

Urychlené černé díry a struktura záření v prostoročasech s nenulovou kosmologickou konstantou

Pavel Krtouš

Ústav teoretické fyziky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze

HABILITAČNÍ PRÁCE

OBOR: FYZIKA SMĚR: TEORETICKÁ FYZIKA

Praha, 2005

Obsah

I	Přehledová část	5
	Úvod	7
1	Urychlené černé díry	9
1.1	Kauzální struktura prostoročasu	11
1.2	Urychlené částice v maximálně symetrických prostoročasech	18
1.3	Černé díry	25
1.4	C -metrika: urychlené černé díry	30
2	Asymptotické směrová struktura polí	45
2.1	Záření v obecné teorii relativity	47
2.2	Použitý formalismus	48
2.3	Asymptotická směrová charakteristika záření	51
3	Zobecnění do vyšších dimenzí	57
3.1	Asymptotická směrová charakteristika záření	59
3.2	Ultrarelativistický boost černého prstence	59
	Seznam publikací autora	61
	Ostatní literatura	63
	Obsah přiloženého CD	69
II	Soubor publikací zahrnutých do habilitační práce	73
[1]	J. Bičák, P. Krtouš: <i>Accelerated sources in de Sitter spacetime and the insufficiency of retarded fields</i> , Phys. Rev. D, 64 , 124020 (2001)	75
[2]	J. Bičák, P. Krtouš: <i>The fields of uniformly accelerated charges in de Sitter spacetime</i> , Phys. Rev. Lett. 88 , 211101 (2002)	91
[3]	P. Krtouš, J. Podolský: <i>Radiation from accelerated black holes in a de Sitter universe</i> , Phys. Rev. D 68 , 024005 (2003)	95
[4]	P. Krtouš, J. Podolský, J. Bičák: <i>Gravitational and electromagnetic fields near a de Sitter-like infinity</i> , Phys. Rev. Lett. 91 , 061101 (2003)	125
[5]	J. Podolský, M. Ortaggio, P. Krtouš: <i>Radiation from accelerated black holes in an anti-de Sitter universe</i> , Phys. Rev. D 68 , 124004 (2004)	129

- [6] P. Krtouš, J. Podolský: *Gravitational and electromagnetic fields near an anti-de Sitter-like infinity*, Phys. Rev. D **69**, 084023 (2004) 147
- [7] P. Krtouš, J. Podolský: *Asymptotic directional structure of radiative fields in spacetimes with a cosmological constant*, Class. Quantum Grav. **21**, R233 (2004) 153
- [8] P. Krtouš, J. Podolský: *Asymptotic directional structure of radiation for fields of algebraic type D*, Czech. J. Phys. **55**, 119 (2005) 195
- [9] M. Ortaggio, P. Krtouš, J. Podolský: *Ultrarelativistic boost of the black ring*, Phys. Rev. D **71**, 124031 (2005) 215
- [10] J. Bičák, P. Krtouš: *Fields of accelerated sources: Born in de Sitter*, J. Math. Phys. **46**, 102504 (2005) 227
- [11] M. Ortaggio, J. Podolský, P. Krtouš: *Ultrarelativistic boost of spinning black rings*, J. High Energy Phys. JHEP12(2005)001 (2005) 265
- [12] P. Krtouš: *Accelerated black holes in an anti-de Sitter universe*, Phys. Rev. D **72**, 124019 (2005) 281
- [13] P. Krtouš, J. Podolský: *Asymptotic structure of radiation in higher dimensions*, předběžně přijato k publikaci v Class. Quantum Grav. (2005) 297

Část I

Přehledová část

Úvod

V této habilitační práci předkládám své výsledky publikované během posledních let v recenzovaných mezinárodních časopisech. Práce se skládá z přehledové části a souboru publikací. Přehledová část shrnuje hlavní výsledky přiložených prací a navozuje kontext, do kterého jsou tyto práce zasazeny.

Habilitační práce se zabývá zejména tematikou urychlených černých děr a asymptotickými vlastnostmi polí v případě nenulové kosmologické konstanty. Tomu odpovídá i členění přehledové části. Ta se skládá ze tří kapitol.

První kapitola uvádí čtenáře do problematiky černých děr – objektů jejichž podstata spočívá v degeneraci kauzálních vlastností prostoročasu. Tato kapitola má více pedagogický charakter, jsou zde krátce vyloženy i některé standardní pojmy a metody užívané při zkoumání globálních a kauzálních vlastností prostoročasu. Vedle toho zde jsou shrnuty původní výsledky týkající se urychlených černých děr v asymptoticky de sitterovských a anti-de sitteriovských prostoročasech.

Tuto kapitolu doplňuje též ‘digitální příloha’ – prezentace na přiloženém CD obsahující obrázky, interaktivní třídímní diagramy a animace ilustrující strukturu prostoročasu vně černých děr různých typů.

Druhá kapitola se zabývá strukturou zářivých polí v asymptotických oblastech různého typu (v závislosti na hodnotě kosmologické konstanty). Je zde krátce shrnuta problematika záření v obecné teorii relativity a jako hlavní původní výsledek je zde diskutována směrová charakteristika zářivé komponenty gravitačního pole.

Třetí kapitola se krátce zabývá pracemi souvisejícími s formulací teorie gravitace v prostoročasech vyšší dimenze. Jedná se o zobecnění výsledků diskutovaných v druhé kapitole a dále o výsledky týkající se ultrarelativisticky se pohybujících černých prstenců – vícedimenzionálních alternativ k černým díram.

Přehledová část má poměrně obecný charakter. Jejím cílem je nastínit význam přiložených odborných prací a přiblížit jejich hlavní výsledky. Vedle toho jsem se snažil též shrnout širší souvislosti formou přístupnou i pro čtenáře, který nepracuje aktivně v obecné teorii relativity. Zejména první kapitola obsahuje i přehledový materiál, druhá a třetí kapitola se již více zaměřují na původní odborné výsledky. Pro podrobný technický výklad čtenáře odkazuji na samotné přiložené články, zvláště pak na zastřešující rozsáhlé práce [3, 7, 10, 12].

Na přiloženém CD lze nalézt vedle zmíněné digitální přílohy a souboru většiny mých odborných publikací též několik studijních textů a dva popularizační projekty přibližující některé aspekty speciální teorie relativity. Obsah přiloženého CD lze nalézt v závěru přehledové části.

* * *

Většina předkládaných výsledků byla dosažena ve spolupráci s kolegy z Ústavu teoretické fyziky MFF UK. V první řadě bych chtěl jmenovat svého učitele prof. Jiřího Bičáka, který zásadním způsobem formoval mojí odbornou orientaci. Již během mého studia na MFF UK mě uvedl do světa zachyceného Einsteinovu teorií relativity a upoutal mojí pozornost na problematiku boost-rotačně symetrických prostoročasů, která stojí v centru či alespoň pozadí většiny zde uváděných prací. Za jeho inspirující a nedocenitelný vliv a možnost plodné spolupráce mu patří můj upřímný dík. Poděkovat bych chtěl i svému kolegovi a příteli doc. Jiřímu Podolskému za potěšení z mnoha diskuzí a společně dosažených výsledků. Naše vzájemná spolupráce těží z podobné ‘naladěnosti’ na vnímání problémů v obecné teorii relativity a věřím, že i nadále povede k dalším zajímavým výsledkům. Rád bych též zmínil dr. Marcella Ortaggia a poděkoval mu zejména za to, že obrátil mojí pozornost i na problematiku teorií ve více dimenzích. Nakonec musím vydvihnout prostředí Ústavu teoretické fyziky a kolektivu kolem Relativistického semináře UTF, které mi poskytovalo velmi vstřícné a stimulující zázemí jak po odborné a technické, tak i po lidské stránce.

Výsledky předkládané v této práci vznikly za podpory grantů GAČR “Relativistická fyzika a astrofyzika” (roky 1997–98, 1999–2001 a 2002–2004), grantů GAUK “Relativistické teorie gravitace, astrofyzika a kosmologie” (roky 1997–1998, 2000–2002 a 2003), výzkumného záměru “Výzkum Země a vesmíru metodami teoretické, experimentální a počítačové fyziky” a rozvojového projektu MŠMT č. 360/2005.

V neposlední řadě bych chtěl poděkovat svým nejbližším – Simoně a Míšovi – za to, že se mnou a mým zájmem o fyziku měli a mají dostatek trpělivosti.

Kapitola 1

Urychlené černé díry

Shrnutí

Je známo pouze málo přesných řešení Einsteinových rovnic popisujících netriviálně se pohybující zdroje. Jednou třídou takových řešení jsou rovnoměrně urychlené černé díry popsané tzv. C -metrikou. Tato metrika je známá v podstatě od počátků obecné teorie relativity [21, 22], geometrická struktura samotného prostoročasu byla však pochopena mnohem později. Pro nulovou kosmologickou konstantu Λ byla C -metrika interpretována jako prostoročas urychlených černých děr až v 70-tých a 80-tých letech minulého století [23–25].

Zobecnění C -metriky pro nenulovou kosmologickou konstantu [26–28] bylo plně vysvětleno ještě později. K podrobné geometrické analýze prostoročasů popsaných touto metrikou přispěla i série prací [3, 5, 12] zařazených do této habilitace. Prostoročasy s $\Lambda \neq 0$ se od případu nulového Λ zásadně odlišují v asymptotické oblasti. Tato oblast byla v přiložených pracích vizualizována pomocí kompakťifikovaných třídímenzionálních diagramů zachycujících zejména kauzální strukturu. Byly též zavedeny různé souřadnicové systémy vhodné pro diskuzi vlastností prostoročasů a umožňující provedení různých fyzikálně zajímavých limit.

Jednou ze zajímavých limit je případ slabých polí, tj. případ zanedbatelných hmotnosti černých děr. V tomto případě C -metrika popisuje vakuové maximálně symetrické prostoročasy, jejichž geometrické struktura je plně dána kosmologickou konstantou. Jako pozůstatek černých děr však tyto prostoročasy obsahují rovnoměrně urychlené (elektromagneticky nabitě) testovací částice. V přiložených pracích [1, 10] byly podrobně analyzovány vlastnosti rovnoměrně urychlených částic v de Sitterově vesmíru (případ $\Lambda > 0$) a odvozeno a diskutováno jejich elektromagnetické a skalární pole. Rozsáhlá práce [10] navíc obsahuje vyčerpávající přehled souřadnic užívaných v de Sitterově prostoročase, včetně souřadnic přizpůsobených urychleným pozorovatelům.

Tato kapitola krátce představí pojem černých děr, nastíní techniky užívané ke globální analýze prostoročasů a popíše strukturu prostoročasů s pohybujícími se černými dírami. Některé rysy těchto prostoročasů jsou dokumentovány a vizualizovány též pomocí obrázků, interaktivních třídímenzionálních diagramů a animací obsažených na přiloženém CD. Podkapitoly 1.1 a 1.3 jsou přehledové, uvádějí kontext, do kterého zkoumaná problematika zapadá. Podkapitoly 1.2 a 1.4 se dotýkají konkrétněji přiložených původních prací.

Publikace

Původní výsledky týkající se tématu této kapitoly jsou obsaženy v následujících pracích:

- [3] Pavel Krtouš, Jiří Podolský: *Radiation from accelerated black holes in a de Sitter universe*, Phys. Rev. D **68**, 024005 (2003).
- [5] Jiří Podolský, Marcello Ortaggio, Pavel Krtouš: *Radiation from accelerated black holes in an anti-de Sitter universe*, Phys. Rev. D **68**, 124004 (2004).
- [12] Pavel Krtouš: *Accelerated black holes in an anti-de Sitter universe*, Phys. Rev. D **72**, 124019 (2005).
- [10] Jiří Bičák, Pavel Krtouš: *Fields of accelerated sources: Born in de Sitter*, J. Math. Phys. **46**, 102504 (2005).
- [2] Jiří Bičák, Pavel Krtouš: *The fields of uniformly accelerated charges in de Sitter spacetime*, Phys. Rev. Lett. **88**, 211101 (2002).
- [1] Jiří Bičák, Pavel Krtouš: *Accelerated sources in de Sitter spacetime and the insufficiency of retarded fields*, Phys. Rev. D, **64**, 124020 (2001).

Plné znění těchto publikací lze nalézt v druhé části habilitační práce.

1.1 Kauzální struktura prostoročasu

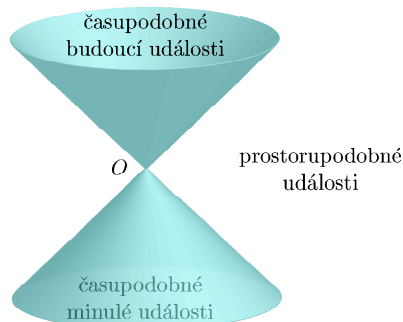
Uvedení do problematiky

Základní myšlenkou obecné teorie relativity je popisovat gravitační působení pomocí geometrických vlastností prostoročasu. To co vnímáme jako gravitační sílu má tak svůj původ (i) v naší volbě lokálně neinerciální soustavy a (ii) v zakřivení prostoročasu samotného. Podle obecné teorie relativity by např. v blízkosti Země byla přirozená lokálně inerciální soustava spojená s volně padajícími pozorovateli. Při volbě soustavy spojené s povrchem Země proto musíme zavést nepravou sílu zohledňující neinercialitu této soustavy. Tu běžně interpretujeme jako sílu gravitační. Takto zavedenou sílu lze eliminovat přechodem do lokálně inerciální soustavy. Tento přechod však nelze provést globálně – pokud je prostoročas zakřivený, globální inerciální soustava neexistuje. Vlastní zakřivení prostoročasu se projevuje tzv. slapovým působením – díky němu se i ve volně padající soustavě v blízkosti Země začnou blízká volná tělíska, na počátku připravená v klidu, vůči sobě pohybovat.

Spolu s těmito základními rysy přinesla obecná teorie relativity mnoho zajímavých a překvapivých předpovědí. Mimo jiné otevřela možnost netriviální kauzální struktury celého prostoročasu. Pod kauzální strukturou se rozumí znalost, které události v prostoročase mohou být (alespoň v principu) kauzálně spojené. Fakt, že tato struktura může být gravitačním polem pozměněna, odráží univerzalitu působením gravitačního pole na všechny procesy. Gravitační pole nelze odstínit a způsobuje stejný pohyb nezávisle na struktuře objektu, na který působí. Díky tomu můžeme zachytit působení gravitačního pole přímo v popisu prostoročasových vztahů. Gravitace tak determinuje jeviště, ve kterém se odehrává zbytek fyziky.

Kauzální struktura prázdného nepokřiveného prostoročasu je známá již ze speciální teorie relativity. Dvě události mohou být vůči sobě položeny buď *časupodobně* (jedna následuje druhou, tj. lze poslat fyzikální signál z jedné do druhé) nebo *prostorupodobně* (nelze kanonicky určit, která z událostí nastala dříve; události jsou příliš daleko, aby je mohl spojit podsvětelně se pohybující signál). Na rozdíl od předrelativistické představy, prostorupodobné události nejsou události současné: všechny události prostorupodobně položené vzhledem k jedné zvolené události tvoří oblast *stejně dimenze* jako prostoročas samotný. Hranici mezi událostmi časupodobně a prostorupodobně vztahenými ke zvolené události O nazýváme *světelný kužel* s vrcholem v O , viz obr. 1.1. Jak název napovídá, světelný kužel je tvořen drahami světelných paprsků vyslaných či přijatých v O .

