \Sigma^{-3} \left(\frac{1}{2} d\Sigma \sqrt{d\vec{x}^z (1 + 2x^a \vec{\alpha}_a + \vec{x}^z \vec{\alpha}^z)} + \frac{1}{2} d\Sigma \sqrt{d(2x^a \vec{\alpha}_a + \vec{x}^z \vec{\alpha}^z) \vec{x}^z} \right) + \\ &\quad + \Sigma^{-2} d\Sigma d\Sigma \vec{x}^z = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum^2 g + \\
 &+ \sum^2 \left(\frac{1}{2} d\vec{x}^2 \vee d(2x^a \vec{x}_a + \vec{x}^2) - \right. \\
 &\quad \left. - \sum^3 \left(\frac{1}{2} d\Omega \wedge d\vec{x}^2 (1 + 2x^a \vec{x}_a + \vec{x}^2 \vec{x}^2) + \frac{1}{2} d\Omega \wedge d(2x^a \vec{x}_a + \vec{x}^2 \vec{x}^2) \vec{x}^2 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum^2 d\Omega d\sum \vec{x}^2 = \right. \\
 &= \sum^2 g . \tag{5.2.9}
 \end{aligned}$$

Tedy metrika \hat{g}' je konformně spojená s původní metrikou \hat{g} .

Lorentzovy transformace spolu s transformacemi E_x a škálovací transformací H_s

$$\begin{aligned}
 H_s : M &\rightarrow M , \quad P \rightarrow P' , \\
 \alpha^*(P') &= s \alpha^*(P) \tag{5.2.10}
 \end{aligned}$$

tvoří konformní grupu – grupu všech bodových transformací převádějících plochý prostoročas na prostoročas konformně plochý.

Skombinujeme-li transformaci E_x s konformní transformací

$$\Theta: \hat{g}' \rightarrow \hat{g} = \sum^2 \hat{g}' = \hat{g} , \tag{5.2.11}$$

dostaneme transformaci zachovávající metriku prostoročasu, měnící však jiné objekty. Právě této transformace v dalším využijeme.

Všimněme si podrobněji transformace E_x . Pro jednoduchost si vybereme typického reprezentanta – položíme

$$\vec{x}^a = (0, 0, 0, \frac{1}{a}) . \tag{5.2.12}$$

Transformace Σ_α má pak tvar

$$\begin{aligned} t' &= \Sigma^{-1} t , \\ z' &= \Sigma^{-1} \left(z + \frac{1}{\alpha^2} (-t^2 + \rho^2 + z^2) \right) , \\ \rho' &= \Sigma^{-1} \rho , \end{aligned} \tag{5.2.13}$$

$$\Sigma = 1 + 2\frac{z}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} (-t^2 + z^2 + \rho^2) = 2\frac{z}{\alpha} + \frac{\chi}{\alpha^2} , \tag{5.2.14}$$

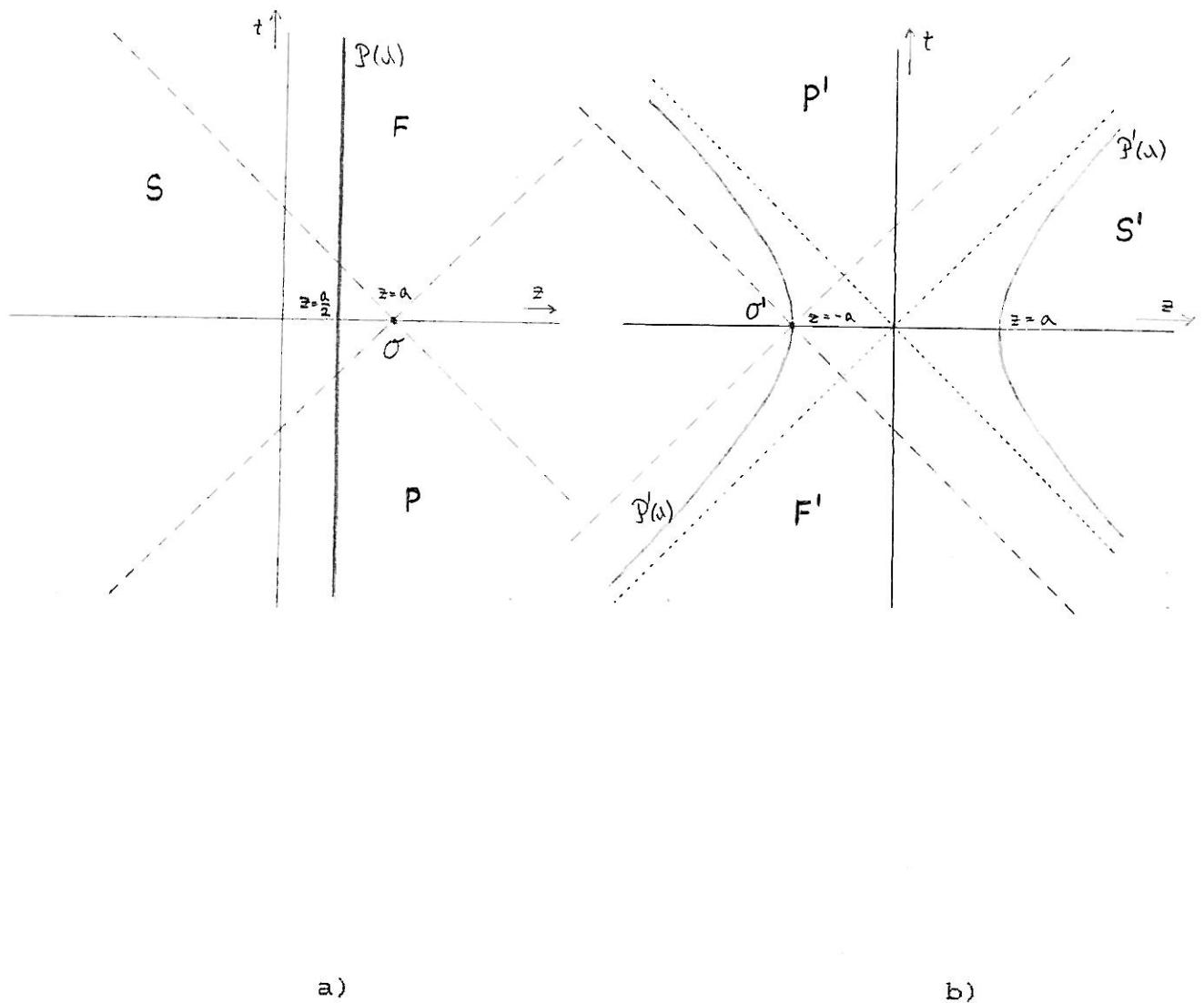
kde jsme použili cylindrických souřadnic definovaných v (3.1.14). Tato transformace je singulární pro body na nadploše dané podmínkou

$$\bar{\Sigma}(P) = 0 \Leftrightarrow t^2 = (z - \alpha)^2 + \rho^2 . \tag{5.2.15}$$

Tyto body se zobrazují do nekonečna. Přitom bod $z=\alpha, t=\rho=0$ se zobrazuje do prostorového a časového nekonečna, ostatní body nadplochy $\bar{\Sigma}=0$ do nekonečna světelného. Další singulární body jsou na nadploše

$$\Sigma(P) = 0 \Leftrightarrow t^2 = (z + \alpha)^2 + \rho^2 \tag{5.2.16}$$

Tato nadplocha je obrazem nekonečna. Konkrétně bod $z=-\alpha, t=\rho=0$ je obrazem prostorového a časového nekonečna, ostatní body nadplochy $\Sigma=0$ jsou obrazem světelného nekonečna. Oblast S vně kuželu $\bar{\Sigma}=0$ se zobrazuje na oblast S' vně kuželu $\Sigma=0$ (obr. 5.1), oblast F na oblast F' a oblast P na oblast P' .



obr. 5.1

Transformace Σ' transformuje prostoročas na sebe. Na obrázku a) je prostoročas před transformací, na obrázku b) po transformaci. Transformace Σ' je singulární pro body na světelném kuželu bodu σ , tento kužel se zobrazuje do nekonečna. Přitom bod σ se zobrazuje do prostorového a časového nekonečna, ostatní body do nekonečna světelného. Další singulární body jsou na světelném kuželu bodu σ' . Tento kužel je obrazem nekonečna. Konkrétně bod σ' je obrazem prostorového a časového nekonečna, ostatní body jsou obrazem světelného nekonečna. Oblast S prostorupodobně položená k bodu σ se zobrazuje na oblast S' prostorupodobně položenou k σ' , oblast F na oblast F' a oblast P na oblast P' .

Pro nás je podstatná transformace světočáry částice stojící v bodě $\tau = \frac{\alpha}{2}, \varphi = 0$, tj. se světočárou

$$\tau = \tau, \quad z = \frac{\alpha}{2}, \quad \varphi = 0 \quad . \quad (5.2.17)$$

Přímým dosazením dostaváme

$$\begin{aligned} - (t(P'))^2 + (z(P'))^2 &= \\ &= - (\bar{\mathcal{R}}^{-1} t(P))^2 + (\bar{\mathcal{R}}^{-1} (z(P) - \frac{1}{\alpha} (-t^2(P) + \bar{\rho}^2(P) + z^2(P))))^2 = \\ &= \bar{\mathcal{R}}^{-2} \left(-\tau^2 + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{\alpha} (-\tau^2 + \frac{\alpha^2}{4}) \right)^2 \right) = \frac{\alpha^2}{(-\tau^2 + \frac{\alpha^2}{4})^2} \frac{1}{\alpha^2} (-\tau^2 + \frac{\alpha^2}{4})^2 = \\ &= \alpha^2 \quad . \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

Tedy obrazem přímky (5.2.17) je hyperbola. Jinak řečeno, transformací stojící částice (vůči metrice g) dostaneme částici rovnoměrně urychlenou (vůči též metrice g). Tohoto faktu využijeme pro nalezení pole od urychlené částice.

Poznamenejme, že námi odvozený výsledek o transformaci speciálně položené přímky na hyperbolu je důsledkem mnohem obecnější skutečnosti. Libovolnou časupodobnou hyperbolu převede transformace $\bar{\mathcal{E}}_{\bar{\mathcal{R}}}$ opět na časupodobnou hyperbolu, kde časupodobná přímka je speciálním degenerovaným případem hyperboly se středem v nekonečnu a nekonečným poloměrem. Tento výsledek a další diskuse bodových konformních transformací jsou rozvedeny v appendixu 5.A.