Minkowského prostoročas speciální teorie relativity je homogenní a isotropní, jeho kauzální struktura (struktura světelných kuželů) je tak všude stejná. Obecná teorie relativity přebírá tuto strukturu lokálně – v malé oblasti zakřiveného prostoročasu se lokální fyzika odehrává podle stejných zákonů jako ve speciální teorii relativity. Na větších vzdálenostech se však vzájemná poloha světelných kuželů v zakřiveném prostoročase mění a deformuje. A na globální škále se kauzální struktura může změnit i zcela zásadním způsobem. Obecná teorie relativity tak např. připouští, že prostoročas může mít jinou kauzální asymptotiku – tzn. jinou kauzální dosažitelnost velmi vzdálených událostí. Nebo naopak připouští existenci



Obrázek 1.1: **Světelný kužel události O .** Světelný kužel rozděluje prostoročas na události, které jsou vzhledem k O položeny časupodobně a prostorupodobně. Časupodobné události se dále dělí na události budoucí k O (ty, ke kterým lze z O zaslat fyzikální signál) a události minulé k O (ze kterých lze do O poslat signál). Světelný kužel je generován světelnými (též nulovými) paprsky procházejícími událostí O .

oblastí, ze kterých se již nelze dostat do okolního prostoročasu. Lze v ní popsat prostoročasy s odlišnou topologií, případně i s patologickou kauzální strukturou připouštějící např. návraty do minulosti.

Kauzální struktura – zakódována v prostoročasové geometrii – determinuje tedy přípustné kauzální vztahy. Všechny známé fyzikální zákony respektují kauzální strukturu a proto jsou omezení daná touto strukturou fundamentální. Pokud zjistíme, že je nějaký proces omezen z kauzálních důvodů, neznamená to jen jakési technologické omezení, které může být v průběhu dalšího vývoje překonáno. Jedná se o omezení tak principiální, že je zabudováno (skrže prostoročasovou geometrii) přímo do jádra našeho popisu, a jeho porušení by s sebou nutně neslo velmi závažnou a rozsáhlou změnu celého tohoto popisu.

Níže se zaměříme zejména na dva netriviální projevy kauzální struktury: na *asymptotickou strukturu* prostoročasů a na objekty zvané *černé díry*. Nejdříve se však musíme seznámit s některými technikami používanými při zkoumání kauzální struktury.

Konformní geometrie a konformní nekonečno¹

Při zkoumání asymptotických vlastností fyzikálních polí je důležité mít pod kontrolou velmi vzdálené části prostoročasu. Pro tento účel se zavádí pojem *konformního nekonečna*, označovaného \mathcal{I} , umožňující rigorózně a detailně popsat strukturu vzdálených oblastí. Podrobné zavedení je možné nalézt ve standardní literatuře [29, 30], ucelený přehled je též podán v [7] či v češtině v [31].

Technika konformního nekonečna umožňuje přidat ke zkoumanému prostoročasu ‘body v nekonečnu’ způsobem zachycujícím správně kauzální strukturu vzdálených oblastí. Zhruba řečeno, různé body v konformním nekonečnu mají k prostoročasu různý kauzální vztah. Můžeme si je představit jako limitní body *světelných* světočar, přičemž řekneme, že dvě světočary vedou směrem do budoucnosti do stejného bodu nekonečna, pokud mají stejnou minulost (tedy souhrn

¹Část tohoto oddílu je s úpravami převzata z úvodní partie práce [20].

všech událostí, ze kterých lze poslat k světočáře fyzikální signál). Dvě světelné světočáry tak končí v různých bodech konformního nekonečna, pokud jsou z těchto (do nekonečna protažených) světočar pozorovatelné různé oblasti prostoročasu.

Body dosažitelné nulovými světočarami směrem do budoucna tvoří *budoucí nekonečno* \mathcal{I}^+ , obdobně definované body dosažitelné směrem do minula tvoří tzv. *minulé nekonečno* \mathcal{I}^- . Přitom jeden a týž bod v nekonečnu může nebo nemusí být dosažitelný jak z minula, tak z budoucna – to závisí na konkrétní struktuře konformního nekonečna.

Vedle toho lze analogicky zavést též *časové* a *prostorové* nekonečno – limitní body časových, resp. prostorových, asymptoticky geodetických křivek.

Z matematického hlediska je prostoročas \mathcal{M} varietou s metrikou g . Vlastnosti a strukturu konformního nekonečna této variety lze studovat Penroseovou metodou [29, 32]. Ta spočívá ve vnoření fyzikálního prostoročasu \mathcal{M} s metrikou g do pomocného prostoročasu $\tilde{\mathcal{M}}$ s nefyzikální metrikou \tilde{g} , která se od fyzikální metriky liší pouze lokální konformní transformací – přeškálováním konformním faktorem Ω^2 :

$$\tilde{g} = \Omega^2 g . \quad (1.1)$$

Klíčové pozorování je, že konformní přeškálování nemění lokální kauzální strukturu. Časupodobné směry vycházející z dané události jsou totiž dány vektory se záporným kvadrátem velikosti spočteným pomocí metriky g , prostorupodobné směry pomocí vektorů s kvadrátem velikosti kladným. Toto rozlišení se při přeškálování (1.1) nezmění. Pojmy *minulost* a *budoucnost* zůstávají tak pro konformní metriku stejné jako pro metriku fyzikální. Stejně tak nulové (světelné) křivky ve smyslu fyzikální geometrie jsou nulové i ve smyslu geometrie konformní.

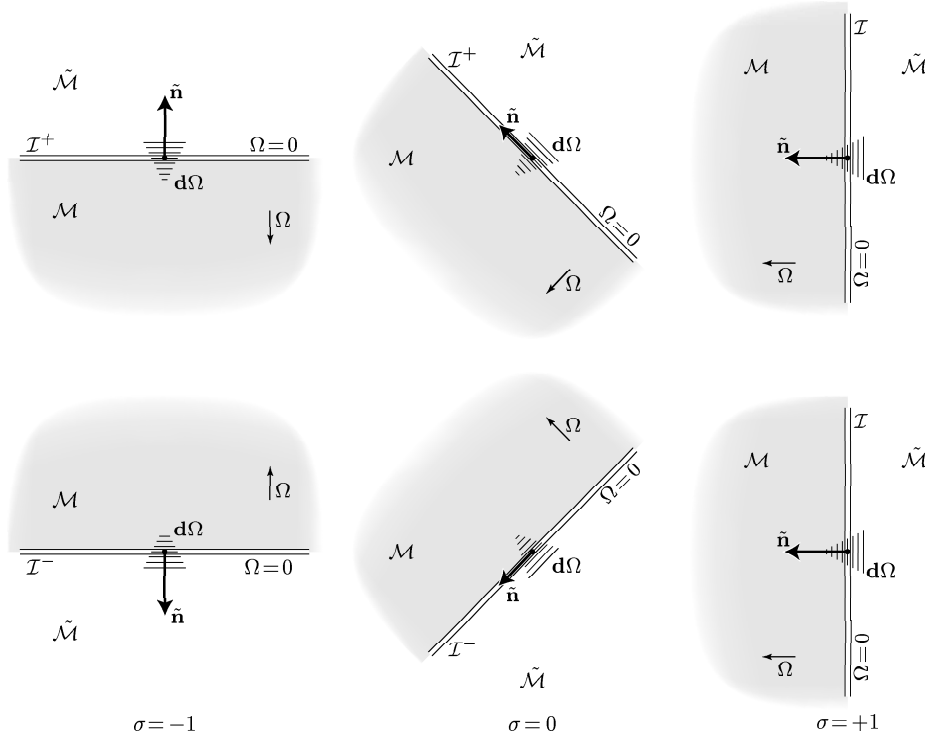
Škálování metriky volíme takové, aby faktor Ω klesal k nule směrem do nekonečna fyzikálního prostoročasu. Fyzikální prostoročas \mathcal{M} se pak stává částí nefyzikálního prostoročasu $\tilde{\mathcal{M}}$ ohraničenou hranicí $\partial\mathcal{M} = \mathcal{I}$, která je dána podmínkou

$$\Omega = 0 . \quad (1.2)$$

Řekneme, že nekonečno \mathcal{I} je regulární, pokud z hlediska ‘rozšířeného’ prostoročasu $\tilde{\mathcal{M}}$ je metrika \tilde{g} na hranici \mathcal{I} regulární.² Naproti tomu, fyzikální metrika je na \mathcal{I} degenerovaná – vzdálenosti mezi body uvnitř fyzikálního prostoročasu a hranicí \mathcal{I} měřené pomocí fyzikální metriky jsou nekonečné a proto hranice \mathcal{I} reprezentuje body v nekonečnu fyzikálního prostoročasu. Z hlediska pomocné variety $\tilde{\mathcal{M}}$ je však regulární nekonečno obyčejnou nadplochou ohraničující fyzikální prostoročas a můžeme ji proto zkoumat běžnými prostředky diferenciální geometrie.

Zavedení konformního nekonečna \mathcal{I} je analogické přidání nevlastních bodů známé z běžné geometrie. Konformní nekonečno ale může mít bohatou strukturu. Typicky se jedná o třídímní varietu ‘ohraničující’ fyzikální prostoročas. Můžeme však mít konformní nekonečna lišící se jak svojí topologií, tak geometrií.

²Regularita není samozřejmá. Neregulární bývá např. prostorové nekonečno v netriviálních prostoročasech s $\Lambda = 0$ či např. části nekonečna \mathcal{I} na ose symetrie prostoročasu C -metriky diskutovaného v podkapitole 1.4 níže.



Obrázek 1.2: **Charakter konformního nekonečna.** Lokální charakter konformního nekonečna \mathcal{I} (definovaného jako hranice $\Omega = 0$ fyzikálního prostoročasu \mathcal{M} v pomocné varietě $\tilde{\mathcal{M}}$) je určen normou σ vektoru $\tilde{\mathbf{n}}$ kolmého k nekonečnu \mathcal{I} . Pro $\sigma = -1, 0$, nebo $+1$ je nekonečno \mathcal{I} prostorupodobné, nulové, respektive časupodobné. Když $\sigma = -1$ nebo $\sigma = 0$, lze rozlišit budoucí a minulé nekonečno \mathcal{I}^+ a \mathcal{I}^- ; příslušné diagramy jsou nakresleny v horní a dolní části obrázku. Pro $\sigma = +1$ obě nekonečna splývají a příslušné diagramy jsou tudíž totožné.

Základní geometrickou charakteristikou konformního nekonečna \mathcal{I} je jeho orientace. Zavedeme-li vektor $\tilde{\mathbf{n}}$ kolmý k nekonečnu \mathcal{I} a normalizovaný pomocí metriky $\tilde{\mathbf{g}}$ vztahy

$$\tilde{\mathbf{n}} \propto \mathbf{d}\Omega, \quad \tilde{\mathbf{g}}_{ab} \tilde{\mathbf{n}}^a \tilde{\mathbf{n}}^b = \sigma, \quad \sigma = -1, 0, +1, \quad (1.3)$$

pak říkáme, že konformní nekonečno je

$$\begin{array}{ll} \text{prostorupodobné} & \text{pokud } \sigma = -1, \\ \text{nulové} & \text{pokud } \sigma = 0, \\ \text{časupodobné} & \text{pokud } \sigma = +1. \end{array} \quad (1.4)$$

Prostorupodobné a nulové nekonečno může být dosaženo pomocí nulových křivek pouze z minulosti nebo pouze z budoucnosti. Podle toho rozlišujeme *budoucí* a *minulé* konformní nekonečno (viz obr. 1.2). Bod časupodobného nekonečna může být zároveň dosažen jak z minulosti, tak z budoucnosti; budoucí a minulé nekonečno v tomto případě splývají.

Důležitým důsledkem Einsteinova gravitačního zákona je, že charakter konformního nekonečna souvisí se znaménkem kosmologické konstanty Λ . Za předpokladu, že stopa tenzoru energie-hybnosti je nulová (což je např. splněno ve vakuu či v přítomnosti elektromagnetického pole) platí (viz [29], případně (2.10) v [7]), že

$$\sigma = -\operatorname{sgn} \Lambda . \quad (1.5)$$

Prostoročasy bez kosmologické konstanty (např. plochý Minkowského vesmír) mají konformní nekonečno nulové, prostoročasy s kladnou kosmologickou konstantou (např. de Sitterův vesmír) ‘začínají’ prostorupodobným minulým nekonečnem a ‘končí’ prostorupodobným budoucím nekonečnem. Konečně prostoročasy se zápornou kosmologickou konstantou (např. anti-de Sitterův vesmír) jsou ohraničené časupodobným nekonečnem.

Poznamenejme, že existují situace, kdy nelze konformní nekonečno zavést. Prostorčas se nemusí na velkých vzdálenostech chovat regulárně, může být ‘ohraňován’ singularitami (jako je např. velký třesk) či může obsahovat černé díry (viz níže). Nekonečno nemusí být souvislé – může se rozpadat nejen na budoucí a minulou část, ale i na několik navzájem oddělených komponent. Na konformní nekonečno \mathcal{I} lze klást další omezující podmínky, týkající se např. asymptotického chování metriky v okolí \mathcal{I} . Nejznámější je pojem tzv. *asymptotické plochosti* [29, 33] vymezující, že konformní nekonečno je nulové a asymptoticky velmi blízké nekonečnu prázdného Minkowského prostorochasu.

Konformní diagramy

Vnoření fyzikálního prostorochasu do pomocné variety $\tilde{\mathcal{M}}$ umožňuje přirozenou vizualizaci globálních aspektů kauzální struktury. Celý fyzikální prostorčas se zde totiž zobrazuje jako kompaktní objekt.

Typicky se tato technika používá pro dvoudimenzionální řezy. Pro symetrické prostoročasy bývá dvoudimenzionální řez dostatečně informativní. Např. pro sféricky symetrické prostoročasy řez v radiálním a časovém směru zachycuje většinu podstatných rysů kauzální struktury. Přeskálování fyzikální metriky lze vždy zvolit tak, aby restrikce konformní metriky \tilde{g} na vybraný dvoudimenzionální řez \mathcal{K} byla Minkowského metrika³

$$\tilde{g}|_{\mathcal{K}} = -\mathbf{d}\tilde{t}^2 + \mathbf{d}\tilde{r}^2 . \quad (1.6)$$

Konformní diagram je pak zobrazení řezu \mathcal{K} s vertikální a horizontální osou ve směru souřadnic \tilde{t} a \tilde{r} . Diagonální směry odpovídají nulovým křivkám $\tilde{r} \pm \tilde{t} = \text{konst.}$, které jsou nulové i ve smyslu fyzikální metriky g a určují tak světelné kužele, tj. určují kauzální strukturu. V tomto diagramu bude celý fyzikální prostorčas zobrazen jako omezená oblast ohraničená konformním nekonečnem \mathcal{I} .

Konformní diagramy byly zavedeny Carterem a zpopularizovány Penrosem. Detailní popis jejich konstrukce a vlastností (zejména s aplikací na prostoročasy s černými dírami) je možné najít v [34].

³Každé dvě metriky na dvoudimenzionální ploše jsou spojené konformní transformací, proto lze konformní faktor vždy zvolit tak, aby $\tilde{g}|_{\mathcal{K}}$ byla plochá.

Nejjednodušším příkladem je konformní diagram Minkowského prostoročasu. Minkowského metriku zapsanou ve sférických, případně nulových souřadnicích

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= -\mathbf{d}t^2 + \mathbf{d}r^2 + r^2(\mathbf{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \mathbf{d}\varphi^2) \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{d}u \vee \mathbf{d}v + \frac{1}{4} (v-u)^2 (\mathbf{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \mathbf{d}\varphi^2) \end{aligned} \quad (1.7)$$

(kde $t \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $\vartheta \in (0, \pi)$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$ a $u = t-r$, $v = t+r$) lze přeškálovat konformním faktorem

$$\Omega^2 = 4(1+u^2)^{-1}(1+v^2)^{-1}. \quad (1.8)$$

To vede ke konformní metrice $\tilde{\mathbf{g}}$, která má po zavedení souřadnic \tilde{t} , \tilde{r}

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{1}{2}(\tilde{v} + \tilde{u}), \quad \tan \frac{\tilde{u}}{2} = u, \\ \tilde{r} &= \frac{1}{2}(\tilde{v} - \tilde{u}), \quad \tan \frac{\tilde{v}}{2} = v, \end{aligned} \quad (1.9)$$

tvar

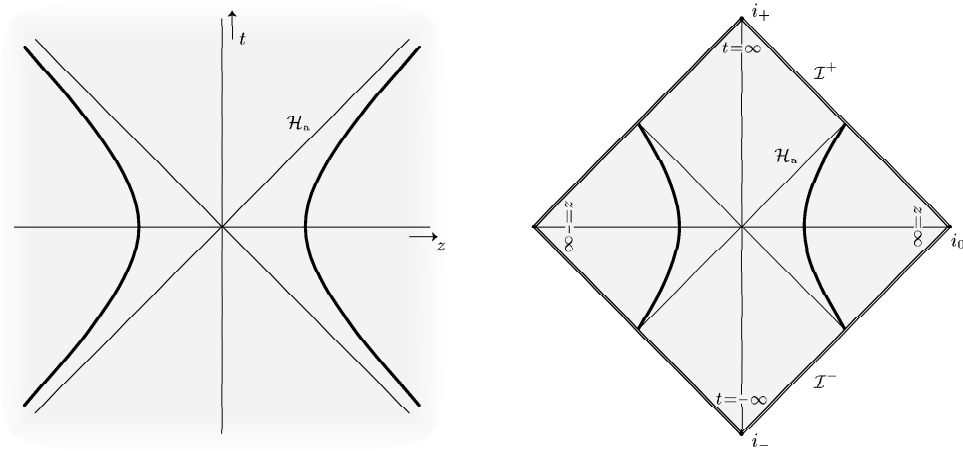
$$\tilde{\mathbf{g}} = \Omega^2 \mathbf{g} = -\mathbf{d}\tilde{t}^2 + \mathbf{d}\tilde{r}^2 + \sin^2(\mathbf{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \mathbf{d}\varphi^2). \quad (1.10)$$

Zřejmě zúžení např. na řez $\vartheta = \pi/2$, $\varphi = 0$ vede na metriku (1.6). Konformní nekonečno \mathcal{I} původního Minkowského prostoročasu je dáno podmínkou (1.2), tj. podmínkami⁴ $u = -\infty$, resp. $v = \infty$. V souřadnicích \tilde{u} , \tilde{v} tyto podmínky přejdou na $\tilde{u} = -\pi$ a $v = \pi$, konformní nekonečno \mathcal{I} je tak vskutku lokalizované v konečné oblasti konformní variety $\tilde{\mathcal{M}}$. Konformní diagram radiálního řezu Minkowského prostoročasu je kosočtverec ohraničený konformním nekonečnem \mathcal{I} nulového charakteru, viz obr. 1.3. Vrcholy kosočtverce jsou minulé a budoucí nekonečna i_- a i_+ a prostorové nekonečno i_0 .

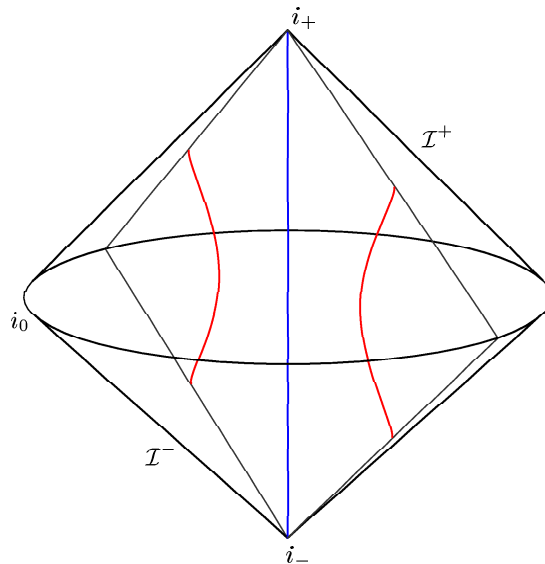
Pro prostoročasy s nižší symetrií nemusí být konformní diagram dvoudimenzionálních řezů již dostatečný – nemusí postihovat důležité rysy prostoročasu či dokonce může zkreslovat charakter konformního nekonečna. Záleží totiž na tom, jak je dvoudimenzionální řez do prostoročasu vnořen. Např. u C -metriky, o které se zmíníme podrobněji níže, typický řez, pro který se kreslí dvoudimenzionální konformní diagram, protíná konformní nekonečno v linii prostorového charakteru, ačkoli samotné nekonečno je charakteru nulového – viz diskuzi C -metriky v podkapitole 1.4 (např. obr. 1.11) či práci [12].

Proto je v těchto případech výhodné vizualizovat kauzální strukturu pomocí třídimeznionálních diagramů sestavených opět pomocí konformní geometrie pomocné variety $\tilde{\mathcal{M}}$. V případě třídimeznionálního řezu však již není možné vždy dosáhnout, aby konformní metrika zúžená na řez byla plochá jako v (1.6). Při vykreslování třídimeznionálního diagramu je proto potřeba zvolit vhodné vnoření konformní geometrie do euklidovského prostoru, ve kterém diagram zobrazujeme. Pro takto zkonstruované diagramy nebude již platit, že všechny diagonální linie jsou nulové; světelné kužele mohou být zobrazeny deformovaně. Třídimeznionální diagram však lze chápat jako ‘poslepování’ diagramů dvoudimenzionálních – dvoudimenzionální řezy tvoří foliaci třídimeznionálního diagramu a v každém listu této foliace můžeme užít vlastností diagramů dvoudimenzionálních.

⁴Znaménka jsou dána požadavkem $r > 0$.



Obrázek 1.3: **Konformní diagram Minkowského prostoročasu.** Konformní diagram slouží k zachycení celého prostoročasu včetně jeho konformního nekonečna \mathcal{I} , prostorového nekonečna i_0 a časového nekonečna i_{\pm} . Diagram využívá ploché struktury pomocné variety, do které je fyzikální prostoročas vnořen. V obrázku nalevo je schematicky zachycen nepřeskálovaný Minkowského prostoročas, napravo jeho konformní diagram. V obou diagramech jsou znázorněny dva rovnoměrně urychlené pozorovatelé (tučně) a s nimi asociované akcelerační horizonty \mathcal{H}_a (diagonální linie).



Obrázek 1.4: **Třídímní diagram Minkowského prostoročasu.** Diagram třídímního řezu Minkowského prostoročasu z hlediska pomocné konformní geometrie, do které je fyzikální prostoročas vnořen. Hranice dvojitého kužele odpovídá konformnímu nekonečnu, vrcholy časovému nekonečnu a obvod společné podstavy kuželů prostorovému nekonečnu fyzikálního prostoročasu. V diagramu jsou znázorněny světočáry dvou rovnoměrně urychlených pozorovatelů a jednoho volného pozorovatele stojícího mezi nimi.

Pro Minkowského prostoročas můžeme zkonstruovat třídimenziální diagram např. řezu $\vartheta = \pi/2$. Tento diagram lze též získat rotací diagramu dvoudimenziálního – viz obr. 1.4. Interaktivní verzi a animaci tohoto diagramu lze též nalézt v digitální příloze. Interaktivní třídimenziální diagramy lze prohlížet z různých stran, přiložené animace umožňují pohled ‘dovnitř’ prostoročasu (‘otevřít’ a ‘zavřít’ konformní nekonečno) a zobrazují vnoření dvoudimenziálních konformních diagramů. V případě Minkowského prostoročasu jsou tato zobrazení poměrně triviální, nicméně do digitální přílohy byly zařazeny pro srovnání s komplikovanějšími diagramy prostoročasů obsahujících černé díry.

1.2 Rovnoměrně urychlené částice v maximálně symetrických prostoročasech

Motivace pro kosmologickou konstantu

Při zavedení konformních diagramů jsme se letmo seznámili s asymptotickou strukturou Minkowského prostoročasu – vakuového prostoročasu bez jakéhokoli gravitačního pole. Připomeňme, že i vakuový prostoročas (tj. prostoročas bez hmotných zdrojů) by mohl obsahovat netriviální gravitační pole – tzv. gravitační vlny. My se však nyní zaměříme na ‘zcela prázdné’ prostoročasy neobsahující ani gravitační vlny. Vedle Minkowského prostoročasu však navíc připustíme prostoročasy s nenulovou kosmologickou konstantou Λ . Nepřítomnost gravitačních vln můžeme matematicky vyjádřit požadavkem homogenity a isotropie těchto prostoročasů. Budeme se tedy zabývat maximálně symetrickými prostoročasy konstantní křivosti – tj. Minkowského (pro $\Lambda = 0$), de Sitterovým (pro $\Lambda > 0$) a anti-de Sitterovým (pro $\Lambda < 0$) prostoročasem.

Původně Einstein zahrnul do svého gravitačního zákona člen s kosmologickou konstantou, aby zajistil existenci řešení odpovídající statickému vesmíru vyplněného homogenně rozloženou hmotou (tzv. Einsteinův vesmír). Po experimentální evidenci toho, že se náš vesmír rozpíná, význam kosmologické konstanty na určitou dobu poklesl – přestože právě znalost de Sitterova řešení sehrála při akceptování expandujících kosmologických modelů pozitivní roli [35, 36]. Zájem o de Sitterovo řešení opět vzrostl v kontextu tzv. ‘steady-state’ modelu vesmíru v 50-tých letech 20. století a zejména v 80-tých letech v souvislosti s inflačními modely počátku vesmíru [36]. Kosmologická konstanta se nakonec vrátila na scénu v plné slávě s nedávným zjištěním, že se rozpínání našeho vesmíru urychluje (viz např. přehled [37]). K vysvětlení tohoto jevu je potřeba přítomnost $\Lambda > 0$ či nějakého fyzikálního pole – skrývajícího se pod přezdívkou *temná energie* – které se jako kosmologická konstanta efektivně chová.⁵ De Sitterův model vesmíru tak hraje v současné kosmologii klíčovou roli jak při vysvětlování počátečních stavů vesmíru (inflační fáze), tak při popisu konečných fází, kdy je limitou obecné třídy kosmologických modelů s $\Lambda > 0$.

Vedle toho jsou prostoročasy jak s kladnou tak zápornou kosmologickou kon-

⁵Hodnota kosmologické konstanty konzistentní se současným pozorováním je $\Lambda = 3H^2\Omega_\Lambda = 0,12 \text{ Gpc}^{-2} = 1,2 \cdot 10^{-35} \text{ s}^{-2}$. Hubbleova konstanta $H = 71 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ a relativní hustota ‘temné energie’ $\Omega_\Lambda = 0,73$ jsou dány analýzou dat [38, 39].

stantou široce využívány při zkoumání působení gravitace na kvantová pole (viz např. [40]) a hrají podstatnou roli při pokusech o spojení kvantové teorie pole a obecné teorie relativity – ať již v teorii supergravitace, bránových kosmologiích či teorii superstrun. Jedním z klíčových pozorování využívaných v těchto teoriích, zvyrazňující význam anti-de Sitterova vesmíru, je AdS/CFT korespondence – skutečnost, že lze nalézt určitý vztah mezi kvantovými poruchami gravitačního pole uvnitř anti-de Sitterova vesmíru a jistými kvantovými poli žijícími na konformním nekonečnu.

Maximálně symetrické prostory sehrály také důležitou roli v matematické relativitě, kde slouží jako základní prototypy prostoročasů. Obvykle se předpokládá, že hmota obsažená ve vesmíru prostoročas deformuje pouze lokálně. Daleko od zdrojů by se vlastnosti prostoročasu alespoň v některých oblastech měly blížit vlastnostem prázdného vesmíru – podle znaménka kosmologické konstanty vlastnostem Minkowského, de Sitterova či anti-de Sitterova vesmíru.

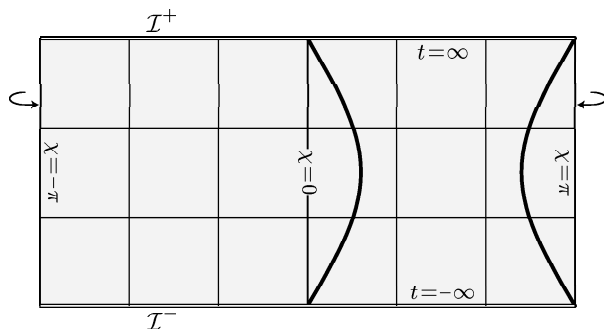
Rovnoměrně urychlené zdroje

Rovnoměrně urychlené částice jsou asi nejjednodušší netriviálně se pohybující zdroje. Přesto analýza vlastností elektromagnetického pole těchto zdrojů (tzv. Bornovo řešení [41]) není přímočará a v odborné literatuře je možné nalézt nepřehlednou řadu článků věnovaných tomuto tématu (viz citace v [42] a [10]). Zájem a kontroverzi působí zejména absence brzdě síly u pole, které má zářivý charakter. Bornovo řešení popisuje pole netriviálních zdrojů, přitom je však analyticky relativně snadno vyjádřitelné a může tak sloužit jako modelový příklad pro analýzu různých fenoménů, např. k porozumění asymptotické struktury záření.

Rovnoměrně urychlená částice se v obecné teorii relativity popisuje světočárou, jejíž 4-zrychlení se mění pouze ve směru 4-rychlosti. V Minkowského prostoročasu jsou takové světočáry hyperboly ve smyslu inerciálních souřadnic a mluví se o hyperbolickém pohybu. Bornovo řešení popisuje pole dvou nábojů, které se k sobě přibližují z nekonečna s konstantním zpomalením⁶ – až se zastaví a poté se začnou od sebe s konstantním zrychlením vzdalovat. Tyto částice se asymptoticky pohybují rychlostí světla a proto se v kompakťkovaném obraze vynořují z konformního nekonečna a opět se do něho vrací – viz obr. 1.3, případně interaktivní diagramy v digitální příloze. Díky tomu ani jedna z těchto částic nemůže pozorovat všechny události v celém prostoročase a ani nemůže být pozorována ze všech událostí v prostoročase. Hranice oblasti, ze které může být částice pozorována, a oblasti, kterou může pozorovat, se nazývá akcelerační horizont. Jedná se o historii dvou roviny kolmých na pohyb částice pohybujících se rychlostí světla proti sobě podél směru pohybu částic. Obě částice jsou akceleračními horizonty od sebe kauzálně odděleny. V třídímním konformním diagramu můžeme nahlédnout, že akcelerační horizont je vlastně tvořen světelnými kuželi s vrcholy v bodech, ve kterých částice ‘vstupují’ či ‘vystupují’ skrze konformní nekonečno do prostoročasu. Digitální příloha obsahuje diagramy zobrazující Minkowského prostoročas s vyznačeným i nevyznačeným akceleračním horizontem a animace, ve kterých je možno tento horizont ‘otevírat’ a ‘zavírat’.⁷

⁶Konstantní je zpomalení/zrychlení v klidové soustavě částice.

⁷Podrobněji se ‘ovládáním’ diagramů a animací v digitální příloze budeme zabývat v podkapitole 1.4, v oddíle popisujícím zobrazení C -metriky s $\Lambda = 0$.



Obrázek 1.5: **Konformní diagram de Sitterova prostoročasu.** V diagramu je zobrazen radiální řez de Sitterovým vesmírem. Prostorová geometrie de Sitterova vesmíru je S^3 , radiální řez tak odpovídá hlavní kružnici této třísféry. Horizontální linie v diagramu proto musejí být na krajích identifikovány. V diagramu jsou znázorněny linie standardních kosmologických souřadnic a světočáry dvou urychlených pozorovatelů (tučně). Dvojitě čáry vyznačují konformní nekonečno prostoročasu, které se rozpadá na minulé nekonečno \mathcal{I}^- a \mathcal{I}^+ .

De Sitterův vesmír

V pracích [1, 2, 10] jsme se podrobně zabývali zobecněním Bornova řešení pro případ kladné kosmologické konstanty, tj. nalezením elektromagnetického a skalárního pole dvou rovnoměrně urychlených nábojů v de Sitterově vesmíru.