5.3 Skalární a elektromagnetické pole urychleného náboje

Nyní využijeme invariance rovnic skalárního pole a elektromagnetického pole vůči transformaci Ξ_α i θ . Přetransformujeme řešení rovnic pole v plochém prostoročase se zdrojem J_s na řešení stejných rovnic (díky invarianci) ve stejném plochém prostoročase ($\hat{g} \cdot \hat{\nabla} g' = g$), ale s jiným zdrojem $\hat{J} = \theta \cdot \Xi_\alpha [J]$. Přitom využijeme toho, že transformace $\theta \circ \Xi_\alpha$ převádí světočáru stojící částice na světočáru dvou rovnoměrně urychlených částic.

Konkrétně pro skalární pole je zdroj odpovídající částici stojící v bodě $z = \frac{\alpha}{2}, \eta = 0$ dán

$${}^{un}J_s = \int e \delta({}^{un}\mathcal{P}(\lambda), x) d\lambda = \delta(z - \frac{\alpha}{2}) . \quad (5.3.1)$$

Transformací Ξ_α dostaneme

$${}^{un}J'_s = \int e \delta'({}^{un}\mathcal{P}'(\lambda'), x) d\lambda' , \quad (5.3.2)$$

kde apostrofy u delta-funkcí označují normování na element objemu g'^2 (viz. appendix 3.A) a je vlastní čas v metrice g' . Díky (5.2.9) a (5.1.11) můžeme psát

$$\delta'_{\mathcal{P}} = \Sigma^4 \delta_{\mathcal{P}} . \quad (5.3.3)$$

Využitím (5.1.8) dostaneme

$$d\lambda' = \Sigma^{-1} d\lambda . \quad (5.3.4)$$

Dosazením do (5.3.2) máme

$${}^{un}J_s' = \Sigma^3 e \int \delta(P(\lambda), \infty) d\lambda = \Sigma^3 {}^{ace}J_s , \quad (5.3.5)$$

kde ${}^{ace}P = {}^{un}P'$ je obraz přímky ${}^{un}P$, tj. světočára dvou urychlených částic (vůči \hat{g}) (obr. 5.1), λ je vlastní čas světočáry ${}^{ace}P$ vůči metrice \hat{g} a ${}^{ace}J_s$ je skalární tok příslušící této světočáře. Řešení konformně invariantní rovnice skalárního pole se zdrojem ${}^{un}J_s$,

$$(\square - \frac{1}{6} R) {}^{un}\phi = {}^{un}J_s \quad (5.3.6)$$

je dané (3.2.21)

$${}^{un}\phi = - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R} , \quad (5.3.7)$$

kde

$$R = (\rho^2 + (z - \frac{a}{2})^2)^{\frac{1}{2}} . \quad (5.3.8)$$

Transformace \square toto řešení převádí na řešení ${}^{un}\phi'$ rovnice

$$(\square' - \frac{1}{6} R') {}^{un}\phi' = {}^{un}J_s' , \quad (5.3.9)$$

kde apostrofy v $(\square' - \frac{1}{6} R')$ znamenají odkaz na metriku \hat{g}' . Jak jsme ověřili v 5.1, konformní transformace θ zachovává tvar této rovnice, tj. vede ke vztahu

$$(\square - \frac{1}{6} R) {}^{un}\hat{\phi} = {}^{un}\hat{J}_s , \quad (5.3.10)$$

kde $(\square - \frac{1}{6} R)$ je vyjádříme vůči metrice $\hat{g} = R^2 g' = g$ a (viz. (5.1.30), (5.3.5))

$${}^{un}\hat{\phi} = \Sigma^{-1} {}^{un}\phi' , \quad (5.3.11)$$

$$\overset{un}{\hat{J}}_s = \sum^2 \overset{un}{J}_s^I = \overset{acc}{J}_s . \quad (5.3.12)$$

Pole $\overset{un}{\hat{\phi}}$ tedy je pole od zdroje $\overset{acc}{J}_s$, tj. skalární pole dvou rovnoměrně urychlených částic. Přímým výpočtem dostaneme

$$\begin{aligned} \overset{acc}{\phi} &= -\frac{e}{4\pi} \frac{1}{R\pi'} = \\ &= -\frac{e}{4\pi} \frac{1}{\Omega(\rho'^2 + (z' - \frac{a}{2})^2)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= -\frac{e}{4\pi} \frac{1}{(\rho^2 + (z^2 + \frac{1}{\alpha}(-t^2 + z^2 + \rho^2) - \frac{a}{2}\Omega)^2)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= -\frac{e}{4\pi} \frac{1}{(\rho^2 + (-t^2 + z^2 + \rho^2 - a^2)^2)^{\frac{1}{2}}} = \\ &\approx -\frac{e}{4\pi} \frac{1}{R} . \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

Toto je přesné pole (3.2.12), které jsme interpretovali jako kombinaci retardovaného pole jedné urychlené částice a advancovaného pole druhé urychlené částice (viz. závěr paragrafu 3.2).

Stejným postupem pro elektromagnetické pole máme

$$\overset{un}{J}_E^a(x) = \int e^{\overset{un}{u}^a} \delta(\overset{un}{P}(\lambda), x) d\lambda , \quad (5.3.14)$$

$$\begin{aligned} \overset{un}{J}_E^{Ia}(x) &= \int e^{\overset{un}{u}^a} \delta'(\overset{un}{P}(\lambda), x) d\lambda' = \\ &= \sum^4 \int e^{\overset{acc}{u}^a} \delta(\overset{acc}{P}(\lambda), x) d\lambda = \sum^4 \overset{acc}{J}_E^a , \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

$$\overset{un}{F}_{ab} = -\frac{e}{4\pi} \frac{1}{R^2} d_a t \wedge d_b \pi , \quad (5.3.16)$$

$$\overset{un}{F}_{ab}^I = -\frac{e}{4\pi} \frac{1}{R^2} d_a t' \wedge d_b \pi' \quad (5.3.17)$$

a transformace $\hat{\square}$ převádí rovnici

$$\hat{\square}_a^I \text{un} \hat{F}_{ab} = - \text{un} \hat{J}_E^b \quad (5.3.18)$$

na (viz. (5.1.35))

$$\hat{\square}_a^I \text{un} \hat{F}_{ab} = - \text{un} \hat{J}_E^b \quad , \quad (5.3.19)$$

kde

$$\text{un} \hat{J}_E^b = \Omega^{-4} \text{un} J_E^b = \text{acc} J_E^b \quad , \quad (5.3.20)$$

$$\text{un} \hat{F}_{ab} = \Omega^{-4} \hat{F}_{ab} \quad , \text{ resp. } \text{acc} F_{ab} \equiv \text{un} \hat{F}_{ab} = \text{un} F_{ab} \quad . \quad (5.3.21)$$

Pole $\text{un} \hat{F}_{ab}$ je elektromagnetické pole vzniklé od dvou symetricky umístěných urychlených částic (částice a antičástice - částice mají opačnou 4-rychlosť). Přímým dosazením dostaneme

$$\begin{aligned} \text{acc} F &= \text{un} \hat{F} = -\frac{e}{4\pi} \frac{1}{R^2} dt' \wedge dr' = -\frac{e}{4\pi} \frac{2\alpha}{\xi^2} \Omega^2 d(\Omega^{-1} t) \wedge d(\Omega^{-1} \xi) = \\ &= -\frac{e}{4\pi} \frac{8\alpha^2}{\xi^3} \frac{1}{2\Omega \alpha} \left[\Omega \frac{1}{2} dt \wedge \xi d\xi - \frac{1}{2} t d\Omega \wedge \xi d\xi - \frac{1}{2} \xi^2 dt \wedge d\Omega \right] = \\ &= -\frac{e}{4\pi} \frac{8\alpha^2}{\xi^3} \frac{1}{2\Omega \alpha} \left[\Omega \left(\frac{1}{\alpha^2} (\alpha^2 + 2z\alpha + \bar{x}^2) X + 2\frac{t}{\alpha^2} X - 2\frac{t^2}{\alpha^2} (X - 2\alpha^2) - 4\frac{\xi^2}{\alpha^2} (X - 2\alpha^2)^2 \right) dt \wedge d\Omega + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{t}{\alpha^2} (X - 2\alpha^2) Z + \frac{t}{\alpha^2} (Z + \alpha) X \right) dz \wedge d\Omega + \left((\alpha^2 + 2z\alpha + \bar{x}^2)(X - 2\alpha^2) \frac{Z}{\alpha^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2t^2 \frac{Z}{\alpha^2} (X - 2\alpha^2) - 2\frac{t^2}{\alpha^2} (Z + \alpha)(X - 2\alpha^2) - \frac{1}{\alpha^2} (Z + \alpha)(4\alpha^2 \xi^2 + X^2 - 2\alpha^2) \right) dt \wedge dz \right] = (5.3.22) \\ &= -\frac{e}{4\pi} \frac{8\alpha^2}{\xi^3} \frac{1}{2\Omega \alpha} \left[\Omega \left(\frac{1}{\alpha^2} X^2 - \frac{1}{\alpha^2} (X - 2\alpha)^2 + 2\frac{Z}{\alpha} X + 4t^2 - 4\xi^2 \right) dt \wedge d\Omega + \right. \\ &\quad \left. + \frac{t\xi}{\alpha} (\alpha^2 + 2z\alpha + \bar{x}^2) dz \wedge d\Omega + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha} \left((X - 2\alpha^2)(\bar{t}^2 + 2z\alpha + \bar{x}^2) - (X - 2\alpha^2)2\xi^2 - 4\alpha^2 \xi^2 - 4\alpha z \xi^2 \right) dt \wedge dz \right] = \\ &= -\frac{e}{4\pi} \frac{1}{\alpha R^3} \left[\Omega Z dt \wedge d\Omega + \xi t dz \wedge d\Omega + \frac{1}{2} (Z^2 - t^2 - \alpha^2 - \xi^2) dt \wedge dz \right] . \end{aligned}$$

což je přesně pole (3.3.10), které jsme interpretovali jako kombinaci retardovaného pole jedné částice a advancovaného pole druhé částice.

5.4 Kalibrační pole urychlených částic

V případě kalibračního pole je situace díky nelinearitě rovnic složitější. Potíže se již vyskytnou ve zvolení kalibračního toku stojící částice tak, aby splňoval podmínu zachování (2.3.21)

$$D_e J_k^{\frac{e}{B}} = 0 \quad . \quad (5.4.1)$$

Problémem je, že sama konexe D_e je kalibračně závislá na toku J_k . Nemůžeme proto ověřit platnost (5.4.1) před vyřešením pohybových rovnic, a řešení je obecně obtížné. Navíc pro bodovou částici můžeme očekávat, že kalibrační pole D_e bude na světočáře částice singulární. Potom ale nebude mít rovnice (5.4.1) dobrý smysl (J_k je lokalizovaný na světočáře částice). Naštěstí obě tyto potíže lze vyřešit volbou vhodné kalibrační podmínky.