Kladná kosmologická konstanta efektivně působí jako rovnoměrně rozložená hmota se speciální stavovou rovnicí, která má *odpudivé* či *repulzní* gravitační účinky. Proto může kosmologická konstanta v Einsteinově vesmíru kompenzovat přitažlivé působení běžné hmoty, která by se jinak gravitačně zhroutila. De Sitterův vesmír neobsahuje žádnou hmotu a má proto tendenci se pod vlivem kosmologické konstanty rozpínat. Toto kosmologické rozpínání je ve vzdálené budoucnosti tak rychlé, že mu nemůže ‘uniknout’ ani světelný paprsek. Jednotlivé části prostoročasu se díky tomuto rozpínání vzdalují od sebe v daleké budoucnosti tak rychle, že je ani světelné paprsky nestihnou kauzálně spojit. Tyto oblasti jsou proto od sebe *prostorupodobně* oddělené. Budoucí konformní nekonečno \mathcal{I}^+ má tak prostorupodobný charakter – má podobu nadplochy (ve smyslu pomocné variety $\tilde{\mathcal{M}}$), jejíž jednotlivé body jsou navzájem prostorupodobně položené, viz obr. 1.5.

Díky rychlému rozpínání nemůže žádný pozorovatel v de Sitterově vesmíru (ani pozorovatel žijící nekonečně dlouho) uvidět celý vesmír – z některých oblastí k pozorovateli nestihne doletět žádná informace, protože žádný signál nepřekoná kosmologické vzdalování těchto oblastí. Hranice oblasti, kterou může pozorovatel (částice) vidět, se nazývá *částicový* či *kosmologický horizont*. Je tvořen světelnými paprsky asymptoticky přicházejícími do stejného bodu v budoucím konformním nekonečnu jako samotný pozorovatel (částice).

Tato situace je odlišná od Minkowského prostoročasu. V něm se paprsky pohybující se rychlostí světla vzdalují do konformního nekonečna \mathcal{I} , kdežto světočáry částic pohybujících se asymptoticky bez zrychlení vedou do časového nekonečna. V případě Minkowského prostoročasu lze časové nekonečno chápat jako vrchol

světelného kužele tvořícího konformní nekonečno (ve smyslu konformní geometrie pomocné variety $\tilde{\mathcal{M}}$). Světelné paprsky tak ‘opouštějí’ prostoročas ‘jinde’, než podsvětelní pozorovatelé. V de Sitterově prostoročasu je však konformní nekonečno zároveň i nekonečno časové.

Extrapolujeme-li de Sitterův vesmír do daleké minulosti zjistíme, že je časově symetrický. Fázi rozpínání předchází fáze smršťování.⁸ Podobné argumenty uvedené pro budoucí konformní nekonečno lze tak uvést i pro nekonečno minulé. V prostorovém směru je de Sitterův vesmír uzavřený – lze si ho představit jako třídimenzionální sféru S^3 s poloměrem měnícím se s časem t jako $\ell \operatorname{ch}(t/\ell)$. Metrika tak lze zapsat ve tvaru

$$g = -dt^2 + \ell^2 \operatorname{ch}^2 \frac{t}{\ell} \left(d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right). \quad (1.11)$$

Zde $\ell = \sqrt{3/\Lambda}$ je typická délková škála de Sitterova vesmíru určující jeho poloměr v okamžiku přechodu z fáze smršťování do fáze rozpínání.

Je přirozené nakreslit konformní diagram řezu odpovídajícího historii osy. V každý časový okamžik je osa dána hlavní kružnicí de Sitterovské sféry S^3 . Historie osy (tj. její časový vývoj) je proto topologicky povrch válce. Konformním přeškálováním lze potlačit rozpínání de Sitterova vesmíru a smrsknout trvání celého vesmíru na konečný úsek konformního času. Přitom se však zachová kauzální povahu konformního nekonečna. Dvoudimenzionální konformní diagram má tak podobu části povrchu (vertikálně orientovaného) válce. Tato část je ohraničena dvěma (horizontálními) kružnicemi okolo válce, které reprezentují minulé a budoucí konformní nekonečno. Typicky se tento cylindr ‘rozřízne’ ve vertikálním směru a zobrazí v rovině jako obdélník, viz obr. 1.5. Poměr časového (vertikálního) rozměru a prostorového (horizontálního) rozměru je takový, že světelné paprsky vyslané v minulém nekonečnu z jednoho bodu všemi směry se v budoucím nekonečnu sejdou přesně v bodě protilehlém k bodu vyslání.

Třídimenzionální konformní diagram by měl mít geometrii $S^2 \times \mathbb{R}$. Bohužel, sekvence dvousfér ‘naskládáných ve vertikálním směru’ se již v euklidovské rovině špatně zobrazuje. Jedna z možností je dvousféru ‘propíchnout’ a roztáhnout na kruh (jehož obvod tak odpovídá jednomu bodu). Tyto kruhy již ve vertikálním směru naskládat lze. Konformní diagram třídimenzionálního řezu de Sitterova prostoročasu má pak podobu vnitřku válce mezi dvěma horizontálními podstavami reprezentujícími minulé a budoucí konformní nekonečno. Tento diagram s podrobnou diskuzí lze nalézt v práci [1].

Vzhledem k tomu, že se de Sitterův vesmír rozpíná, pozorovatel, který se snaží zachovat od jiného volně se pohybujícího pozorovatele konstantní vzdálenost, se musí pohybovat se zrychlením kompenzujícím kosmologickou expanzi. Díky homogenitě vesmíru se ukazuje, že toto zrychlení musí být konstantní – jedná se o rovnoměrně urychleného pozorovatele. Více takto navzájem nepohybujících se pozorovatelů tvoří tzv. statický systém. Všichni tito pozorovatelé ‘vstupují’ do prostoročasu v jenom bodě minulého konformního nekonečna, pohybují se

⁸Poznamenejme, že kosmologická repulze způsobená kosmologickou konstantou určuje ‘zrychlení’ rozpínání vesmíru, tj. druhou derivaci jeho ‘velikosti’. Zda se se vesmír smršťuje či rozpíná závisí na ‘počátečních podmínkách’ pro velikost vesmíru. De Sitterův vesmír odpovídá časově symetrické situaci, kdy smršťování přejde v rozpínání.

s konstantním zrychlením a ‘opouštějí’ prostoročas opět v jednom bodě budoucího konformního nekonečna. Dosáhnout nekonečna jim samozřejmě trvá nekonečný vlastní čas.

V rozsáhlém článku [10] zařazeném do této práce je vyčerpávajícím způsobem rozebrána struktura de Sitterova vesmíru, jeho popis v různých souřadnicích, popis rovnoměrně urychlených pozorovatelů v těchto souřadnicích a konečně různé podoby elektromagnetického a skalárního pole urychlených zdrojů. Práce obsahuje podrobnou charakteristiku souřadnic přizpůsobených urychleným pozorovatelům včetně detailních diagramů. Appendix práce [10] tvoří jakýsi slovník všech souřadnic a vztahů mezi nimi s vyobrazením souřadnicových čar v konformních diagramech.

Pole dvou rovnoměrně urychlených nábojů v de Sitterově vesmíru bylo již nalezeno v pracích [1, 2]. Jedná se o pole nábojů, vstupujících do prostoročasu v antipodálních pólech, pohybujících se proti sobě se stejným zrychlením tak, že zachovávají během celé své existence od svých pólů konstantní vzdálenost. Nalezené pole je (obdobně klasickému Bornovu řešení) analytické v celém prostoročase (samozřejmě mimo zdroje) a lze ho interpretovat jako kombinaci retardovaného působení od jednoho náboje a advancovaného působení od druhého náboje, případně jako vhodnou kombinaci obou těchto působení od obou nábojů (viz např. rov. (6.6) v [1]).

Nabízí se přirozeně otázka, zda nelze nalézt čistě retardované pole obou nábojů, tj. pole, které je nenulové pouze v kauzální budoucnosti světočar nábojů. Na rozdíl od Minkowského prostoročasu je odpověď pro elektrické náboje v de Sitterově vesmíru záporná: nelze zkonstruovat čistě retardované elektromagnetické pole bodových nábojů! Příčina je přitom poměrně jednoduchá a má obecnější platnost než jen pro de Sitterův vesmír. Jedna z Maxwellových rovnic totiž říká, že v jednom časovém řezu mohou siločáry elektrického pole začínat pouze na náboji nebo musejí ubíhat do nekonečna. Časový řez de Sitterova vesmíru však může být zvolen uzavřený (sféra S^3) a tak všechny siločáry musejí začínat a končit na náboji. To nám okamžitě dává globální vazbu na celkový náboj ve vesmíru: celkový elektrický náboj v libovolném prostorově uzavřeném vesmíru musí být nulový. Toto však ještě není omezení, který by vylučovalo existenci čistě retardovaného pole – v našem případě jsou zdrojem pole dva náboj stejné velikosti, ale opačného znaménka a globální omezení na náboj je tedy splněno.

V případě, že minulé konformní nekonečno je prostorupodobné (jak je tomu i v de Sitterově vesmíru) můžeme navíc zformulovat i lokální omezení na rozložení náboje čistě retardovaného pole. Jak bylo řečeno, čistě retardované pole je pole nenulové pouze v kauzální budoucnosti zdrojů. Mělo by být tedy identicky nulové v minulém nekonečnu. Pokud je toto nekonečno prostorupodobné, lze na něm aplikovat vazbu plynoucí z Maxwellových rovnic a zjišťujeme, že v minulém nekonečnu nemohou být přítomny náboje ani lokálně (nemáme žádné siločáry, které by z nich vycházely).

Jediná možnost, jak by se v takovém prostoročasu mohl vyskytovat náboj s čistě retardovaným polem je, že by v jednom bodě minulého nekonečna vstoupilo do prostoročasu více nábojů, jejichž celková hodnota by byla nulová. Příklady takových nábojových rozložení jsou diskutovány v práci [1].

Poznamenejme ještě, že pro skalární pole obdobná omezení neexistují – pro skalární pole lze nalézt čistě retardované pole i jediného náboje – viz diskuzi v [1].

Anti-de Sitterův vesmír

Obdobou de Sitterova vesmíru pro zápornou kosmologickou konstantu je anti-de Sitterův vesmír. V něm kosmologická konstanta působí opačně – můžeme tak mluvit o neustálé kosmologické *atrakci*. Situace je však trochu složitější – anti-de Sitterův vesmír můžeme zároveň popsat jako statický (v čase neměnný) prostoročas.

Zvolíme-li jednoho volného pozorovatele jako centrum vesmíru (je jedno kterého, protože všichni si jsou ekvivalentní), tento pozorovatel popíše anti-de Sitterův vesmír jako časovou sekvenci prostorů H^3 s Lobačevského geometrií. Zavedeme-li sférické souřadnice t, r, ϑ, φ , kde t je vlastní čas centrálního pozorovatele a r prostorová vzdálenost od centra, metrika anti-de Sitterova prostoru má tvar

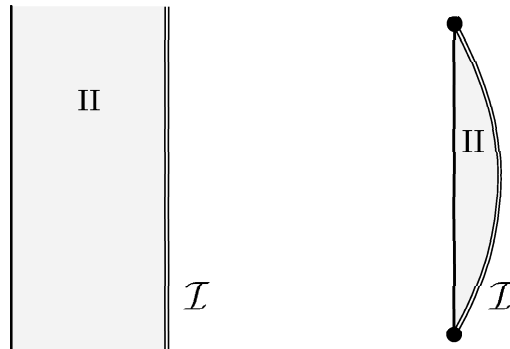
$$\mathbf{g} = -c^2 \frac{r}{\ell} dt^2 + dr^2 + \ell^2 \operatorname{sh}^2 \frac{r}{\ell} (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (1.12)$$

kde $\ell = \sqrt{-3/\Lambda}$ je opět typická délková škála související s poloměrem křivosti prostoročasu. Vidíme, že časová ‘vzdálenost’ mezi po sobě jdoucími časovými řezy závisí na vzdálenosti od centrálního pozorovatele. Pozorovateli setrávajícímu ve vzdálenosti r od centra běží hodiny $\operatorname{ch}(r/\ell)$ -krát rychleji než pozorovateli v centru.

Dvoudimenzionální diagram odpovídající historii polopřímky vedoucí z počátku do nekonečna je zobrazen v obr. 1.6. Jsou zde zobrazeny dvě alternativy užívající různou kompaktifikaci. Diagram 1.6a užívá časově nezávislého přeškálování a nekompaktifikuje tak časový směr – konformní geometrie i nadále zůstává statická (mimochodem, jedná se o geometrii hemisféry Einsteinova vesmíru) a časový směr tak nadále ubíhá po nekonečný úsek konformního času. Tento diagram zobrazuje konformní nekonečno, do kterého ubíhají světelné (a i prostoru-podobné) křivky, a věrně odráží statickou povahu prostoročasu, nezobrazuje však časové nekonečno kam směřují volní pozorovatelé. K jeho zobrazení je potřeba provést časově závislé konformní přeškálování, což vede k diagramu 1.6b. Odpovídající třídimenzionální diagramy se získají rotováním dvoudimenzionálních diagramů kolem počátku a lze je nalézt např. v práci [12], v obr. 13.

Přestože je metrika (1.12) časově neměnná, můžeme mluvit o kosmologické atrakci. Pozorovatelé, kteří chtějí zůstat konstantní vzdálenost od centra, se musí totiž pohybovat se zrychlením kompenzujícím tuto kosmologickou atrakci, tj. např. musí mít zapnuté raketové motory odpuzující ji od centra. Čím dále jsou od centra, tím větší zrychlení musí pozorovatelé vyvinout. Hodnota zrychlení se pro velmi vzdálené pozorovatele limitně blíží hodnotě $1/\ell$. Statičtí pozorovatelé jsou tedy podobně jako v de Sitterově vesmíru rovnoměrně urychleni, tentokrát však s horním omezením na velikost jejich zrychlení.

Než se zmíníme o rovnoměrně urychlených pozorovatelích s větším zrychlením, vraťme se ještě k pozorovatelům volným. Jakýkoli volný pozorovatel, který je v určitý okamžik vůči centrálnímu pozorovateli v klidu, se k němu začne díky kosmologické kontrakci vesmíru přibližovat, až kolem něj proletí, poté se začne zpomalovat, až se opět zastaví na opačné straně od centra. Tento proces se bude opakovat znovu a znovu – dva volní pozorovatelé pohybující se po společné ose tedy kolem sebe vlivem kosmologické atrakce oscilují. Alternativně, dva volní pozorovatelé, jejichž rychlosti nejsou ve směru jejich spojnice, budou kolem sebe obíhat. Můžeme říci, že kosmologická atrakce je kompenzovaná odstředivou silou.

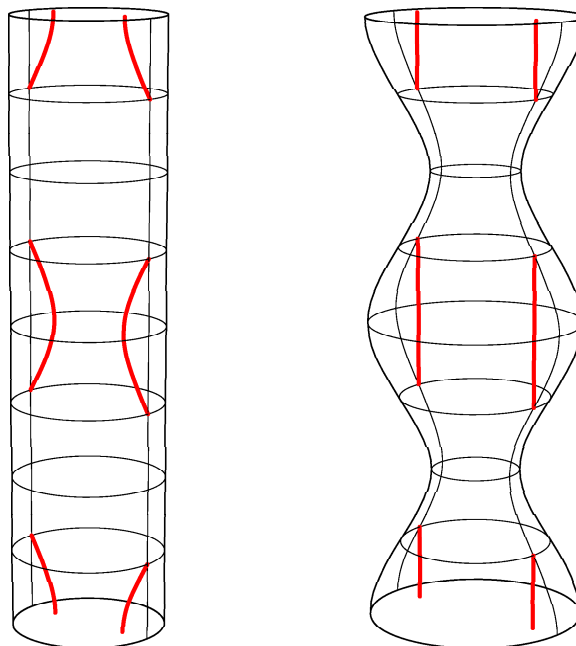


Obrázek 1.6: **Konformní diagramu anti-de Sitterova vesmíru.** Diagram znázorňuje radiální řez anti-de Sitterova vesmíru, konkrétně historii radiální polopřímky vedoucí z počátku do nekonečna. Levá hraniční linie je světočára pozorovatele v počátku. Dvojitá linie odpovídá konformnímu nekonečnu, které má časupodobný charakter. Nalevo je diagram získaný přeškálováním fyzikální metriky časově nezávislým faktorem, zůstává proto zachována ‘nekonečnost’ časového (vertikálního) směru. Diagram napravo využívá časově závislého škálování, které kompaktifikuje i časový směr.

Žádný volný pozorovatel se nemůže vymanit kosmologické atrakci, žádný podsvětelný pozorovatel bez zrychlení se od centrálního pozorovatele nevzdálí na nekonečnou vzdálenost. ‘Únikovou rychlostí’ do nekonečna je až rychlost světla: Jen signál pohybující se rychlostí světla či pozorovatel urychlující se k ní s dostatečně velkým zrychlením unikne až do konformního nekonečna. To má tentokrát *časupodobný* charakter (viz (1.5)). Na to, aby se podsvětelný pozorovatel do nekonečna vzdálil, musí se pohybovat alespoň nadkritickým zrychlením.

Příkladem jsou pozorovatelé pohybující se s rovnoměrným zrychlením větším než $1/\ell$. Ti překonají kosmologickou atrakci a jejich světočára vede až do konformního nekonečna. Jelikož je anti-de Sitterův vesmír symetrický vůči časové reverzi, pokud protáhneme jejich světočáru zpět v čase zjistíme, že z konformního nekonečna též přilétají. Jedná se tedy o pozorovatele, kteří vstupují do prostoročasu skrze časupodobné konformní nekonečno s nenulovou počáteční rychlostí směrem k centru, okamžitě však začnou brzdit svůj pohyb až se zastaví a začnou se vzdalovat až opět prostoročas opustí skrze konformní nekonečno. Pro každého z těchto pozorovatelů dosažení nekonečna samozřejmě trvá nekonečný vlastní čas. Avšak měřeno kosmologickým časem centrálního pozorovatele, celá existence takto urychlených pozorovatelů je omezena na konečný úsek $\Delta t = \pi\ell$. Zobrazení těchto pozorovatelů v třídídimenzionálním konformním diagramu je možné nalézt na obr. 1.7.

Práce diskutující elektromagnetické a skalární pole rovnoměrně urychlených nábojů v anti-de Sitterově vesmíru, tj. zobecnění Bornova řešení pro $\Lambda < 0$, se připravuje. Diskuzi vlastností urychlených pozorovatelů a souřadnic s nimi spojených lze nalézt v části V práce [12]. V této práci se primárně diskutují pole urychlených černých děr. V limitě zanedbatelné hmotnosti a testovacího náboje však zkoumaný prostoročas přejde na anti-de Sitterův vesmír, černé díry se smrsknou na bodové náboje a elektromagnetické pole přejde na hledané zobecněné Bornovo



Obrázek 1.7: **Nadkriticky urychlení pozorovatelé v anti-de Sitterově vesmíru.** Pozorovatelé rovnoměrně urychlení se zrychlením větším než $1/\ell$ vstupují do prostoročasu skrze konformní nekonečno, zpomalují směrem k počátku až se zastaví a pak zrychlují zpět do nekonečna. Nalevo jsou světočáry těchto pozorovatelů znázorněny v třídimenziálním diagramu získaném rotací diagramu z obr. 1.6. Napravo je tento diagram zdeformován tak, že světočáry urychlených pozorovatelů jsou znázorněny jako přímé linie. Toho lze dosáhnout vhodnou volnou konformního faktoru při kompaktifikaci. Tento diagram odpovídá analogickým diagramům pro nadkriticky urychlené černé díry v anti-de Sitterově vesmíru – viz podkapitolu 1.4.

řešení. Porovnání různých souřadnic a různých konformních diagramů diskutovaných v práci [12] (diagramů přizpůsobených jak statickým, tak urychleným pozorovatelům) lze též nalézt v digitální příloze.

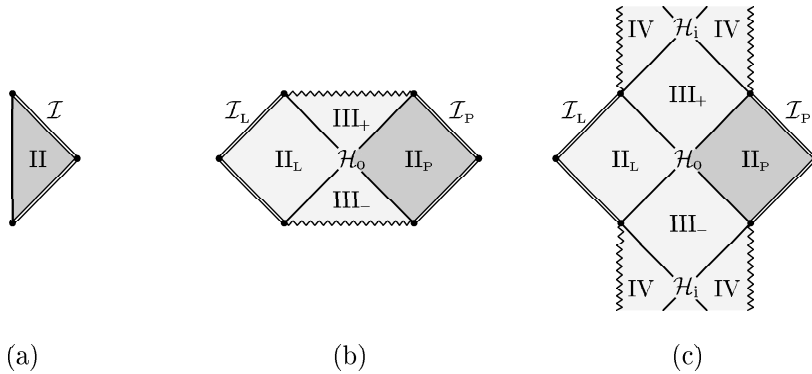
1.3 Černé díry

Co jsou černé díry?

Jak jsme se již zmínili, černé díry souvisí se zásadní změnou kauzální struktury prostoročasu. Ukazuje se, že gravitační pole může být tak silné, že zamezí všem fyzikálním signálům (tj. veškeré hmotě, polím, pozorovatelům, . . .) opustit jistou oblast prostoročasu.

Prostoročas s pouze slabým gravitačním polem (a nulovou kosmologickou konstantou) má globální kauzální strukturu podobnou Minkowského prostoročasu. Konformní nekonečno má stejnou topologii a v jistém smyslu i stejnou geometrii.⁹ Každý pozorovatel může (v principu) existovat libovolně dlouhý vlastní čas

⁹Přesný význam těmto tvrzením dává pojem asymptotické plochosti, viz např. [29, 33].



Obrázek 1.8: **Konformní diagramy statických černých děr.** Diagramy zobrazují radiální řez (a) prázdného Minkowského prostoročasu a maximálně rozšířeného (a) Schwarzschildova a (b) Reissnerova-Nordströmova prostoročasu. Ty reprezentují statickou nerotující nenabitou, respektive nabitou černou díru. Oblasti II odpovídají asymptoticky plochým oblastem, oblasti III a IV vnitřku černých/bílých děr. Dvojitě čáry značí konformní nekonečno, zubatá čára singularity, diagonální čáry vnější (a případně vnitřní) horizonty černých děr. V případě nabitě díry by měl diagram pokračovat skrze černou díru stejným způsobem jak do budoucnosti tak do minulosti.

a asymptoticky dosáhne buď časového nebo konformního nekonečna. V prostoročase se silným gravitačním polem se však může stát, že někteří pozorovatelé jsou zachyceni gravitačním polem a nekonečna dosáhnout nemohou.

Přesněji řečeno, vybereme-li maximální možnou souvislou komponentu budoucího konformního nekonečna a vezmeme-li její kauzální minulost \mathcal{P} (všechny události, ze kterých se lze do tohoto nekonečna podsvětelnou či světelnou rychlostí dostat), nemusíme vždy dostat celý prostoročas. Pokud v prostoročase existují i události nepatřící do \mathcal{P} , a přitom se do těchto událostí z \mathcal{P} dá dostat, řekneme, že tyto události tvoří *černou díru* vzhledem k vybrané komponentě konformního nekonečna. Obdobným způsobem, ale opačně v čase – tj. pomocí doplnku k budoucnosti minulého nekonečna – definujeme *bílé díry*, oblasti, do kterých se fyzikální pozorovatel z vybraného nekonečna dostat nemůže. Pokud budeme mluvit společně o černých a bílých dírách, budeme je často pro jednoduchost označovat pouze jako černé díry.

Statická černá díra v asymptoticky plochém prostoročase

Učebnicovými příklady [43,44] černé díry jsou prostoročasy popsané Schwarzschildovou a Reissnerovou-Nordströmovou metrikou. Jedná se o sféricky symetrické metriky řešící Einsteinovy gravitační rovnice ve vakuu respektive v přítomnosti sféricky symetrického elektromagnetického pole. Výše nastíněnou definici černé díry nejlépe dokumentují konformní diagramy radiálního směru těchto prostoročasů znázorněné na obr. 1.8. Poznamenejme, že je zde zobrazeno tzv. analytické rozšíření těchto metrik na maximální možný prostoročas, které nepopisuje astrofyzikálně realistickou situaci vzniku černé díry – o kolapsu vedoucím k černé díře se zmíníme později.

Maximální rozšíření Schwarzschildovy metriky popisuje prostoročas, který má asymptoticky ploché nekonečno podobné nekonečnu Minkowského prostoročasu¹⁰ (nekonečno \mathcal{I}_P ohraničující oblast II_P v obr. 1.8b; pro srovnání je na obr. 1.8a znázorněn diagram prázdného Minkowského prostoročasu). Uvnitř tohoto prostoročasu je však oblast III_+ – černá díra, ze které se již do nekonečna \mathcal{I}_P nedá dostat. A to přesto, že z oblasti II_P se do této oblasti dostat dá. Analogicky je zde oblast III_- – bílá díra, do které se z nekonečna \mathcal{I}_P nedá dostat, přestože z bílé díry je možno do \mathcal{I}_P doletět. Pozoruhodné je, že metriku lze analyticky prodloužit i do jiné asymptoticky ploché oblasti II_L . Připomeňme, že diagramy na obr. 1.8 zobrazují radiální směr. Pravá polovina diagramu 1.8b (oblast II_P) zobrazuje historii polopřímky od díry do nekonečna v jedné asymptoticky ploché oblasti. Levá polovina (oblast II_L) reprezentuje historii radiální polopřímky v *zcela jiné* asymptotické oblasti. Obě asymptotické oblasti II_L a II_P jsou spojeny skrze černou a bílou díru tzv. Einsteinovým-Rosenovým mostem. Toto spojení je však *akauzální* v tom smyslu, že žádný pozorovatel či fyzikální signál nemůže proletět z jedné asymptotické oblasti do druhé.

Černá a bílá díra jsou od oblastí II_L a II_P oddělené *horizontem událostí* – nulovou nadplochou tvořenou paprsky, které jako poslední (chápáno z oblasti vně díry) mohou odletět do nekonečna (respektive – v případě bílé díry – jako první mohou z nekonečna přiletět).

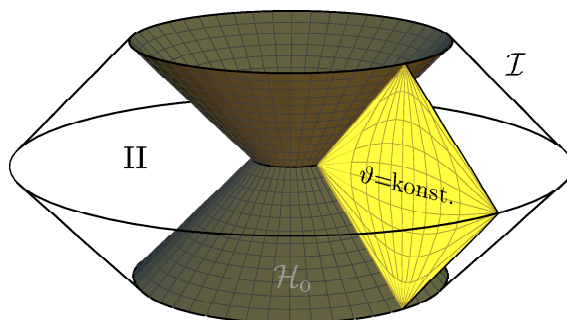
Prostoročas nabitě sféricky symetrické černé a bílé díry popsaný Reissnerovou-Nordströmovou metrikou se od Schwarzschildova prostoročasu z kauzálního hlediska vně děr příliš neliší. Zásadně se však odlišuje uvnitř děr. Co můžeme pod horizontem obou typů děr nalézt se zmíníme v následujícím oddíle. Nyní pouze konstatujme, že u nabitě černé díry je možné touto dírou proletět do dalších asymptotických oblastí, které mají všechny obdobnou strukturu. Maximálně rozšířená Reissnerova-Nordströmova metrika tak popisuje prostoročas s nekonečně mnoha asymptoticky plochými oblastmi, které jsou vždy v páru spojeny Einsteinovým-Rosenovým mostem a tyto páry jsou propojeny mezi sebou skrze vnitřek černých/bílých děr. Pro více detailů viz např. [44]

Kauzální struktura libovolné asymptoticky ploché vnější oblasti (u Schwarzschildovy díry buď II_L nebo II_P , u nabitě díry kterékoli z nekonečně mnoha vnějších oblastí II) je však stejná. Na jedné straně je oblast omezena horizontem oddělující ji od černé a bílé díry, na druhé straně konformním nekonečnem. Nás bude zajímat hlavně tato vnější oblast, jelikož právě její struktura se liší od struktury obdobných oblastí kolem *urychlených* černých děr, případně děr v prostoročasech s *nenulovou kosmologickou konstantou*.

Vybereme-li jednu takovou oblast, můžeme nakreslit její třídimenzionální konformní diagram. Jelikož se jedná o sféricky symetrické prostoročasy, takový diagram se dostane rotací části (např. oblasti II_P) dvoudimenzionálního diagramu. Výsledný diagram lze nalézt na obr. 1.9, jeho interaktivní verzi pak v digitální příloze. Zde se nachází také a animace ‘otevřítí’ a ‘zavřítí’ nekonečno a animace ukazující vnoření dvoudimenzionálních diagramů.¹¹

¹⁰Poznamenejme, že asymptotická plochost se týká konformního nekonečna \mathcal{I} . Struktura prostorového nekonečna i_0 se u Schwarzschildova řešení (a stejně tak pro obecný asymptoticky plochý prostoročas) od struktury prostorového nekonečna Minkowského prostoru liší.

¹¹Podrobněji ‘ovládání’ diagramů v digitální příloze popíšeme v příští podkapitole, v oddíle popisujícím zobrazení C -metriky s $\Lambda = 0$.



Obrázek 1.9: **Vnější oblast statické černé díry.** Diagram zobrazuje třídimenzionální radiální řez vnější oblasti prostoročasu okolo statické černé díry. Žlutá plocha odpovídá tmavě zvýrazněné oblasti II z obr. 1.8. Kónický povrch reprezentuje konformní nekonečno \mathcal{I} , tmavá plocha vnější horizont černé díry \mathcal{H}_0 .

Co je uvnitř černých děr?

Než se dostaneme k hlavnímu tématu této kapitoly – zkoumání okolí urychlených černých děr – zmíníme se ještě o tom, jak vypadají černé díry uvnitř. Pro Schwarzschildovu a Reissnerovu-Nordströmovu metriku je charakter vnitřku černých děr dobře znám a popsán jak v odborné [43, 44], tak populární literatuře (např. [45]). A ač je geometrie vnitřku urychlených děr odlišná, její kauzální aspekty zůstanou stejné. Proto nyní krátce připomeneme kauzální strukturu vnitřku statických černých děr a v případě urychlených děr se k ní již nebudeme vracet.

Pozorovatel, který se odhodlá vletět se svou kosmickou lodí dovnitř do (dostatečně velké) černé díry při průletu horizontem nebude cítit nic výjimečného – alespoň pokud se nedívá z okna lodě. Obraz jeho okolí by byl totiž již před průletem horizontem značně deformován gravitačním polem díry (zakřivením prostoročasu na škále velikosti horizontu díry). Ještě nad horizontem by mohl pozorovat větší část povrchu díry, než by očekával na základě zkušenosti z euklidovské geometrie; děje v blízkosti horizontu by mu připadaly zpomalené a barevně posunuté do červena; viděl by několikanásobné obrazy hvězd na druhé straně díry, atd. (ilustraci těchto jevů je možno nalézt např. v prezentaci [46]). Pokud by se však uzavřel do laboratoře uvnitř rakety, průlet horizontem by nedokázal lokálně detegovat – horizont jsme definovali jako hranici minulosti komponenty budoucího nekonečna, a jeho podoba tak závisí na celém dalším vývoji prostoročasu. Přesto by průlet horizontem měl pro další život pozorovatele zásadní vliv – zpoza horizontu se již nebude moci vrátit zpět do asymptotické oblasti, ze které vystaroval.

V případě nenabitě černé díry pozorovateli za horizontem zbývá navíc již jen konečné množství času, než se přiblíží k singularitě, která se uvnitř černé díry skrývá. Jedná se o křivostní singularitu – oblast, kde křivost prostoročasu roste nade všechny meze (alespoň podle klasické obecné teorie relativity). To znamená, že při přiblížování se k singularitě by pozorovatel začal pociťovat silnější a silnější slapové síly – nehomogenitu gravitačního působení, která by způsobovala, že by se v radiálním směru natahoval a v ostatních směrech smršťoval. Při dostatečném přiblížení k singularitě by toto působení bylo již tak silné, že by rozervalo

a rozmačkalo libovolně pevný materiál. Pádu do singularity uvnitř Schwarzschildovy černé díry se přitom nedá vyhnout. V diagramu 1.8b vidíme, že singularita (vyznačená zubatou čarou na horním okraji) leží ‘v budoucnosti’ pozorovatele, který vstoupil za horizont. Světočára libovolného pozorovatele či fyzikálního signálu musí směřovat do singularity. Singularita tak znamená pro vše uvnitř černé díry jakýsi ‘konec času’ – singularita má prostorupodobný charakter.