Kalibrační tok representující bodovou částici se světočárou $\beta(\lambda)$ je

$$J_k^{\frac{e}{B}} = \int q_B^{\frac{e}{B}}(\lambda) u^e(\lambda) \delta(\beta(\lambda)/x) d\lambda \quad , \quad (5.4.2)$$

kde $q_B^{\frac{e}{B}}$ je kalibrační náboj splňující

$$q^+ = q^- \quad (5.4.3)$$

Platí

$$\begin{aligned} D_e \int q_B^{\frac{e}{B}} u^e \delta(\beta(\lambda)/x) d\lambda &= \\ &= \int u^e (D_e q_B^{\frac{e}{B}}) \delta(\beta(\lambda)/x) d\lambda + \int q_B^{\frac{e}{B}} \nabla_e (u^e \delta(\beta(\lambda)/x)) d\lambda = \end{aligned}$$

$$= \int u^a (D_a q^B_{\underline{B}}) \delta(\beta(\lambda)/x) d\lambda , \quad (5.4.4)$$

kde jsme využili (3.3.3) a toho, že D_a je na tečném prostoru prostoročasu metrická konexe ∇_a . Rovnice (5.4.1) tedy vede na

$$\frac{D}{d\lambda} q^B_{\underline{B}} = u^a D_a q^B_{\underline{B}} = 0 . \quad (5.4.5)$$

Zvolíme-li kalibraci - speciální bázi \mathcal{Q}_A^B a k ní příslušející plochou konexi ∂_a v prostoru vnitřních stupňů volnosti, můžeme psát (viz. (2.3.14))

$$D = u^a D_a q^B_{\underline{B}} = u^a \partial_a q^B_{\underline{B}} + i\ell [u^a A_a, q]_{\underline{B}}^B . \quad (5.4.6)$$

Zdrojem problémů je člen s potenciálem A_a . Naštěstí se zde vyskytuje pouze některé složky potenciálu.

Ukážeme, že existuje kalibrační transformace, která tyto složky "vynuluje". Tj. že vhodnou transformací (2.3.17), (2.3.19)

$$\tilde{A}_{a\underline{B}} = A_{a\underline{B}} + \frac{1}{i\ell} (\partial_a T^B_{\underline{B}}) T^{-1}^{\underline{C}} \quad (5.4.7)$$

dosáhneme

$$u^a \tilde{A}_{a\underline{B}} = 0 . \quad (5.4.8)$$

Transformace $T^B_{\underline{B}}$ budeme hledat ve tvaru *)

*) Exponenciala v libovolné algebře (v našem případě $E^{1,0} \mathbb{P}$ s násobením $(A \cdot B)^{\underline{B}} = A^{\underline{B}} \underline{B}^{\underline{C}} B^{\underline{C}}$) lze definovat řadou

$$\exp A = \mathbb{I} + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots$$

$$T_B^A = (\exp i\epsilon t)^B_A . \quad (5.4.9)$$

Podmínka (2.3.16) vede na

$$t^{f_B}_B = t^A_B . \quad (5.4.10)$$

Musíme tedy nalézt t^A_B tak, aby

$$\begin{aligned} 0 &= U^e \tilde{A}_{eB}^A = U^e A_{eB}^A + \frac{1}{i\lambda} U^e \partial_e (\exp i\epsilon t)^B_C (\exp -i\epsilon t)^C_B \\ &= U^e A_{eB}^A + \frac{\partial}{\partial \lambda} t^A_B = \\ &= U^e A_{eB}^A + \frac{d}{d\lambda} (t^A_B) e_A^B e_B^B , \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

kde

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \equiv U^e \partial_e \quad (5.4.12)$$

Dostáváme tak snadno řešitelné rovnice (v reálných číslech)

$$\frac{d}{d\lambda} t^A_B = - U^e A_{eB}^A , \quad A_1 B = 1, 2, \dots, N . \quad (5.4.13)$$

Jejich vyřešením nalezneme hledanou transformaci .

Můžeme tedy bez újmy na obecnosti položit podmínu (5.4.8). V této kalibraci se požadavek zachovávání toku redukuje na podmínu

$$0 = \frac{\partial}{\partial \lambda} q_B^A = U^e \partial_e q_B^A = \frac{d}{d\lambda} (q_B^A) e_A^B e_B^B \quad (5.4.14)$$

tj. požadavek konstantnosti kalibračního náboje vůči zvolené bázi.

Budeme nyní hledat kalibrační pole stojící částice, které splňuje kalibrační podmínu (5.4.8). Kalibrační tok stojící částice napišeme ve tvaru

$$\begin{aligned} {}^{un}J_k^{\alpha}{}_{\beta} &= \int q^{\alpha}{}_{\beta} {}^{un}U^{\gamma} \delta({}^{un}P(\lambda) | x) d\lambda , \\ q^{\alpha}{}_{\beta}(P) &= q^{\alpha}{}_{\beta} e_{\alpha}^{\beta}(P) e_{\beta}^{\beta}(P) , \\ {}^{un}U^{\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \tau} , \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

kde e_{α}^{β} je orthonormální báze v prostoru vnitřních stupňů volnosti, ∂_{α} k ní příslušející konexe a $q^{\alpha}{}_{\beta}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, N$, N dimenze fibru $E(M)$) je konstantní matice čísel (nezávislá na bodu prostoročasu). Tj.

$$\partial_{\alpha} q^{\alpha}{}_{\beta} = 0 \quad (5.4.16)$$

Ukážeme nyní, že kalibrační pole splňující pohybové rovnice (2.3.20) se združením je dáno následujícím potenciálem vůči bázi e_{α}^{β}

$${}^{un}A_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\beta} = -\frac{1}{4\pi} q^{\alpha}{}_{\beta} \frac{t}{R^2} d_s R , \quad (5.4.17)$$

kde R je dáno výrazem (5.3.8).

Tenzor křivosti je

$$\begin{aligned} {}^{un}F_{\alpha\beta}{}^{\beta}{}_{\beta} &= 2 \partial_{[\alpha} {}^{un}A_{\beta]}{}^{\beta}{}_{\beta} + i \epsilon [{}^{un}A_{\alpha}, {}^{un}A_{\beta}]{}^{\beta}{}_{\beta} = \\ &= -\frac{1}{4\pi} q^{\alpha}{}_{\beta} \frac{1}{R^2} d_s t \Lambda d_s R . \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

Levá strana pohybové rovnice (3.2.20) má tvar

$$\begin{aligned} {}^{un}D_{\alpha} {}^{un}\tilde{F}_{\beta}^{\alpha\beta} &= \partial_{\alpha} {}^{un}\tilde{F}_{\beta}^{\alpha\beta} + ie [{}^{un}A_{\alpha}, {}^{un}\tilde{F}_{\beta}^{\alpha\beta}]_{\beta} = \\ &= -\frac{1}{4\pi} q_{\beta}^B \nabla \left(\frac{1}{R^2} 2 \left(-\frac{\partial^k}{\partial t} \right) \frac{\partial^k}{\partial R} \right) + \\ &\quad + ie \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{R^4} d_{\alpha} R 2 \left(-\frac{\partial^k}{\partial t} \right) \frac{\partial^k}{\partial R} [q_{\alpha} q_{\beta}]_{\beta}. \end{aligned} \quad (5.4.19)$$

Zde jsme využili toho, že konekce ∂_{α} se na tečném prostoru k prostoročasu chová jako metrická konekce D_{α} . První člen je až na povahu náboje shodný s divergencí elektromagnetické intenzity stojící částice (5.3.16), druhý člen je nulový díky antisymetrii komutátoru, tj.

$${}^{un}D_{\alpha} {}^{un}\tilde{F}_{\beta}^{\alpha\beta} = -q_{\beta}^B \int {}^{un}U^{\alpha} \partial({}^{un}\tilde{F}(\lambda)/x) d\lambda = -{}^{un}J_k^{\alpha} \quad , \quad (5.4.20)$$

což jsme chtěli ukázat. Musíme ještě ale ověřit splnění podmínky (5.4.1). Potenciál (5.3.17) splňuje kalibrační podmínu (5.4.14)

$${}^{un}U^{\alpha} {}^{un}A_{\alpha} = -\frac{1}{4\pi} q \frac{t}{R^2} \frac{\partial^k}{\partial t} d_{\alpha} R = 0 \quad (5.4.21)$$

a proto vztah (5.4.16) zajišťuje zachovávání toku.

Z pole stojící částice se pokusíme nalézt pole dvou urychlených částic stejným postupem jako pro skalární a elektromagnetické pole. K tomu účelu musíme rozšířit transformaci \square_{α} na bundle prostor E_M . Jediné co budeme požadovat, aby toto rozšíření zachovávalo strukturu H_{AB} , což lze zapsat

$$\square_{\alpha} : P \rightarrow P' , \quad e_A^{\alpha} \in E_P M \rightarrow e_A^{\alpha} \in E_{P'} M \quad (5.4.22)$$

e_A^{α} ortonormální \rightarrow e_A^{α} ortonormální

Transformace \hat{E}_a převede pohybové rovnice (5.4.20) s tokem stojící částice a kalibrační podmítku (5.4.21) na

$$\overset{un}{D}_a^I \overset{un}{F}^{ab} = - \overset{un}{J}_k^b , \quad (5.4.23)$$

$$\overset{un}{F}_{ab}^I = 2 \partial_{[a} \overset{un}{A}_{b]}^I + i\epsilon [\overset{un}{A}_a^I, \overset{un}{A}_b^I] ,$$

$$\overset{un}{U}^a \overset{un}{A}_a^I = \Im^{acc} U^a \overset{un}{A}_a^I = 0 , \quad (5.4.24)$$

kde

$$\begin{aligned} \overset{un}{J}_k^a &= \int q^1 \overset{un}{U}^a \delta'(\overset{un}{\varphi}(x)) dx' = \\ &= \Im^4 \int q^1 \overset{acc}{U}^a \delta(\overset{acc}{\varphi}(x)) dx' = \Im^4 \overset{acc}{J}_k^a , \end{aligned} \quad (5.4.25)$$

$$\overset{un}{F}_{ab}^I = -\frac{1}{4\pi} q^1 \frac{1}{|x|^2} d_a t' \lambda d_b n' , \quad (5.4.26)$$

$$\overset{un}{A}_a^I = -\frac{1}{4\pi} q^1 \frac{t'}{|x|^2} d_a n' . \quad (5.4.27)$$