V případě nabitě černé díry jsou vyhlídky pozorovatele, který se do ní vydá, mnohem zajímavější (alespoň v případě Reissnerovy-Nordströmovy černé díry, viz ale poznámku o realistických černých dírách v následujícím oddíle). Její konformní diagram je na obr. 1.8c. Vidíme, že singularita má zde časupodobný charakter a lze se jí vyhnout. Pozorovatel který se vydá na cestu skrze černou díru po průletu horizontem událostí \mathcal{H}_0 (zde též nazývaným vnějším horizontem) již nemůže své rozhodnutí zvrátit a vrátit se zpět nad horizont. Může však zevnitř díry pozorovat celý další vývoj okolního světa. Za konečný časový úsek, kdy prolétá oblastí III_+ , uvidí celou budoucí historii asymptotické oblasti, ze které se do díry dostal (a stejně tak i historii druhé asymptotické oblasti za Einsteinovým-Rosenovým mostem). Pozorovatel v černé díře ‘přežije’ celou existenci vnějšího vesmíru (která je ale pro vnějšího pozorovatele nekonečná) a poté, co obě vnější oblasti již přestanou existovat (tyto oblasti ‘končí’ konformním nekonečnem \mathcal{I}_L a \mathcal{I}_P) ‘odtrhne’ se od nich v jakési časoprostorové bublině. V místě ‘odtrhnutí’ zbydou v bublině dvě křivostní singularity, v jejichž blízkosti opět působí velké slapové síly. Tentokrát se však lze těmto singularitám vyhnout. Naopak, tyto singularity může pozorovatel zkoumat. Uvidět je může po průletu tzv. *vnitřním horizontem* \mathcal{H}_1 . Při jeho průletu za krátký okamžik zahlédne i nekonečně dlouhé období prostoročasu vně černé díry. Za vnitřním horizontem, v oblasti IV je pozorovatel uzavřen v bublině o prostorové topologii $\mathbb{R} \times S^2$, kde na ‘koncích’ radiálního ‘směru’ \mathbb{R} leží právě zmíněné singularity. Ty však mají povahu objektu, ke kterému se sice není radno přibližovat, není však ani nevyhnutelné nutné se k němu přibližovat. Singularity tentokrát netvoří ‘konec času’, ale pouze uzavírají ‘ze stran’ bublinu, v které se pozorovatel nachází. Poté, co se pozorovatel ‘nabažil’ pohledu na singularity, dospěje k dalšímu vnitřnímu horizontu. Po jeho průchodu do oblasti III_- se již nemůže k singularitám přiblížit – ty se totiž dřív než k nim stačí doletět napojí na nové asymptoticky ploché oblasti typu II, do kterých se může dostat skrze vnější horizont \mathcal{H}_0 . Tentokrát se však v nové asymptotické oblasti vynoří z bílé díry, do které se žádný z vnějších pozorovatelů této oblasti nikdy nemůže dostat.

Tímto krátkým shrnutím známých faktů uzavřeme diskuzi statických černých děr. Zmíníme se však ještě krátce o tom, jak jsou tyto modely realistické z astrofyzikálního hlediska.

Existují černé díry?

Krátká odpověď je: „Ano, existují“. Přesněji řečeno, máme průkazné evidence, že existují ve vesmíru objekty, které jinak než jako černé díry neumíme vysvětlit.

V první řadě poznamenejme, že realistické černé díry nebudou popsány maximálně rozšířeným prostoročasem, kterým jsme se zabývali výše. Tyto modely by spíše odpovídaly tzv. *primordiálním* černým dírák (černým dírák vzniklým

na počátku vesmíru), jejich množství a vůbec existence je však podle současných znalostí a pozorování jen těžko odhadnutelná. Realistické černé díry vznikají kolapsem hmotných těles a prostoročasy popisované výše žádnou hmotu neobsahují. Tyto prostoročasy však dobře popisují okolí vzniklé černé díry. Ukazuje se totiž, že závěrečné stádium gravitačního kolapsu libovolného dostatečně hmotného tělesa vede k černé díře v podstatě vždy stejného typu – černé díry se od sebe mohou odlišovat pouze svojí velikostí (která je dána hmotností), nábojem a rotací. Přitom se neočekává, že by v astrofyzikálních situacích vznikaly podstatně nabitě černé díry. Naopak většina děr bude mít určitou rotaci, kterou jsme v diskuzi výše pominuli.

Model realisticky kolabující hvězdy se tak v pozdních fázích bude vně hvězdy či vzniklé díry shodovat s prostoročasem popsáním výše, toto vnější řešení však musí být napojeno na vnitřní řešení v kterém hraje roli i kolabující hmota. Typicky toto vnitřní řešení odřízne Einsteinův-Rosenův most a prostoročas tak nebude obsahovat druhou asymptotickou oblast. Dále se očekává, že i kdyby kolabující objekt měl nenulový náboj, nevznikla by prostoročasová bublina vedoucí do dalších asymptotických oblastí. Jejím vzniku by totiž zabránila hmota, která by se nakupila podél vnitřního černoděrového horizontu a prostoročas by zde ‘odřízla’ v jisté formě singularity. K nakupení hmoty podél vnitřního horizontu dojde z jednoduchého důvodu – jak jsme se zmínili, v jeho blízkosti by pozorovatel v konečném čase přehlédl nekonečnou historii vnějšího vesmíru. Čili i zanedbatelný tok záření z vnějšího vesmíru se podél horizontu zkoncentruje v divergující šokovou vlnu.

V současnosti se v našem vesmíru pozorují dva typy černých děr – černé díry vzniklé kolapsem jednotlivých hvězd a superhmotné černé díry v centrech galaxií. Stelární černé díry mají hmotnosti zhruba od 1,5 do 14 hmot našeho Slunce, přičemž černá díra vznikne z hvězdy, pokud je tato hvězda ve svém konečném stádiu cca třikrát hmotnější než Slunce. Nejdéle známou [47, 48] stelární černou dírou je Cygnus X-1. Jedná se o binární systém jehož jedna složka je černá díra hmotnosti cca 10 Sluncí. Superhmotné černé díry mají hmotnosti miliónů až miliard hmot Slunce a nejbližší takovouto černou díru (a observačně nejlépe prokázanou) máme v centru naší galaxie [49].

A jak můžeme černou díru pozorovat, když ji nemůže nic uniknout? Velmi stručně řečeno, můžeme pozorovat její okolí a z jeho chování usoudit na přítomnost velmi hmotného a velmi kompaktního objektu, který neumíme vysvětlit jinak než jako černou díru.

Tímto uzavřeme stručný přehled obecných aspektů černých děr a ve zbytku kapitoly se budeme věnovat urychleným černým díram popsáním tzv. *C*-metrikou.

1.4 *C*-metrika: urychlené černé díry

C-metrika

Vedle statických černých děr je známo také řešení Einsteinových gravitačních rovnic popisující rovnoměrně urychlené černé díry, tzv. *C*-metrika. Toto řešení bylo pro $\Lambda = 0$ nalezeno již v roce 1917 Levi-Civitou [21] a Wylem [22]. Pojmenováno bylo Ehlersem a Kundtem [50]. Fyzikální význam tohoto řešení jako pro-

storočasu s urychlenými černými dírami je ale podrobně analyzován až v pracích Kinnersleyho a Walkera [23], Ashtekara a Draye [24] a Bonnora [25]. V následujících letech byly zkoumány mnohé vlastnosti tohoto prostoročasu a metrika byla zobecněna pro případ rotujících černých děr a nenulové kosmologické konstanty. Přehled výsledků lze nalézt např. v pracích [51–54]; pro nedávné práce viz např. [55–57].

C -metrika patří do široké třídy tzv. *boost-rotačně symetrických řešení*, reprezentující asymptoticky ploché prostoročasy rovnoměrně urychlených zdrojů, která byla podrobně studována Bičákem a Schmidtem v [51]. Doposud však není známá analogie této třídy řešení pro případ nenulové kosmologické konstanty. Speciální případ C -metriky s $\Lambda \neq 0$ však znám je. Nabízí se tedy možnost, že by právě toto řešení mohlo být klíčem k nalezení obecné třídy asymptoticky (anti-)de sitteorovských prostoročasů rovnoměrně urychlených zdrojů. Toto byla jedna z motivací proč jsme v pracích [3, 5, 12] zkoumali vlastnosti právě C -metriky s $\Lambda \neq 0$.

Toto řešení bylo nalezeno v pracích [26–28] již v 70-tých letech. Až donedávna však nebyla provedena důkladná analýza jeho globálních vlastností. Pro případ $\Lambda > 0$ byla tato analýza provedena až v pracích [3, 58, 59] a pro případ $\Lambda < 0$ v [5, 12, 60, 61]. Různé degenerované a speciální případy byly diskutovány též v [62–65].

C -metrika s $\Lambda = 0$ a celá třída boost-rotačně symetrických řešení je zajímavá zejména proto, že se jedná o jediná explicitně známá řešení reprezentující zářivá gravitační pole netriviálně se pohybujících kompaktních zdrojů. Tyto prostoročasy hrály proto zásadní roli při zkoumání zářivých vlastností gravitačního pole. Je pro ně známa např. explicitní forma informační funkce gravitačního pole či Bondiho hmota [66–68]. Přehled výsledků týkajících se jejich zářivých vlastností je možné nalézt např. v [54, 69–71]. Povaha záření pro $\Lambda \neq 0$ není naproti tomu dobře uchopena dodnes a C -metrika s $\Lambda \neq 0$ je jeden z mála prostoročasů, kde můžeme zářivá pole v asymptoticky netriviálních prostoročasech explicitně zkoumat.

Třída boost-rotačně symetrických řešení je též populární v numerické relativitě, kde slouží jako testovací příklad pro funkčnost kódů numericky simulujících vývoj řešení Einsteinových rovnic; viz např. [72]. Velké využití našla C -metrika také v kvantové teorii kde se používá k analýze tvorby párů černých děr [73–76].

Motivováni důvody uvedenými výše jsme se v pracích [3, 5, 12] zabývali studiem globálních vlastností prostoročasů popsaných C -metrikou s $\Lambda \neq 0$ a diskuzí charakteru zde přítomného zářivého gravitačního a elektromagnetického pole. Výsledky týkající se globální struktury nyní krátce shrneme, diskusi vlastností záření ponecháme do příští kapitoly.

Ač se předkládané původní práce zabývají případem $\Lambda \neq 0$, pro úplnost a pro srovnání zmíníme i případ $\Lambda = 0$. Poznatky týkající této situace nejsou původní, nicméně níže prezentované třídídimenzionální diagramy zobrazující urychlené černé díry v asymptoticky plochém prostoru jsou nové. Stejně tak všechny interaktivní diagramy a animace v digitální příloze jsou původní a prvně publikované v této práci.

Urychlené černé díry v Minkowského prostoročase

Řešení Einsteinových-Maxwellových rovnic nazývané C -metrika má tvar [23]:

$$\mathbf{g} = \omega^{-2} \left(-\mathcal{F} \mathbf{d}\tau^2 + \frac{1}{\mathcal{F}} \mathbf{d}v^2 + \frac{1}{\mathcal{G}} \mathbf{d}\xi^2 + \mathcal{G} \mathbf{d}\varphi^2 \right), \quad (1.13)$$

$$\mathbf{F} = e \mathbf{d}v \wedge \mathbf{d}\tau, \quad (1.14)$$

kde metrické funkce \mathcal{F} a \mathcal{G} jsou polynomy čtvrtého stupně v v a ξ

$$\begin{aligned} -\mathcal{F} &= 1 - v^2 + 2mA v^3 - e^2 A^2 v^4, \\ \mathcal{G} &= 1 - \xi^2 + 2MA \xi^3 - e^2 A^2 \xi^4, \\ \omega &= A(v - \xi). \end{aligned} \quad (1.15)$$

(Odlišné, i když ekvivalentní tvary lze nalézt např. v [26, 55, 57].) Za jistých dodatečných předpokladů a při vhodném výběru definičního oboru souřadnic tato metrika reprezentuje dvě urychlené nabitě černé díry pohybující se v asymptoticky plochem prostoročase. Parametry m, e, A charakterizují hmotnost, náboj a zrychlení černých děr. Vedle toho ještě máme parametr C charakterizující kónicitu osy symetrie, vstupující do definice prostoročasu skrze definiční interval souřadnice φ : $\varphi \in (-C\pi, C\pi)$. Aby metrika popisovala nabitě černé díry, musí mít funkce \mathcal{F} a \mathcal{G} čtyři kořeny¹² (pro nenabitý případ $e = 0$ kořeny tři) a musí být splněno $m, A, C > 0$ a $m^2 > e^2$. Souřadnice τ probíhá celé \mathbb{R} , souřadnice ξ musí ležet v intervalu kolem nuly, na kterém je \mathcal{G} kladné, a souřadnice v musí být z intervalu $v \in (-\xi, \infty)$.

Souřadnice τ, v, ξ, φ nepokrývají celý prostoročas hladce. Jak bude vidět níže, je potřeba použít několik kopií těchto souřadnic k pokrytí celého prostoročasu. Definiční interval souřadnice v je potřeba rozdělit na čtyři části (tři v nenabitém případě) kořeny¹³ $v_i > v_o > v_a$ funkce \mathcal{F} . V prostoročasu těmto kořenům odpovídají tzv. *horizonty*. Mezi horizonty a mimo osu symetrie jsou souřadnice τ, v, ξ, φ hladké.

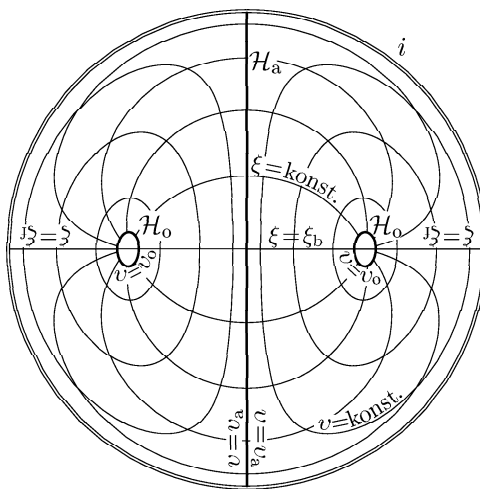
Význam souřadnic je následující: τ hraje roli časové souřadnice kolem černých děr, má však povahu rindlerovského času – vlastního času rovnoměrně urychlených pozorovatelů v Minkowského prostoročasu: na horizontech mění svojí povahu a stává se prostorovou souřadnicí. φ je úhlová souřadnice kolem osy symetrie. Obě tyto souřadnice odpovídají symetriím prostoročasu – geometrie se při posunu v jejich směru nemění. Prostoročas má tak dva Killingovy vektory ∂_τ a ∂_φ .

Souřadnice v a ξ vně černých děr (oblast $v \in (v_a, v_o)$) mají povahu bipolárních souřadnic. v je ‘radiální’ souřadnice běžící od jedné díry k druhé a ξ je úhlová souřadnice měřící zhruba ‘kosinus úhlu’ od osy symetrie měřeno z pohledu jedné či druhé černé díry, viz obr. 1.10. Hranice definičního intervalu (ξ_b, ξ_f) souřadnice ξ odpovídají ose symetrie: $\xi = \xi_b$ je osa spojující obě černé díry a $\xi = \xi_f$ jsou části osy vedoucí z děr do nekonečna.

K tomu, abychom získali lepší představu o struktuře prostoročasu a jejich kauzálních aspektech, je potřeba zavést globální souřadnice. Standardním způsobem (viz [23, 34] nebo analogický postup v dodatku v [3]) lze nahradit souřadnice

¹²Poznamenejme, že $-\mathcal{F}$ a \mathcal{G} jsou stejné polynomy pouze odlišné proměnné.