Zde

$$q^1 \overset{un}{A}_B^a = q^1_B e^A_A e^B_B . \quad (5.4.28)$$

Jsou-li A_a a E_b konformní hustoty váhy 0, J_k^a konformní hustota váhy -4 (viz. (5.2.39), (5.1.40)), tak transformace $\hat{\theta}$ převede tyto rovnice na

$$\overset{un}{\hat{D}}_a^I \overset{un}{\hat{F}}^{ab} = - \overset{un}{\hat{J}}_k^b , \quad (5.4.29)$$

$$\overset{un}{\hat{F}}_{ab}^I = 2 \partial_{[a} \overset{un}{\hat{A}}_{b]}^I + i\epsilon [\overset{un}{\hat{A}}_a^I, \overset{un}{\hat{A}}_b^I] = \overset{un}{\hat{F}}_{ab}^I ,$$

$$\overset{un}{U}^a \overset{un}{\hat{A}}_a^I = \Im^{-1} \overset{un}{U}^a \overset{un}{\hat{A}}_a^I = \overset{acc}{U}^a \overset{un}{\hat{A}}_a^I = 0 . \quad (5.4.30)$$

kde

$$\text{un} \hat{\mathbf{J}}_k^a = \sum q^a \text{un} \mathbf{J}_k^{ia} = \text{acc} \mathbf{J}_k^a , \quad (5.4.31)$$

$$\text{un} \hat{\mathbf{F}}_{ab}^i = \text{un} \mathbf{F}_{ab}^i . \quad (5.4.32)$$

Vidíme, že $\text{acc} \mathbf{D}_a \equiv \text{un} \hat{\mathbf{D}}_a$ (s tenzorem křivosti $\text{acc} \mathbf{F}_{ab} \equiv \text{un} \hat{\mathbf{F}}_{ab}^i$) je hledané kalibrační pole od zdroje $\text{acc} \mathbf{J}_k^a$ representující dvě urychlené částice. Díky (5.4.28) a kalibrační podmínce (5.4.30) se tok $\text{acc} \mathbf{J}_k^a$ v poli $\text{acc} \mathbf{D}_a$ zachovává.

Jelikož až na povahu náboje je tenzor křivosti shodný s výrazem pro elektromagnetické pole, můžeme psát

$$\text{acc} \mathbf{F}_{ab}^i = -\frac{1}{4\pi} q^a \frac{1}{R^3} \left[qz dt d\varphi + qt dz dt \delta^i_j + \frac{1}{2} (z^2 - t^2 - a^2 - \rho^2) dt dz \right] . \quad (5.4.33)$$

Pro potenciál $\text{acc} \mathbf{A}_a^B$ dostáváme

$$\begin{aligned} \text{acc} \mathbf{A}_a^B &= \text{un} \mathbf{A}_a^B = -\frac{1}{4\pi} q^B \frac{t'^2}{R^3} d_a R' = \\ &= -\frac{1}{4\pi} q^B \frac{9at}{\xi^2} \sum d_a (\sum \xi^i) = \\ &= \frac{1}{4\pi} q^B \frac{4at}{\xi^3} \left(\frac{1}{2} d_a \sum \frac{\xi^i}{R^2} - \frac{1}{2} \xi^i d_a \xi^i \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi} q^B \frac{t}{R^3} \left[t \left(\frac{2R^2}{R^2} - \frac{1}{a} (l-a) \right) dz - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{2R^2}{R^2} (z+a) - \frac{z}{a} (l-a) \right) dz - \right. \\ &\quad \left. - q \left(\frac{2R^2}{R^2} - \frac{1}{a} l \right) d\rho \right] . \end{aligned} \quad (5.4.34)$$

Dodatek 5.A Sférická inverze

Při zkoumání konformních vlastností prostoročasu jsme užili transformace Σ_α dané v (5.2.1). Tyto transformace mají názornou geometrickou interpretaci. Jedná se o složení dvou sférických inverzí a posunutí.

Sférická inverze se středem \vec{O} v plochém prostoru s metrikou η obecné signatury je dána vztahem

$$I_\sigma : M \rightarrow M \quad , \quad x \mapsto x' \\ \vec{x}' = \frac{e^{\varphi} \vec{x}}{\vec{x}^2} \quad , \quad (5.A.1)$$

kde e je charakteristická délka, \vec{x} je polohový vektor spojující střed inverze s bodem x (viz. §) na str. 147) a

$$\vec{x}^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} \quad (5.A.2)$$

je kvadrát délky vektoru \vec{x} v příslušné metrice.

V 4-dimensionálním Minkowského prostoročase můžeme v inerciálních souřadnicích psát

$$x^\alpha(P') = \frac{e^\varphi x^\alpha(P)}{\vec{x}^2(P)} \quad . \quad (5.A.3)$$

Kombinací dvou sférických inverzí a translace dostaneme

$$x^\alpha(I \circ T_{-e^\varphi \vec{\alpha}} \circ I(P)) = \frac{e^\varphi x^\alpha}{\vec{x}^2} \Big|_{T_{-e^\varphi \vec{\alpha}} \circ I(P)} = \\ = \frac{e^\varphi (x^\alpha - e^\varphi \vec{\alpha}^\alpha)}{(\vec{x} - e^\varphi \vec{\alpha})^2} \Big|_{I(P)} = \frac{e^\varphi}{(\frac{e^\varphi \vec{x}^\alpha}{\vec{x}^2} - \vec{\alpha}^\alpha e^\varphi)} \left(\frac{e^\varphi \vec{x}^\alpha}{\vec{x}^2} - \vec{\alpha}^\alpha e^\varphi \right) \Big|_P =$$

$$= (1 - 2x^a \bar{x}_a + \bar{x}^a \bar{x}^a)^{-1} (x^a \bar{x}^a \bar{x}^a) = x^a (\Sigma_{\bar{x}} [P]) , \quad (5.A.4)$$

což jsme chtěli ukázat.

Sférická inverze je také prvkem konformní grupy - indukována metrika je daná

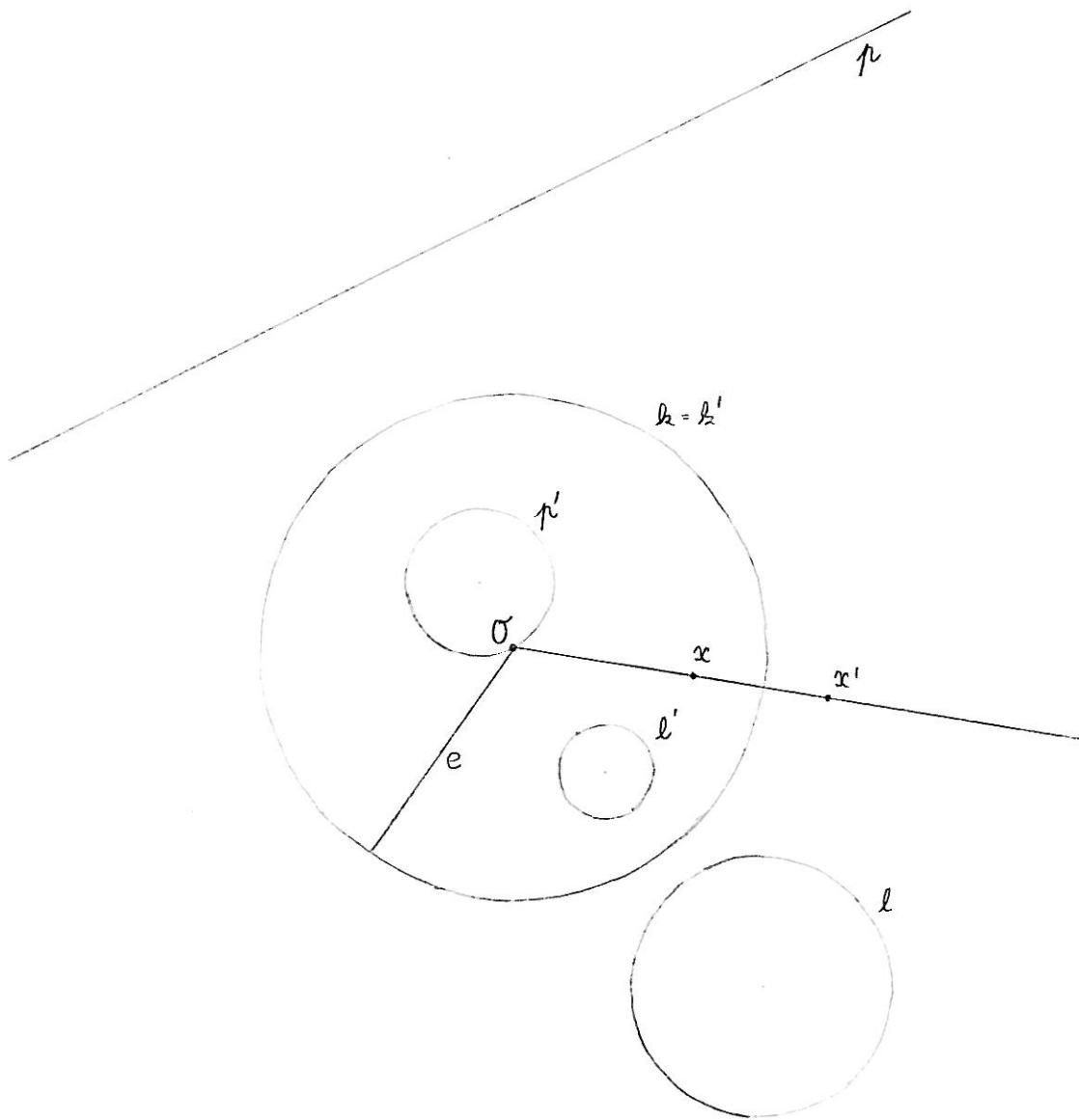
$$\begin{aligned} {}'g &= \eta_{ab} dx'^a dx'^b = \eta_{ab} e^4 d\bar{x}^a d\frac{x^b}{\bar{x}^a} = \\ &= \frac{e^4}{(\bar{x}^a)^2} \eta_{ab} dx^a dx^b - \\ &\quad - \frac{e^4}{(\bar{x}^a)^3} d\bar{x}^a \wedge dx^a \eta_{ab} x^b + \frac{e^4 \bar{x}^a}{(\bar{x}^a)^4} d\bar{x}^a d\bar{x}^a = \\ &= \frac{e^4}{(\bar{x}^a)^2} g . \end{aligned} \quad (5.A.5)$$

Můžeme tedy sférické inverze s různými středy ⁷⁾ použít jako generátory konformní grupy místo transformací $\Sigma_{\bar{x}}$. Stačí nám tedy podrobněji zkoumat sférickou inverzi a získané výsledky případně přenést na transformace $\Sigma_{\bar{x}}$.