¹³Čtvrtý (záporný) kořen je na hranici definičního oboru v .



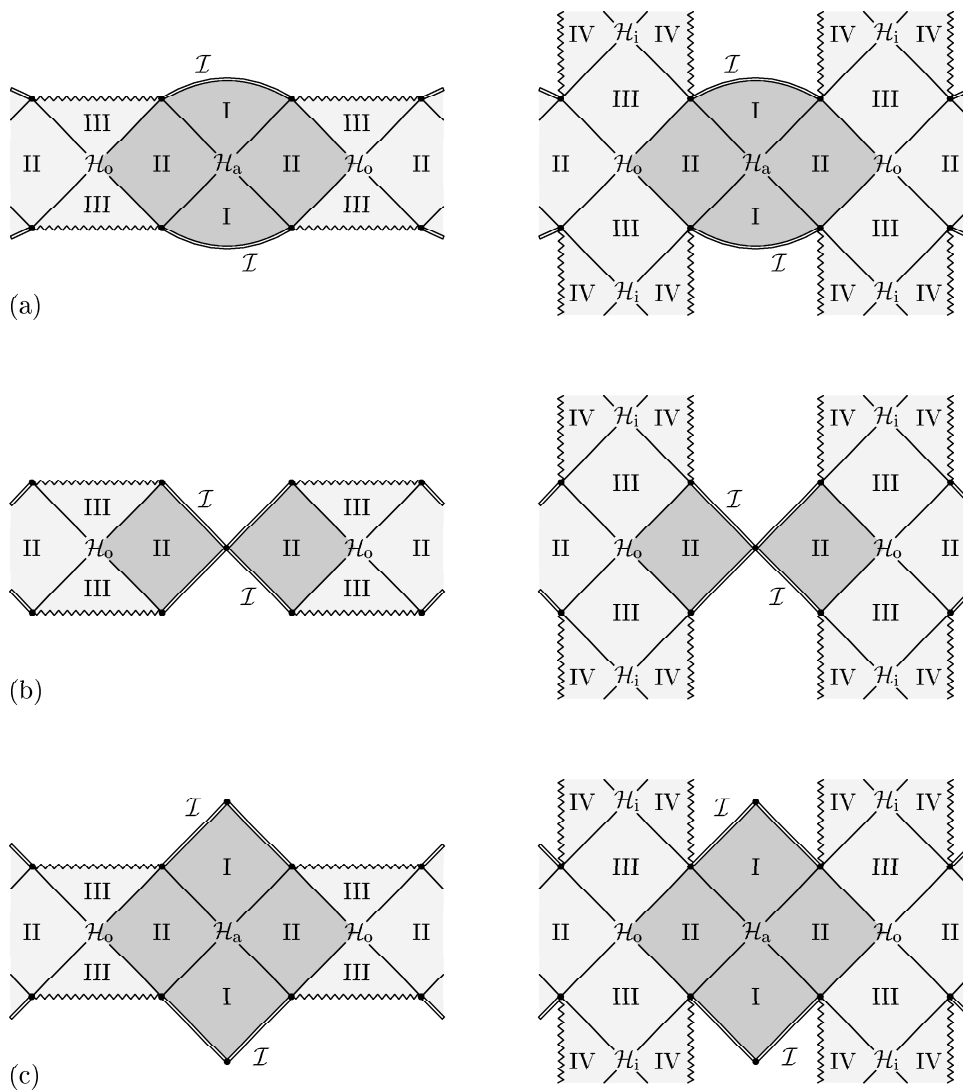
Obrázek 1.10: **Prostorový řez prostoročasem dvou urychlených černých děr.** Diagram znázorňuje souřadnice v, ξ v prostorovém řezu $\tau, \varphi = \text{konst.}$ skrze vnější oblasti černých děr prostoročasu C -metriky s $\Lambda = 0$. Souřadnice mají bipolární charakter – souřadnicové plochy $v = \text{konst.}$ se nabalují kolem dvou ‘center’ tvořených vnějšími horizonty černých děr \mathcal{H}_0 ($v = v_0$), čáry měnící se v běží od jedné díry k druhé. Diagram zahrnuje dvě souřadnicové mapy, které jsou od sebe odděleny akceleračním horizontem \mathcal{H}_a ($v = v_a$). Souřadnice ξ parametrizuje ‘úhel’ odklonu od osy z z hlediska jedné či druhé černé díry. Dvojitá hraniční čára odpovídá prostorovému nekonečnu i .

τ, v nulovými souřadnicemi u, v , které pokrývají prostoročas i přes horizonty. Typický konformní diagram ‘radiálního’ řezu $\xi, \varphi = \text{konst.}$ je na obr. 1.11a. Souřadnice u, v v něm běží v diagonálních směrech a jejich souřadnicové čáry odpovídají trajektoriím světelných paprsků – určují tedy kauzální strukturu prostoročasu.

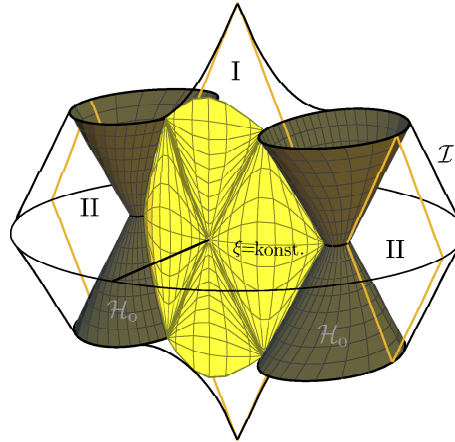
Diagram se rozpadá do bloků označených I, II, III, IV, které jsou odděleny horizonty $\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_a$ ($v = v_i, v_0, v_a$). Vnitřek černých/bílých děr má podobnou strukturu jakou jsme diskutovali v podkapitole 1.3, na obrázku odpovídá oblastem III (a v nabitém případě též IV). Singularita je opět vyznačena zubatou čarou a horizonty \mathcal{H}_0 a \mathcal{H}_i odpovídají vnějšímu a vnitřnímu horizontu černých děr.

Vnější oblasti I a II jsou méně intuitivní – očekávali bychom, že vně děr bude mít prostoročas strukturu asymptoticky plochého prostoročasu s diagramem podobným obr. 1.3 či 1.8. Na obr. 1.11a však má konformní nekonečno (vyznačené dvojitou čarou) zdánlivě prosturopolodobný charakter. Příčina neintuitivní podoby diagramu spočívá v tom, že řez $\xi, \varphi = \text{konst.}$ neběží od černé díry do nekonečna (myšleno v prostorovém směru, tj. v nadploše $\tau = \text{konst.}$), ale je napnut mezi dírami, viz obr. 1.10.

Jediná hodnota ξ , pro kterou tento řez běží z díry přímo do nekonečna, je vnější část osy symetrie $\xi = \xi_f$. Vskutku, konformní diagram odpovídající tomuto řezu má jiný charakter, jak je vidět z obr. 1.11b. Vidíme, že se rozpadl na dvě části odpovídající vnějším osám jdoucím z jedné a z druhé díry. Každá z těchto částí již je analogická diagramům 1.8 pro statickou černou díru. Zobrazuje vnější oblast II, vnitřek díry III, resp. IV (pro nabitě díry), a skrze každou z děr Einsteinův-Rosenův most do další asymptoticky ploché oblasti typu II.



Obrázek 1.11: **Konformní diagramy prostoročasu C -metriky s $\Lambda = 0$.** Diagramy nalevo reprezentují prostoročas nenabitě C -metriky, diagramy napravo prostoročas nabitě C -metriky. Diagramy znázorňují řez $\xi, \varphi = \text{konst.}$ (a) pro obecnou hodnotu ξ , (b) pro $\xi = \xi_f$ odpovídající ose jdoucí od díry do nekonečna a (c) hodnotě $\xi = \xi_b$ odpovídající ose mezi dírami. Oblasti I, II leží vně děr, oblasti III a IV uvnitř a mají strukturu obdobnou struktuře statických děr, viz obr. 1.8. Konformní nekonečno je vyznačeno dvojitou čarou, singularity zubatou čarou a horizonty diagonálními liniemi mezi jednotlivými oblastmi. Různý charakter diagramů (a)–(c) souvisí se způsobem, jak jsou řezy $\xi = \text{konst.}$ vnášeny do prostoročasu – viz diskuzi v textu a obr. 1.12.



Obrázek 1.12: Urychlené černé díry v asymptoticky plochem prostoročase. Tento diagram ‘slepuje’ dvoudimenzionální diagramy z obr. 1.11. Zobrazena je pouze jedna vnější část černých děr (v obr. 1.11 vyznačena tmavě). Obalová plocha reprezentuje konformní nekonečno, tmavé kónické plochy vnější horizont černých děr. Žlutá plocha odpovídá typickému řezu $\xi = \text{konst.}$, tj. diagramu 1.11a. Speciální řezy 1.11b a 1.11c odpovídají vertikální rovině skrze díry.

Druhý speciální případ je osa mezi dírami $\xi = \xi_b$. Konformní diagram je na obr. 1.11c. Zde vidíme, že obě díry jsou odděleny oblastmi II a I. Oblasti II odpovídají bezprostřednímu okolí černých děr. V těchto oblastech hraje souřadnice τ roli času pozorovatelů, kteří zůstávají v konstantní vzdálenosti od děr. Obě díry jsou však od sebe kauzálně odděleny *akceleračním horizontem* \mathcal{H}_a – nulovou plochou oddělující oblasti II od oblastí I. Žádný pozorovatel z jedné oblasti II nemůže kauzálním způsobem přeletět přes tento horizont do druhé oblasti II. Oblasti I pak zahrnují prostoročas od akceleračního horizontu do konformního nekonečna a vidíme, že na ose spojující obě díry má nekonečno \mathcal{I} očividně nulový charakter – tyto části konformního diagramu se vskutku podobají diagramu Minkowského prostoročasu 1.3.

Zbývá vysvětlit konformní diagram 1.11a pro obecnou hodnotu ξ . Nejnázorněji to lze provést nakreslením třídimenzionálního diagramu potlačujícího pouze souřadnici φ . V obr. 1.12 je znázorněno, jakým způsobem je dvoudimenzionální diagram $\xi = \text{konst.}$ vnořen do diagramu třídimenzionálního. Tento diagram zobrazuje pouze vnějšek černých děr, konkrétně oblasti I a II zvýrazněné v diagramech 1.11. Dvě tmavé plochy v třídimenzionálním diagramu znázorňují vnější horizonty černých/bílých děr. Vnější hranice celého diagramu odpovídá konformnímu nekonečnu. Žlutá plocha pak odpovídá řezu $\xi = \text{konst.}$, tj. řezu dvoudimenzionálního diagramu z obr. 1.11a. Vidíme, že zdánlivě prostorupodobný charakter konformního nekonečna v diagramu 1.11a má původ v tom, že se jedná o průsečík konformního nekonečna nulové povahy s časupodobným řezem $\xi = \text{konst.}$.

Nakonec ještě proberme, proč mluvíme o *rovnoměrně urychlených* černých dírách. Pro bodovou testovací částici pohybující se v prostoročase je jednoduché definovat její čtyřzrychlení – v podstatě je dáno druhou derivací trajektorie z hlediska lokálně inerciálních pozorovatelů. Pro gravitující objekt jako je černá

díra to již tak jednoduché není. Gravitační působení totiž zakřivuje prostoročas a určuje, co to jsou lokálně inerciální pozorovatelé. Pohybující černé díry strhávají lokální inerciální systémy s sebou a nedá se tedy očekávat, že bychom vůči těmto systémům naměřili černým dírám zrychlení.

O zrychlení přesto mluvíme z několika důvodů. Boostová struktura Killin-gova vektoru ∂_τ je typická pro analogický Killingův vektor spojený s rovno-měrně urychlenými pozorovateli v Minkowském prostoročase. Limita C -metriky pro zanedbatelné hmotnosti černých děr změni černé díry právě na takové rovno-měrně urychlené pozorovatele. Nadto geometrie horizontu děr není u C -metriky čistě sférická, horizont je zdeformován ve směru pohybu (podél osy φ symetrie). A v neposlední řadě, prostoročas C -metriky není čistě (elektro-)vakuový – obsa-huje objekty, lokalizované na ose symetrie, které jsou příčinou pohybu černých děr. Geometrie C -metriky není totiž regulární na ose, obsahuje zde tzv. *kónickou singularitu* (podobnou singularitě povrchu kužele v jeho vrcholu). Taková singu-larita standardně popisuje lineární hmotný objekt zvaný *kosmická struna* [77]. Tato struna obecně vede podél celé osy, tj. z nekonečna do obou černých děr a je též stlačená mezi nimi. Volbou parametru kónicity C lze měnit napětí jednot-livých částí této struny, ale vždy tak, že úhrnný účinek struny na díry odpovídá síle tlačící díry od sebe do nekonečna. Vhodnou volbou C lze eliminovat strunu mezi dírami (díry jsou pak taženy strunami z nekonečna) nebo vně děr (díry jsou pak tlačeny stlačenou strunou mezi nimi). Nelze však zároveň eliminovat strunu na celé ose. (Existují ale zobecnění C -metriky, v nichž je struna nahrazena jiným ‘urychlujícím faktorem’ – např. dodatečným ‘homogenním’ elektrickým nebo gra-vitačním polem [78–80].)

Prezentace v digitální příloze

Kauzální struktura prostoročasu je zachycena také na obrázcích a animacích v digitální příloze. V tomto oddíle krátce popíšeme přístup k těmto materiálům. Obdobná ‘navigace’ platí i pro materiály týkající se prázdného Minkowského prostoročasu a černých děr v anti-de Sitterově vesmíru.

Z úvodní stránky týkající se C -metriky s $\Lambda = 0$ začneme volbou [**černé díry s horizontem kónického tvaru**]. Zobrazí se nám pohled na prostoročas ‘zvenčí’ (z pohledu pomocné konformní variety \mathcal{M}). Vidíme konformní nekonečno (tmavě modře), které je porušeno dvěma páry ‘otvorů’, které budou odpovídat černý dírám. Nekonečno má nulový charakter.

Volbou [**otevři nekonečno**] se lze podívat pod konformní nekonečno \mathcal{I} . Zob-razí se nám vnitřek prostoročasu s vyobrazeným akceleračním horizontem (světle modrý). Vidíme, že ten zcela ‘zabaluje’ oblast kolem černých děr a odděluje ji, s výjimkou čtyřech linií, od konformního nekonečna. Speciální linie, kde se ak-celerační horizont dotýká konformního nekonečna, odpovídají směru os symetrie běžících od děr do nekonečna. Obrázek si lze prohlédnout z různých stran po kliknutí na [**interaktivní pohled**]. Tlačítko [**zavři nekonečno**] nás naopak vrátí k předchozímu zobrazení.

Nejdříve se však podíváme pod akcelerační horizont kliknutím na [**otevři horizont**]. Poté konečně uvidíme vnější horizonty dvou černých/bílých děr, každý tvořený párem kónických ploch. Vyznačeny jsou taky průsečíky osy symetrie s ho-

rizonty a s nekonečnem. Tlačítkem [interaktivní pohled] si opět můžeme díry prohlédnout z různých stran, tlačítkem [zavři horizont] se vrátíme k předchozímu zobrazení.

Kliknutím na tlačítko [spust $\xi = \text{konst.}$] spustíme animaci vnoření dvou-dimenzionálních diagramů $\xi = \text{konst.}$ s měnícím se ξ . Napravo se nám zobrazí dvoudimenzionální diagram pro konkrétní ξ , nalevo jeho vnoření. Animaci zastavíme buď tlačítkem [zastav] nebo výběrem řezu [0] či [π]. V druhém případě si vnoření diagramů $\xi = \text{konst.}$ můžeme prohlédnout krok po kroku. Mezi jednotlivými hodnotami ξ se pohybujeme pomocí šipek. Zpět k zobrazení pouze horizontů děr se dostaneme pomocí tlačítka [vnější horizonty].