Všeobecně jsou známy vlastnosti kruhové inverze - speciálního případu sférické inverze v euklidovské rovině ⁸⁾. Tato transformace převádí obecně položené kružnice na obecně položené kružnice, přímky na kružnice procházející středem inverze a naopak (obr. 5.2). Rovinu lze doplnit jedním bodem v nekonečnu a ten přechází při kruhové inverzi na střed

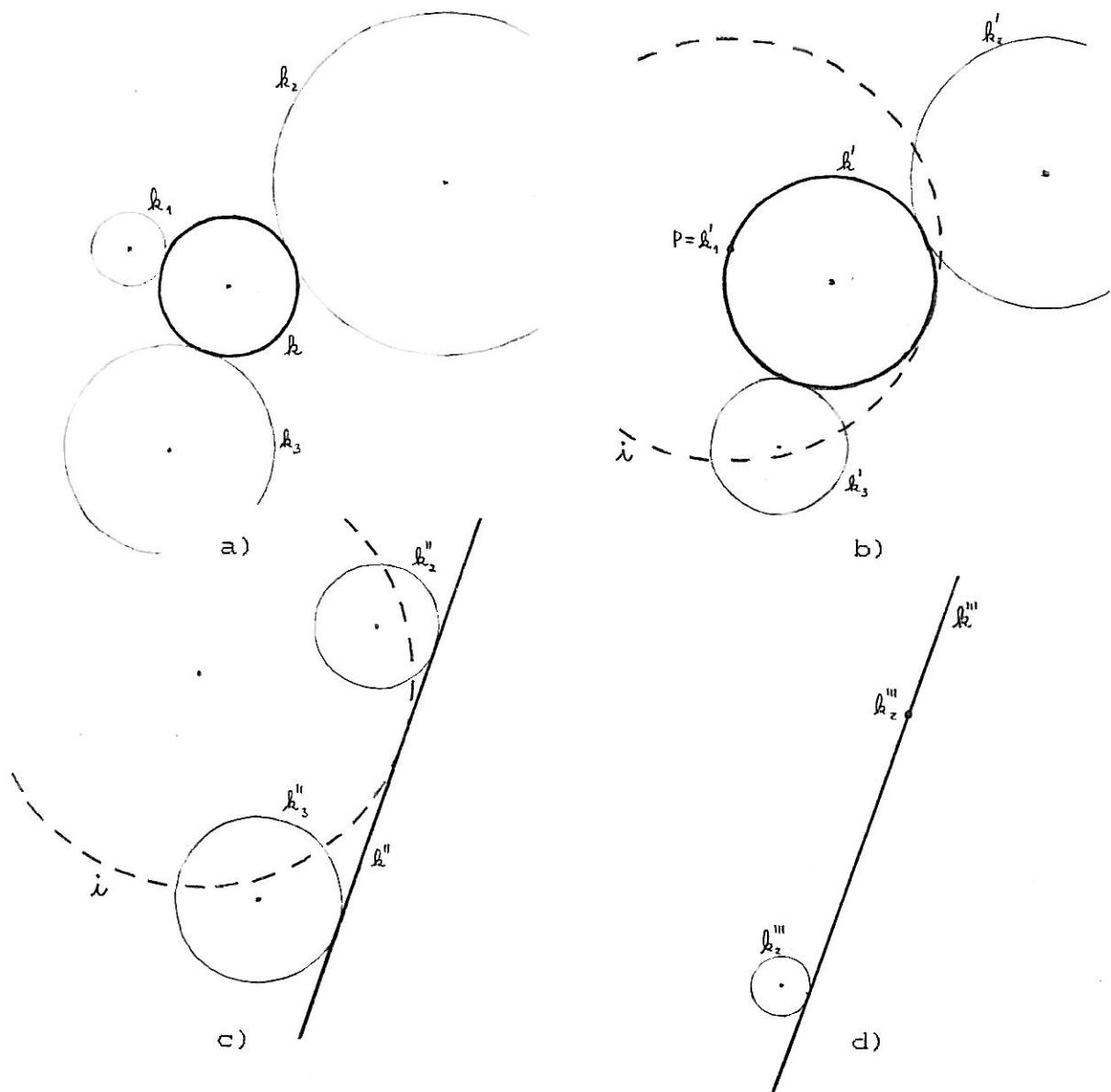
⁷⁾ Změna e odpovídá škálovací transformaci.

⁸⁾ Pomocí kruhové inverze lze poměrně elegantně vyřešit tzv. Apollonovy úlohy - nalezení kružnice dotýkající se tří kružnic. Přitom přímka a bod se považují za degenerovaný případ kružnic. Jeden příklad viz. obrázek 5.3.



obr. 5.2

Kruhová inverze zobrazuje bod \mathfrak{x} na bod \mathfrak{x}' tak, že \mathfrak{x}' leží na polopřímce \overrightarrow{Ox} a $|x-O||x'-O|=e^2$. Kruhová inverze převádí obecně položené kružnice na kružnice, přímky na kružnice procházející počátkem a kružnice procházející počátkem na přímky.



obr. 5.3

Pomocí kruhové inverze lze vyřešit jinak velmi obtížnou geometrickou úlohu nalezení kružnice dotýkající se tří zadaných kružnic. Na obrázcích a) až d) je postup (bez diskuse všech možností) přetrafovaní této úlohy na úlohu nalezení tečny ke kružnici procházející daným bodem. Na obrázcích jsou hledaná kružnice a její transformace vyznačeny silně.

- a) → b) dilatace poloměru všech kružnic o poloměr jedné z nich, tj. degenerace jedné z nich v bod
- b) → c) kruhová inverze podle libovolné kružnice se středem v $P = k_1'$
- c) → d) dilatace poloměru zbylých kružnic o poloměr jedné z nich, tj. degenerace jedné z nich v bod

inverze a naopak. Potom lze chápát přímku jako kružnici procházející bodem v nekonečnu.

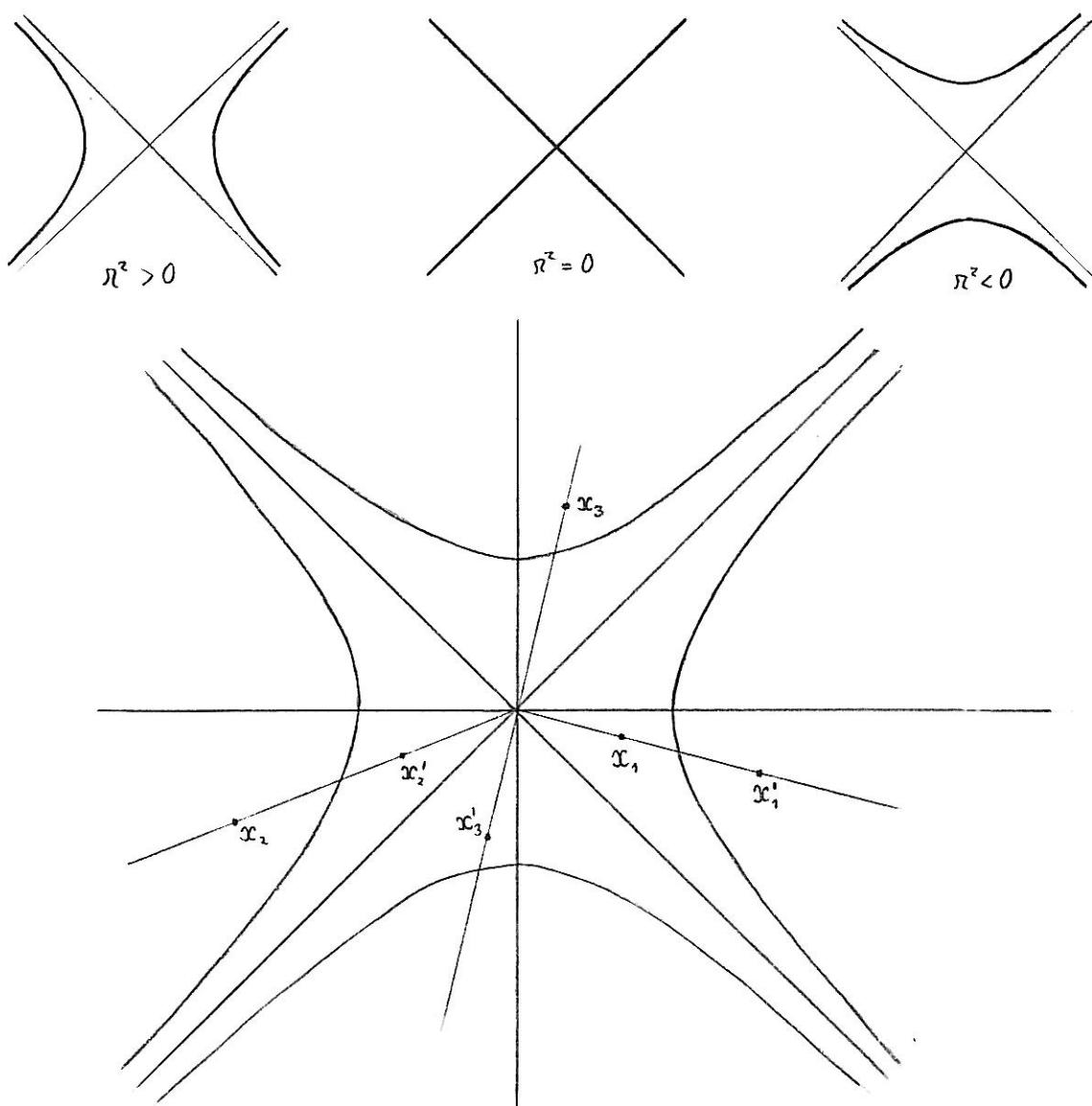
Obdobná tvrzení platí v 3-dimensionálním euklidovském prostoru pro kulovou inverzi. Zde se povrch koule zobrazuje na povrch koule, rovina na povrch koule procházející středem inverze a naopak. V tomto případě platí ale také stejná tvrzení pro kružnice - kružnice se při kulové inverzi převádí na kružnice, kde opět připouštíme degeneraci kružnice na přímku.

Přeformulujeme nyní tyto tvrzení v Minkowského 2-dimensionální rovině a potom ho zobecníme na M -dimensionální prostor s plochou metrikou obecné signatury. V Minkowského rovině se body prostorupodobné vzhledem ke středu inverze převádějí na body prostorupodobné, body časupodobně položené v budoucnosti ke středu inverze na body časupodobně položené v minulosti ke středu inverze a naopak (viz. obr. 5.4). Body na světelném kuželu středu inverze se zobrazují do nekonečna a naopak. Rovnice sféry se středem χ_0 (v inerciálních souřadnicích t, z) je

$$(x-x_0) \cdot (\chi-\chi_0) = -(t-t_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2 , \quad (5.A.6)$$

což je rovnice hyperboly ⁹). Protějškem kružnice v euklidovské rovině tedy je hyperbola (obě větve) s asymptotami tvořícími světelný kužel. Vidíme, že rovnice (5.A.6) je netriviální i pro $R^2 < 0$. Máme tedy (obr. 5.4) časupodobné sféry ($R^2 > 0$), isotropní sféry ($R^2 = 0$ - v tomto případě se hyperbola degeneruje na dvě isotropní přímky procházející středem sféry) a prostorupodobné sféry ($R^2 < 0$). Degenerovanými

⁹) Parametr R budeme nazývat poloměrem, přestože jeho kvadrát může být záporný (t.j. R imaginární).



obr. 5.4

V Minkowského rovině sférická inverze zobrazuje body prostoru-podobně položené vzhledem ke středu inverze σ na body prostorupodobně polžené k σ , body v kuželu budoucnosti σ na body v kuželu minulosti σ a naopak. Body na světelném kuželu σ se zobrazují do nekonečna a naopak. Protějškem kružnice v euklidovské rovině je v Minkowského rovině hyperbola (obě větve) s asymptotami tvořícími světelný kužel. Hyperbola může být časupodobná ($R^2 > 0$), isotropní ($R^2 = 0$ – v tomto případě se hyperbola degeneruje na dvě isotropní přímky) a prostorupodobná ($R^2 < 0$). Přímky jsou degenerovanými případy hyperboly se středem v nekonečnu a nekonečným poloměrem R .

případy dále jsou přímky - hyperboly se středem v nekonečnu a nekonečným poloměrem . V obecném -dimensionálním případě ukážeme, že tyto sféry přechází při sférické inverzi opět na sféry a to stejného typu - prostorupodobné na prostorupodobné, isotropní na isotropní a časupodobné na časupodobné.

Je výhodné si celou situaci znázornit v Penroseově diagramu - v soustavě souřadnic \tilde{U}, \tilde{V}

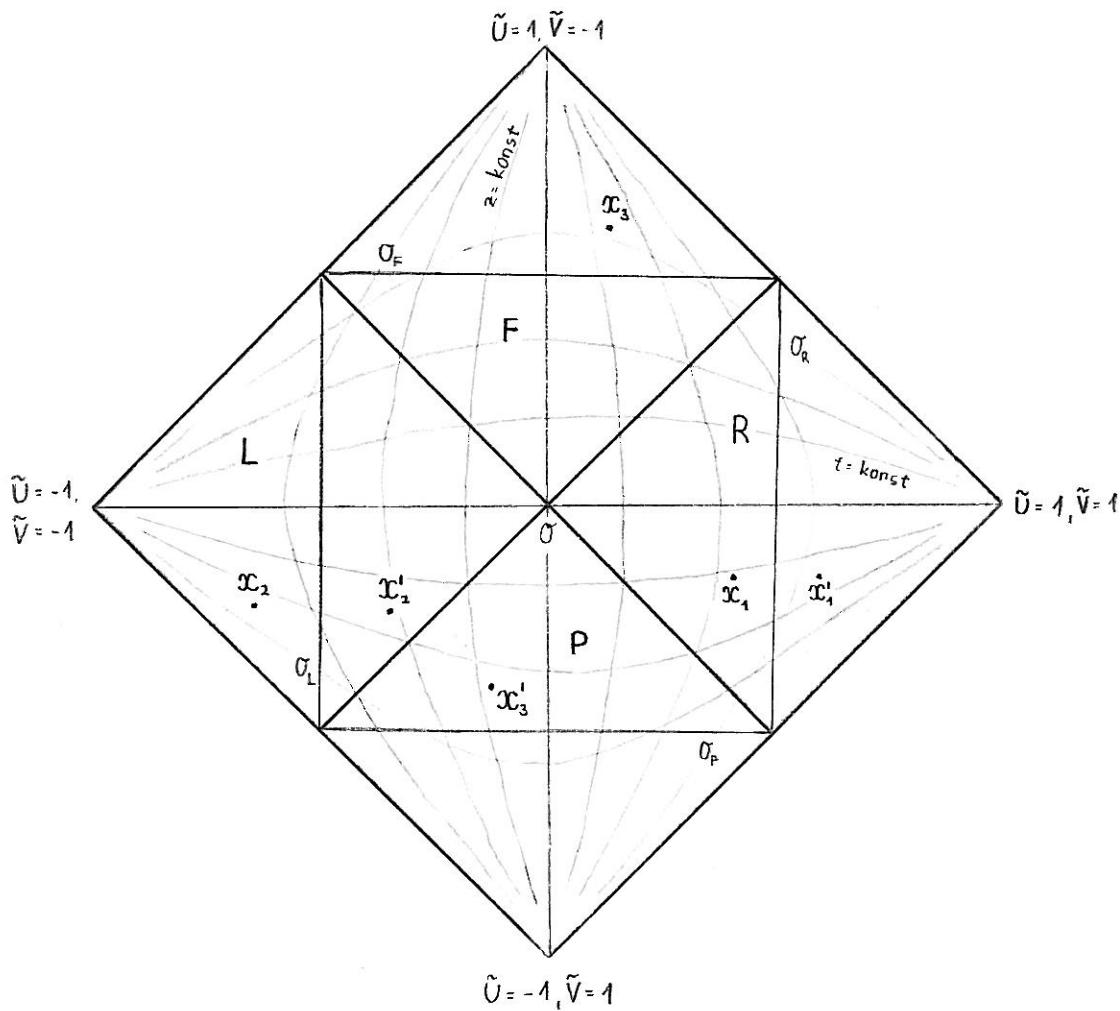
$$\begin{aligned}\tilde{U} &= \frac{\operatorname{sign}(u) \frac{u^z}{e^z}}{1 + \frac{u^z}{e^z}}, & u = t + z \\ \tilde{V} &= \frac{\operatorname{sign}(v) \frac{v^z}{e^z}}{1 + \frac{v^z}{e^z}}, & v = t - z\end{aligned}\quad (5.A.7)$$

Tyto souřadnice nabývají hodnot z intervalu $(-1, 1)$. Isotropní přímky dané rovnicemi $u = \text{konst.}$, resp. $v = \text{konst.}$ mají v nových souřadnicích tvar $\tilde{U} = \text{konst.}$, resp. $\tilde{V} = \text{konst.}$, tj. v obr. 5.5 jsou isotropní světočáry přímky pod úhlem $\frac{\pi}{4}$. Body $\tilde{U}, \tilde{V} = \pm 1$ se standardně identifikují s body prostorového nekonečna, bod $\tilde{U} = 1, \tilde{V} = -1$ s budoucím časovým nekonečnem a bod $\tilde{V} = 1, \tilde{U} = -1$ s minulým časovým nekonečnem. Body $\tilde{U} = 1, \tilde{V} \in (-1, 1)$ a $\tilde{V} = -1, \tilde{U} \in (-1, 1)$ tvoří světelné nekonečno v budoucnosti, body $\tilde{U} = -1, \tilde{V} \in (-1, 1)$ a $\tilde{V} = 1, \tilde{U} \in (-1, 1)$ světelné nekonečno v minulosti. V těchto souřadnicích je sférická inverze velmi jednoduchá

$$\Theta: [\tilde{U}, \tilde{V}] \rightarrow [\operatorname{sign} \tilde{V} - \tilde{V}, \operatorname{sign} \tilde{U} - \tilde{U}], \quad (5.A.8)$$

pro $\tilde{U} \neq 0, \tilde{V} \neq 0$.

Řekli jsme, že body na světelném kuželu středu inverze (dané rovnicí $uv = 0$ resp. $\tilde{U}\tilde{V} = 0$) se zobrazují do nekonečna. Bude zajímavé zkoumat strukturu nekonečna Minkowského roviny z hlediska sférické inverze a tedy i transformací konformní



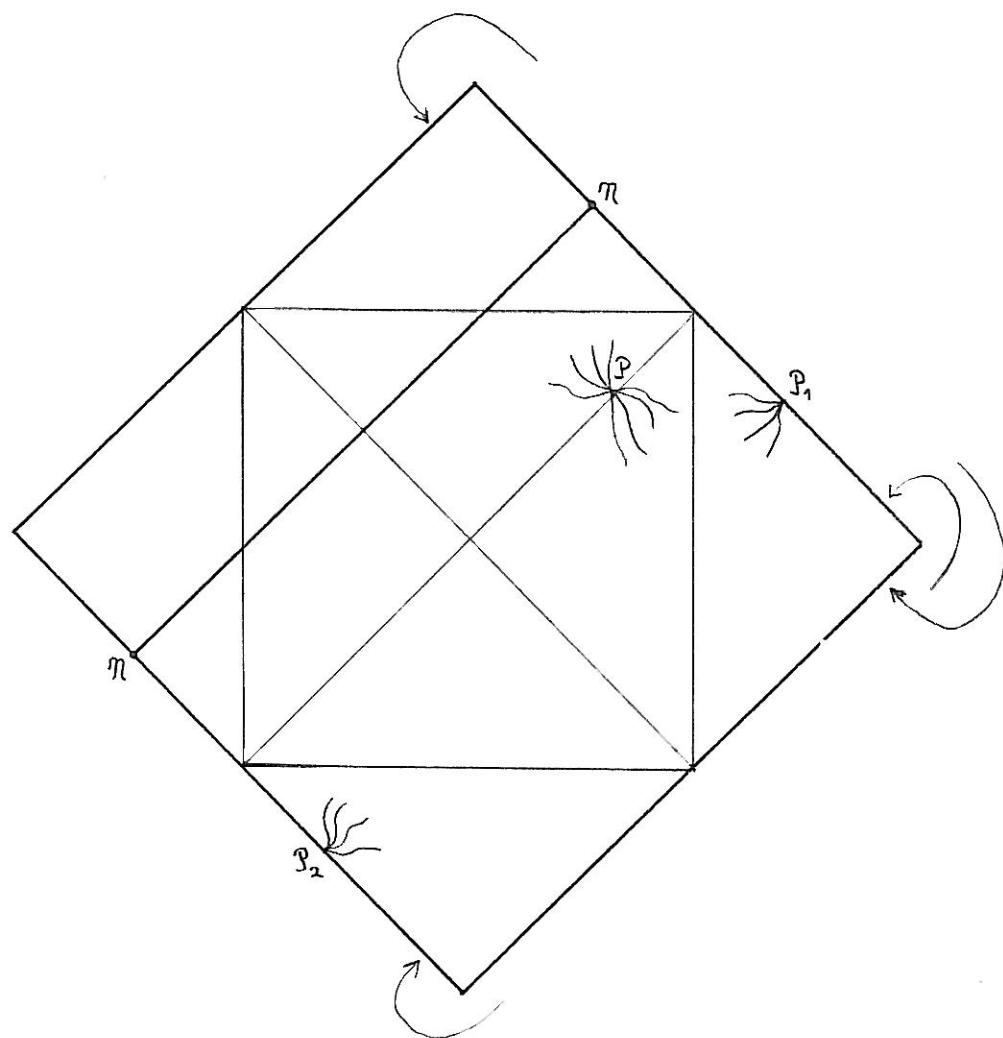
obr. 5.5

Penroseův diagram je znázornění Minkowského roviny v souřadnicích typu (5.A.7). Isotropní světočáry jsou v tomto obrázku přímky pod úhlem $\pi/2$ s vodorovnou osou. V obrázku je vyznačena souřadnicová síť t, z . Okraje diagramu odráží strukturu nekonečna Minkowského roviny. V souřadnicích \tilde{U}, \tilde{V} má sférická inverze jednoduchý geometrický tvar. V oblasti L, resp. R se jedná o zrcadlení podle osy σ_L , resp. σ_R , oblast F se zobrazí na oblast P středovou inverzi a zrcadlením podle osy σ_F , obdobně oblast P se zobrazí na oblast F středovou inverzi a zrcadlením podle osy σ_F . Osy σ_R, σ_L jsou ve skutečnosti hyperbola $-t^2 + z^2 = e^2$ a osy σ_P, σ_F hyperbola $-t^2 + z^2 = -e^2$.

grupy. Mimo světelný kužel $uv=0$ je sférická inverze spojitá – "blízké body se zobrazují na blízké body" a křivky vedoucí do stejného bodu se zobrazují na křivky opět vedoucí do stejného bodu. Bude výhodné doplnit Minkowského rovinu body v nekonečnu tak, aby sférická inverze byla spojitá všude. Tj. doplníme body v nekonečnu tak, aby křivky vedoucí do stejného bodu na světelném kuželu $uv=0$ po transformaci vedly do stejného bodu v nekonečnu a naopak. Vezmeme si třídu křivek vedoucí do bodu o souřadnicích $\tilde{U}=a_0, \tilde{V}=0$ z oblasti $\tilde{U}>0, \tilde{V}>0$ (obr. 5.6). Tato třída křivek přejde na křivky vedoucí do bodu \tilde{P}_1 o souřadnicích $\tilde{U}=1, \tilde{V}=1-a_0$, ležícího v budoucím světelném nekonečnu. Vezmeme-li ale třídu křivek vedoucích do \tilde{P} z oblasti $\tilde{U}>0, \tilde{V}<0$, ty se zobrazují na třídu křivek vedoucích do bodu \tilde{P}_2 o souřadnicích $\tilde{U}=-1, \tilde{V}=1-a$ ležícího v minulém světelném nekonečnu. Z našeho požadavku spojitosti sférické inverze plyne, že musíme body \tilde{P}_1 a \tilde{P}_2 ztotožnit. Provedeme tedy ztotožnění bodů o souřadnicích

$$\begin{aligned} \tilde{U} = -1, \tilde{V} &\longleftrightarrow \tilde{U} = +1, \tilde{V}, \\ \tilde{U}, \tilde{V} = -1 &\longleftrightarrow \tilde{U}, \tilde{V} = 1, \end{aligned} \tag{5.A.9}$$

tj. např. ztotožníme všechny nesvětelná nekonečna (o souřadnicích $\tilde{U}=\pm 1, \tilde{V}=\mp 1$). Takto doplněné (a ztotožněné) body nazveme konformní nekonečno. Vidíme, že má strukturu světelného kuželu (tj. dvou isotropních přímek) se středem v prostorovém (= časovém) nekonečnu. Sférická inverze tento kužel zobrazí na světelný kužel středu inverze a naopak. Naše konstrukce nekonečna tedy odpovídá přidání jednoho bodu v nekonečnu každé isotropní přímce (směru) v Minkowského rovině a jednomu bodu v prostorovém (a zároveň časovém nekonečnu) – odpovídající isotropní přímce v nekonečnu. Toto lze chápout také tak, že každému bodu našeho kompaktifikovaného prostoročasu (po



obr. 5.6

Křivky vedoucí do bodu \tilde{P} na světelném kuželu středu inverze z oblasti $\tilde{U} > 0$ se zobrazují na křivky vedoucí do bodu P_1 , křivky vedoucí do bodu \tilde{P} z oblasti $\tilde{U} < 0$ se zobrazují na křivky vedoucí do bodu P_2 . Proto body P_1 a P_2 ztotožňujeme. Nekonečno tak dostává strukturu světelného kuželu se středem v bodě reprezentujícím nesvětelné nekonečno. Při sférické inverzi tento kužel přejde na světelný kužel středu inverze a naopak. Světelný kužel bodu \tilde{P} ležícího ve světelném nekonečnu se v konečných oblastech Minkowského roviny redukuje na isotropní přímku.

přidání bodů v nekonečnu je výsledný prostor kompaktní) přísluší světelný kužel a naopak světelnému kuželu přísluší bod. Přitom jedna isotropní přímka v Minkowského rovině je část světelného kuželu se středem v nekonečnu – další jeho část (druhá isotropní přímka) leží celá v nekonečnu (obr. 5.6).

Po získání intuice v 2-dimensionální Minkowského geometrii přejděme k obecné dimensi a obecné signatuře metriky. Základní tvrzení je, že sféra ($m-1$ -dimensionální) přejde při sférické inverzi opět na sféru, přičemž za sféru považujeme i nadroviny – lze ji chápat jako degenerované sféry se středem v nekonečnu a nekonečným poloměrem R . Předpokládejme tedy, že bod \vec{x} leží na sféře o středu \vec{x}_0 a poloměru R , tj.

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = R^2 \quad , \quad (5.A.10)$$

Úpravami postupně dostaváme

$$\begin{aligned} (\vec{x}^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}_0 + \vec{x}_0^2) &= R^2 \quad , \\ \frac{1}{\vec{x}_0^2 - R^2} - 2\frac{\vec{x}}{\vec{x}^2} \cdot \frac{\vec{x}_0}{\vec{x}_0^2 - R^2} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}}{(\vec{x}^2)^2} &= 0 \quad , \\ \left(\frac{e^2 \vec{x}}{\vec{x}^2} - \frac{e^2 \vec{x}_0}{\vec{x}_0^2 - R^2} \right) \cdot \left(\frac{e^2 \vec{x}}{\vec{x}^2} - \frac{e^2 \vec{x}_0}{\vec{x}_0^2 - R^2} \right) &= \frac{e^4 R^2}{(\vec{x}_0^2 - R^2)^2} \quad . \end{aligned} \quad (5.A.11)$$

To znamená, že x leží na sféře o poloměru $\frac{e^2 R}{(\vec{x}_0^2 - R^2)}$ a středu $\vec{O} + \frac{e^2 \vec{x}_0}{\vec{x}_0^2 - R^2}$, což jsme přesně chtěli dokázat. Navíc díky $\frac{e^4}{(\vec{x}_0^2 - R^2)^2} \geq 0$ vidíme, že sféra si při sférické inverzi zachovává charakter – znaménko u "kvadrátu poloměru". Pro Lorentzovskou signaturu $(-++\dots+)$ to znamená, že sféra si při inverzi zachovává svoji prostorupodobnost resp. časupodobnost či isotropnost. Dále nekonečný poloměr a střed v nekonečnu dostaneme pouze pro $\vec{x}_0^2 = R^2$, tj. pro sféru procházející středem inverze. Neboli sféra procházející středem inverze se zobrazí na nad-

vinu a naopak nadrovina se zobrazí na sféru procházející středem inverze.

Stejnými úvahami jako pro 2-dimensionální Minkowského rovinu nalezneme, že kompaktifikace prostoru tak, aby sférická inverze byla spojité zobrazení, znamená přidání bodů v nekonečnu a to každé isotropní nadrovině jeden (tyto body nazveme světelné nekonečno) a jeden bod v časovém a zároveň prostorovém¹⁰⁾ nekonečnu (nazveme ho nesvětelné nekonečno). Takto dodané body v nekonečnu mají strukturu světelného kuželes s vrcholem v nesvětelném nekonečnu. Opět můžeme v tomto kompaktifikovaném prostoru každému bodu přiřadit světelný kužel. Světelný kužel bodů ve světelném nekonečnu se v konečné oblasti redukuje na jím příslušící isotropní nadrovinu.

Dále budeme zkoumat transformační vlastnosti 1-dimensionálních křivek (nazveme je obecné kružnice) odpovídající v 3-dimensionálním euklidovském prostoru kružnicím resp. přímkám. Přesně obecnou kružnicí nazveme 1-dimensiální průsečík $(m-1)$ $(m-1)$ -dimensionálních sfér. Lehce vidíme, že v 3-dimensionálním euklidovském prostoru dostaneme průsečík dvou koulí (resp. jejich degenerovaného případu - rovin), tj. kružnice a přímky. Z definice a pomocí transformačních vlastností $(m-1)$ -dimensionálních sfér plyne poměrně silné tvrzení - obecné kružnice se při sférické inverzi zobrazují opět na obecné kružnice. Navíc díky zachovávání charakteru sfér při inverzi dostáváme zachovávání charakteru obecných kružnic - prostorupodobné přechází na prostorupodobné atd..

¹⁰⁾ V ploché metrice obecné signatury jsou časové směry směry s negativně definitní metrikou, prostorové směry směry s pozitivně definitní metrikou a isotropní směry směry s degenerovanou metrikou.

Jak ale takovéto obecné kružnice vypadají? Začneme tím, že průsečík dvou $(m-1)$ -dimensionálních sfér leží v $(m-1)$ -dimensionální nadrovině. Rovnice obou sfér jsou

$$\begin{aligned} (\vec{x} - \vec{x}_1) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_1) &= r_1^2 \quad , \\ (\vec{x} - \vec{x}_2) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_2) &= r_2^2 \quad . \end{aligned} \tag{5.A.12}$$

Odečteme-li tyto dvě rovnice od sebe, dostaneme

$$-2\vec{x} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) + \vec{x}_1^2 - \vec{x}_2^2 - r_1^2 + r_2^2 = 0 \quad , \tag{5.A.13}$$

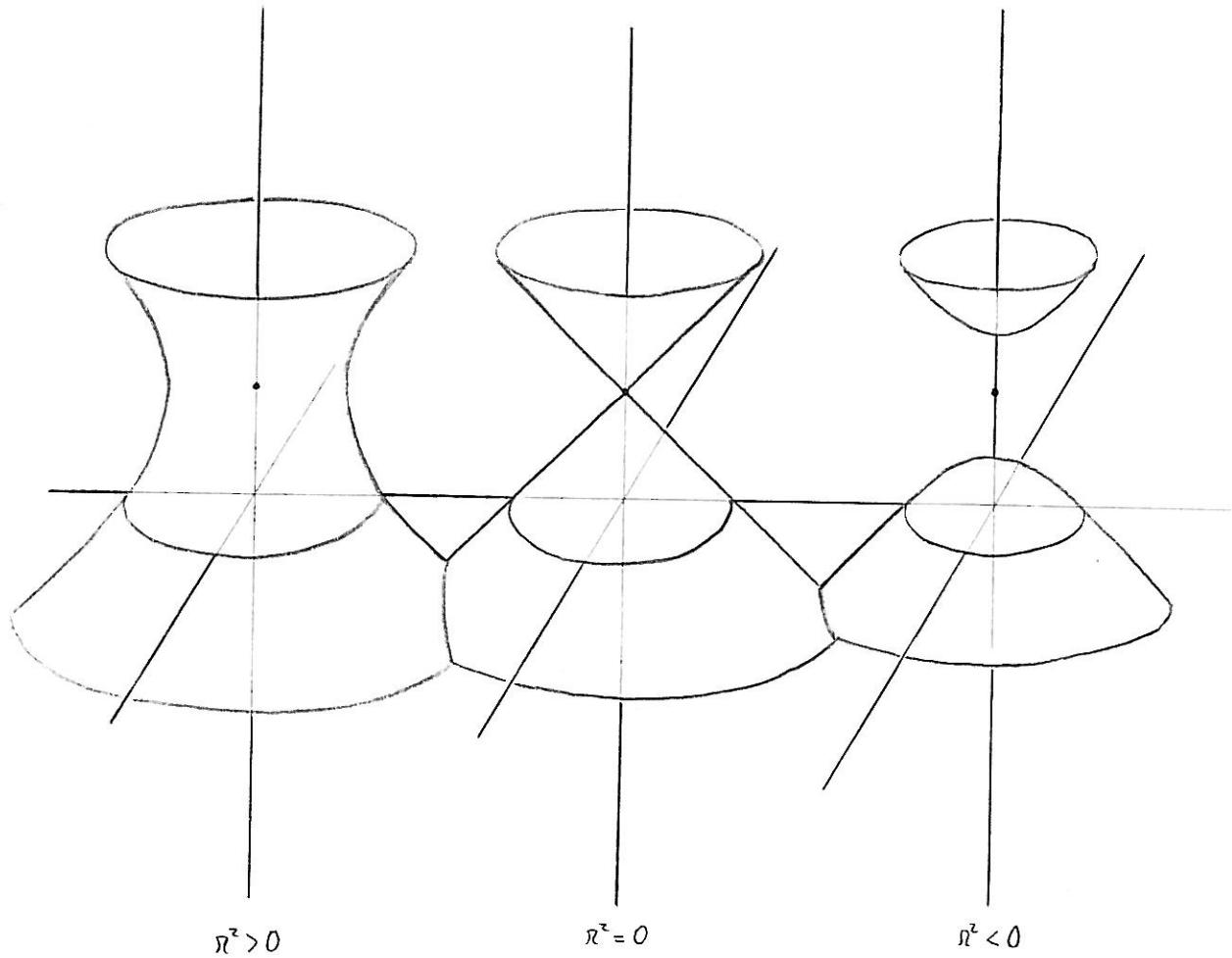
což je lineární rovnice v \vec{x} , tj. rovnice nadroviny. Stejným způsobem můžeme ukázat, že průsečík $(m-1)$ sfér musí ležet v $(m-2)$ nezávislých $(m-1)$ -dimensionálních nadrovinách, tj. v 2-dimensionální rovině. Obecná kružnice je tedy průsečík 2-dimensionální roviny a $(m-1)$ -dimensionální sféry – tj. kvadratické plochy s rovinou. Je známý fakt, že všechny takovéto křivky jsou kuželosečky – kružnice, hyperboly, přímky a paraboly. Typ kuželosečky ale závisí na její poloze. Tuto závislost lze zkoumat následovně. Obecnou kružnicí ležící v rovině a středem inverze můžeme proložit 3-dimensionální prostor. Tento prostor se při sférické inverzi převádí na sebe (obsahuje střed inverze). Proto se při zkoumání dané obecné kružnice stačí omezit na tento 3-dimensionální prostor. Indukovaná metrika tohoto prostoru může být typu $(---)$, $(--+)$, $(-++)$, $(+++)$ nebo může být degenerovaná. V obecném případě bychom dále diskutovali, jaká kvadratická plocha je průsečík $(m-1)$ -dimensionální sféry s tímto prostorem (pro nedegenerované případy to je 2-dimensionální sféra v příslušné signatuře) a jaký typ kuželosečky dostaneme průsečíkem této kvadratické plochy s rovinou v závislosti na jejich poloze. Např. pokud signatura 3-dimensionálního prostoru je $(+++)$, průsečíky

$(n-1)$ -dimensionální sféry s tímto prostorem jsou povrchy kouli (nebo roviny) a obecné kružnice jsou kružnice nebo přímky.

Pro nás je zajímavý M -dimensionální prostoročas (signatura $(-++\dots+)$) a hlavně transformační vlastnosti časupodobných obecných kružnic. 3-dimensionální prostor obsahující takovouto obecnou kružnicí a střed inverze má signaturu $(-++)$. Proto výše nastíněnou diskusi provedeme v tomto případě. Průsečík $(n-1)$ -dimensionální sféry s 3-dimensionálním Minkowského prostorem je 2-dimensionální Minkowského sféra, tj. obecný rotační hyperboloid s osou v časovém směru a asymptotickým světelným kuželem (obr. 5.7), resp. degenerovaný případ - rovina. Průsečík časupodobného hyperboloidu (resp. roviny) s časupodobnou rovinou (zkoumáme pouze časupodobné obecné kružnice) je obecně položená časupodobná hyperbola (resp. přímka).

Dostali jsme tedy následující výsledek. V Minkowského prostoru sférická inverze transformuje prostoročasové obecně položené časupodobné hyperboly na obecně položené časupodobné hyperboly, časupodobné přímky na časupodobné hyperboly procházející počátkem a naopak.

Je zřejmé, že stejnou vlastnost bude mít i transformace \mathbb{H}_2 - kombinace dvou sférických inverzí a translace.



obr. 5.7

V 3-dimensionálním prostoročase (signatura $(-++)$) jsou sféry rotační hyperboloidy a to prostorupodobné ($R^2 < 0$), isotropní ($R^2 = 0$ - v tomto případě se hyperboloid redukuje na kužel) a časupodobné ($R^2 > 0$). Roviny jsou degenerované případy hyperboloidů se středem v nekonečnu a nekonečným poloměrem. Obecné kružnice v 3-dimensionálním prostoročase může být časupodobná hyperbola, časupodobná přímka, dvě protínající se isotropní přímky, jedna isotropní přímka, prostorupodobná hyperbola, prostorupodobná kružnice a prostorupodobná přímka.

Literatura

- [1] Ashtekar A., Horowitz G.T., Magnon-Ashtekar A.: Gen.Rel.Grav. **14**, 411 (1982)
- [2] Barrabès C.: Class.Quantum Grav. **6**, 581 (1989)
- [3] Barrabès C., Israel W.: Thin shells in general relativity and cosmology: The lightlike limit, preprint (1990)
- [4] Bičák J., Schmidt B.: Class.Quantum Grav. **6**, 1547 (1989)
- [5] Bičák J., Schmidt B.: Asymptotically flat radiative space-times with boost-rotation symmetry, I. The general structure, preprint MPA 429 (1989)
- [6] Bičák J., Hoenselaers C., Schmidt B.G.: Proc.R.Soc.Lond **A390**, 397 (1983); Proc.R.Soc.Lond **A390**, 411 (1983)
- [7] Birrell N.D., Davies P.C.W.: Quantum Fields in Curved Space, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1982
- [8] Bondi H.: Proc.R.Soc.Lond **A376**, 493 (1981)
- [9] Bonnor W.B.: Gen.Rel.Grav. **15**, 535 (1983)
- [10] Bonnor W.B., Swaminarayan N.S.: Zeitschrift für Physik **177**, 240 (1964)
- [11] Boulware D.G.: Annals of Physics **124**, 169 (1980)
- [12] Dray T., Walker M.: Lett.Math.Phys. **4**, 15 (1980)
- [13] Friedrich H.: Comm.Math.Phys. **107**, 587 (1986); Comm.Math.Phys. **119**, 51 (1988)
- [14] Frolov V.P., Israel W., Unruh W.G.: Phys.Rev. **D39**, 1084 (1989)
- [15] Gradštejn I.S., Ryžik I.M., Tablice integralov, Nauka, Moskva 1971
- [16] Hawking S., Ellis G.: The large scale structure of the spacetime, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1973
- [17] Kinnersley W., Walker M.: Phys.Rev. **D2**, 1359 (1970)
- [18] Parker P.E.: J.Math.Phys. **20**, 1423 (1979)

- [19] Penrose R., Rindler W.: *Spinors and Space-time*, v.1, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1984
- [20] Rendall A.D.: *Class.Quantum Grav.* **5**, 1339 (1988)
- [21] Scott S.M., Szekeres P.: *Gen.Rel.Grav.* **18**, 571 (1986)
- [22] Schmidt B.G.: *Gen.Rel.Grav.* **20**, 65 (1988)
- [23] Schwartz L.: *Matematické metody ve fyzice*, SNTL, Praha 1972
- [24] Stephens C.R., *Annals of Physics* **193**, 255 (1989)
- [25] Trautman A.: *Acta Phys.Austr.*, Suppl.**XXIII**, 401 (1981);
Acta Phys.Austr., Suppl.**XXIII**, 433 (1981)
- [26] Unruh W.G., Wald R.M.: *Phys.Rev.* **D29**, 1047 (1984)
- [27] Vilenkin A.: *Phys.Rep.* **121**, 263 (1985)
- [28] Vilenkin A.: *Gravitational interactions of cosmic strings*, in *Years of Gravitation*, ed. Hawking S., Israel W., Cambridge Univ. Press, Cambridge 1987