Pokud se přepneme do módu interaktivního pohledu, můžeme obrázkem otáčet pomocí myši, případně ho přibližovat a vzdalovat. Zpět se dostaneme pomocí volby [statický pohled].

Všechny diagramy si lze též prohlédnout v alternativní podobě po přepnutí pomocí [zmáčkni horizonty]. Tento alternativní pohled zdeformuje vnější horizont černých děr do 'kapkovitého' tvaru. Toto zobrazení je výhodnější při zkoumání limity zanedbatelných hmotností černých děr. V této limitě se prostoročas C -metriky redukuje na plochý Minkowského prostoročas a z černých děr zbydou pouze světočáry bodových částic. Evidentně, zobrazení pomocí kapkovitých horizontů přechází při smrsknutí horizontů v přímku na analogický diagram Minkowského prostoročasu (viz část prezentace týkající se prázdného Minkowského prostoročasu). Zpět k zobrazení pomocí kónických horizontů se dostaneme kliknutím na [roztáhni horizonty].

Urychlené černé díry v de Sitterově prostoročase

C -metrika řeší Einsteinovy-Maxwellovy rovnice s kladnou kosmologickou konstantou má stejný tvar (1.13) (a tenzor elektromagnetického pole je opět dán rovnicí (1.14)), liší se však metrické funkce \mathcal{F} , \mathcal{G} a ω :

$$\begin{aligned} -\mathcal{F} &= 1 - v^2 + \text{ch } \alpha_0 \frac{2m}{\ell} v^3 - \text{ch}^2 \alpha_0 \frac{e^2}{\ell^2} v^4, \\ \mathcal{G} &= 1 - \xi^2 + \text{sh } \alpha_0 \frac{2m}{\ell} \xi^3 - \text{sh}^2 \alpha_0 \frac{e^2}{\ell^2} \xi^4, \\ \omega &= \ell^{-1} (-v \cosh \alpha_0 + \xi \sinh \alpha_0), \end{aligned} \tag{1.16}$$

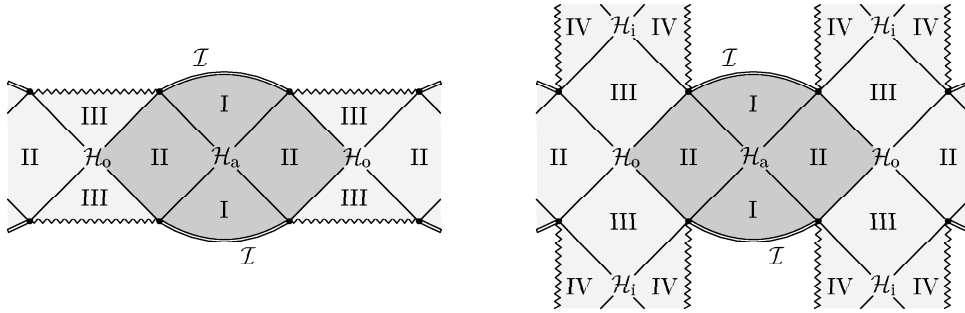
srovnaj s (1.15). Podrobná diskuse tohoto řešení je obsažena v příložené práci [3], zejména v kapitolách II, III a v dodatcích A–C. Níže shrneme pouze nejobecnější fakta.

Parametry m , e a C opět charakterizují hmotnost, náboj a kónicitu. Zrychlení A je tentokrát parametrizováno konstantou α_0 :

$$A = \ell^{-1} \sinh \alpha_0. \tag{1.17}$$

Kosmologická konstanta je skryta v délkové škále ℓ :

$$\ell = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}. \tag{1.18}$$



Obrázek 1.13: **Konformní diagramy prostoročasu urychlených černých děr s $\Lambda > 0$.** Konformní diagram řezu $\xi = \text{konst.}$ pro nenabitou (nalevo) a nabitou (napravo) C -metriku. Konformní nekonečno, singularity a horizonty jsou opět vyznačeny dvojitými, zubatými, respektive diagonálními čarami. Konformní nekonečno \mathcal{I} má prostorupodobný de sitterovský charakter. Diagram je centrován na urychlené černé díry, což má za důsledek, že pro různé hodnoty ξ bude nekonečno různě ‘prohnuté’.

Význam souřadnic τ, v, ξ, φ je obdobný případu $\Lambda = 0$ diskutovanému výše. Metrika opět popisuje dvě urychlené černé díry, tentokrát se však tyto díry pohybují v asymptoticky de Sitterově prostoročasu. Globální struktura je zachycena na dvoudimenzionálních diagramech na obr. 1.13. Jedná se o řezy $\xi, \varphi = \text{konst.}$ napnuté mezi černými dírami. Tentokrát mají diagramy pro všechny hodnoty ξ stejný charakter. Pro různá ξ se liší pouze různým ‘prohnutím’ konformního nekonečna (viz diskuse na str. 7 práce [3]). Prostorupodobný charakter nekonečna v dvoudimenzionálních diagramech odpovídá skutečnému charakteru konformního nekonečna.

Prostoročas vně děr (oblasti I a II) si můžeme představit jako de Sitterovskou třísféru, která se nejdříve smršťuje a později roztahuje (viz diskuzi de Sitterova vesmíru v podkapitole 1.2). Na počátku, v minulém nekonečnu \mathcal{I}^- , do ní však v antipodálních pólech vstoupí dvě bílé díry, které během vývoje přejdou na černé díry a v budoucím nekonečnu opět opustí prostoročas v antipodálních pólech. Černé díry však nejsou během svého vývoje lokalizovány na pólech, naopak udržují se v nesymetrické pozici – vágně řečeno, v ‘konstantní vzdálenosti’ od pólů. Vybavení intuicí o rovnoměrně urychlených pozorovatelích v de Sitterově prostoročase (podkapitola 1.2) řekneme, že se díry pohybují se zrychlením, které kompenzuje kosmologickou repulzi vesmíru a udržuje je v jejich nesymetrické pozici. Pouze v daleké minulosti a budoucnosti se odchylka děr od pólů stírá a proto jsme konstatovali, že díry vstupují a opouštějí prostoročas v antipodálních pólech. Použité souřadnice τ, v, ξ, φ jsou však ‘centrovány’ na obě díry. Při změně ξ (směru, ve kterém řez diagramu z děr vychází) se proto poloha děr nemění. Nesymetrická pozice děr se však projeví již zmíněnou změnou ‘prohnutí’ nekonečna.

Původcem zrychlení děr a jejich nesymetrické pozice je opět kosmická struna. Ta je napnutá na delší části osy symetrie, případně stlačená na její kratší části. (Tentokrát má osa pouze dvě části a obě dvě jsou napnuty mezi dírami. Struna

tedy nemůže ubíhat do prostorového nekonečna, jak tomu bylo v asymptoticky plochém prostoročase, protože žádné takové nekonečno v de Sitterově vesmíru není – prostoročas je vně děr prostorově uzavřený.)

Pokud položíme zrychlení rovno nule, působení struny z obou stran díry se vyrovná (případně struna zcela vymizí) a prostoročas popsaný C -metrikou se redukuje na prostoročas dvou statických černých děr v de Sitterově vesmíru umístěných v antipodálních pólech prostorového řezu.

Podkriticky urychlené díry v anti-de Sitterově prostoročase

Prostoročasy obsahující černé díry popsané C -metrikou s negativní kosmologickou konstantou se rozpadají do tří typů podle velikosti zrychlení děr. Pro podkritické zrychlení $A < 1/\ell$ prostoročas reprezentuje jednu urychlenou černou díru, pro kritické zrychlení $A = 1/\ell$ sekvenci urychlených černých děr vstupujících a opouštějících jednotlivě asymptoticky anti-de Sitterův vesmír, a konečně pro nadkritické zrychlení $A > 1/\ell$ popisuje sekvenci párů urychlených černých děr. Podkritický a nadkritický případ byl analyzován v pracích [5, 12], obdobná diskuse kritického případu se připravuje.

Pro $\Lambda < 0$ a $A < 1/\ell$, kde tentokrát

$$\ell = \sqrt{-\frac{3}{\Lambda}}, \quad (1.19)$$

lze C -metriku zapsat opět ve formě (1.13) s metrickými funkcemi \mathcal{F} , \mathcal{G} , ω danými [12]:

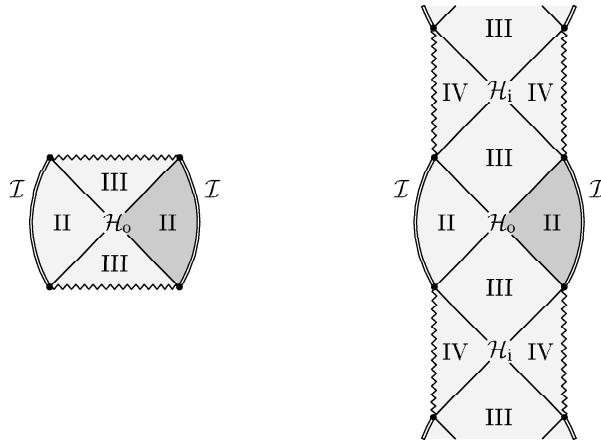
$$\begin{aligned} -\mathcal{F} &= -1 - v^2 + 2 \frac{m}{\ell} \cos \chi_o v^3 - \frac{e^2}{\ell^2} \cos^2 \chi_o v^4, \\ \mathcal{G} &= 1 - \xi^2 + 2 \frac{m}{\ell} \sin \chi_o \xi^3 - \frac{e^2}{\ell^2} \sin^2 \chi_o \xi^4, \\ \omega &= \ell^{-1} (v \cos \chi_o - \xi \sin \chi_o). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Zrychlení A je parametrizováno konstantou χ_o :

$$A = \frac{1}{\ell} \sin \chi_o. \quad (1.21)$$

Význam ostatních parametrů zůstává stejný. Funkce \mathcal{F} má však jen dva kořeny (dva kořeny v nabitěm případě a pouze jeden kořen pro $e = 0$). Ty odpovídají vnějšímu a vnitřnímu horizontu díry. Akcelerační horizont v tomto případě neexistuje.

Struktura prostoročasu se nejvíce podobá struktuře jedné statické černé díry v asymptoticky plochém vesmíru s tím rozdílem, že konformní nekonečno má časupodobný charakter. Vskutku, pokud porovnáme konformní diagramy řezů $\xi = \text{konst.}$ na obr. 1.14 s diagramy 1.8, vidíme odlišnost pouze v tvaru konformního nekonečna. Pro nulové zrychlení, $\chi_o = 0$, je tato analogie přesná – jedná se o statickou sféricky symetrickou černou díru v anti-de Sitterově vesmíru. Pro nenulové zrychlení však není černá díra v prostoročase umístěna symetricky. Na ose je struna, která drží černou díru v nesymetrické pozici. Mluvíme proto opět



Obrázek 1.14: **Konformní diagram podkriticky urychlené černé díry v anti-de Sitterově vesmíru.** Nalevo je znázorněn nenabitý, napravo nabitý případ. Diagram zobrazuje řez $\xi, \varphi = \text{konst.}$. Značení je stejné jako v obrázcích obr. 1.11 a 1.13. Diagram je centrován na urychlenou černou díru, která je vůči anti-de sitterovskému nekonečnu situována nesymetricky. To se projeví různým ‘prohnutím’ konformního nekonečna pro různé hodnoty ξ – srovnej s třídimenzionálním diagramem 1.15.

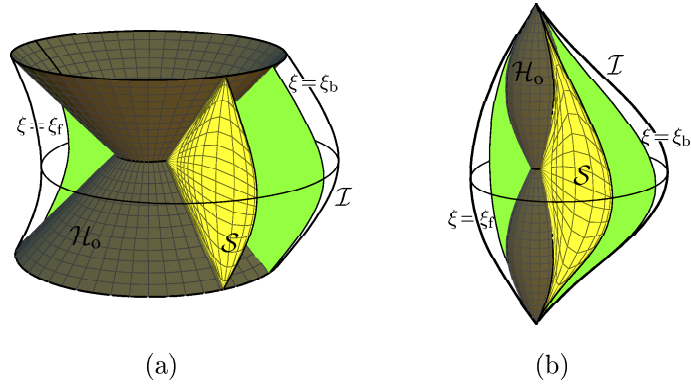
o urychlené černé díře, přičemž její zrychlení kompenzuje kosmologickou atrakci a udržuje tak díru *statickou*.

Tato skutečnost je poměrně překvapivá. Speciálně je zvláštní, že prostoročas je statický *všude* vně děr. V případě $\Lambda \geq 0$ jsme vně urychlených děr měli také statický Killingův vektor, ten však na akceleračním horizontu měnil svoji povahu na prostoropodobný vektor. To je považováno za známku toho, že pole je dynamické, že se jedná o pole, u kterého lze očekávat zářivou složku. U podkriticky urychlené černé díry v anti-de Sitterově vesmíru však žádný akcelerační horizont nenajdeme a prostoročas vně díry je statický všude. Dynamická povaha urychleného zdroje je zde kompenzovaná kosmologickou atrakcí vesmíru. Je na místě se tedy ptát, zda je pole této díry zářivé. Odpověď je nejasná, protože prozatím neexistuje ucelená teorie gravitačního záření v prostoročasech s časopodobným konformním nekonečnem. K této otázce se ještě vrátíme v příští kapitole.

Lepší intuici pro globální kauzální strukturu nám dá třídimenzionální diagram zkoumaného prostoročasu vyobrazený na obr. 1.15a. Zde je zobrazena jedna oblast II vně černé díry (prostoročas má opět více vnějších oblastí propojených – i když ne vždy kauzálně – skrze černou díru). Upozorníme, že stejně jako v případě $\Lambda > 0$ používáme souřadnice centrované na díru. Proto horizont díry v obr. 1.15 má symetrický tvar, kdežto konformní nekonečno je deformováno. To je projev nesymetrické polohy díry způsobené jejím zrychlením. Kdybychom přizpůsobili obrázek asymptotickým pozorovatelům (nakreslili bychom konformní nekonečno symetricky), deformovaná by byla naopak černá díra.¹⁴

Alternativně můžeme prostoročas zobrazit s černoděrovým horizontem zdeformovaným do kapkovitého tvaru. Tato podoba je opět vhodná pro zkoumání

¹⁴Viz též analogickou diskuzi s diagramy týkající se podkriticky urychlených bodových zdrojů v kapitole V.A práce [12].



Obrázek 1.15: **Podkriticky urychlená černá díra v anti-de Sitterově vesmíru.** Diagram zobrazuje oblast okolo černé díry odpovídající tmavě vyznačené oblasti II v obr. 1.14. Obalová plocha reprezentuje konformní nekonečno, tmavá plocha vnější horizont díry. Konformní nekonečno je nesymetrické, jelikož diagram využívá souřadnic centrovaných na urychlenou černou díru. Horizont je znázorněn (a) jako kónická plocha, což odpovídá jeho kauzálnímu charakteru – jedná se o nulovou plochu generovanou světelnými paprsky, nebo (b) zdeformován jako kapkovitá plocha – což je výhodnější při zkoumání limity malé hmotnosti, kdy černá díra přejde na bodovou částici.

limity slabých polí, kdy černá díra přechází na světočáru bodové částice. Vskutku, diagram 1.15b přejde na konformní diagram prázdného anti-de Sitterova vesmíru (srovnej s obr. 13b z práce [12]) získaný kompaktifikací pomocí časově proměnného konformního fakturu (viz diskuze z podkapitoly 1.2).

Třídídimenzionální podobu prostoročasu si lze prohlédnout také v digitální příloze. Ovládání je obdobné případu popsanému výše. Pouze se zde vzhledem k absenci akceleračního horizontu nevyskytují příslušné ovládací prvky.

Detailně je diskutovaný prostoročas popsán v kapitole III práce [12], případně v kapitole II.A práce [5].

Nadkriticky urychlené díry v anti-de Sitterově prostoročase

Pro nadkritické zrychlení $A > 1/\ell$ je metrika při $\Lambda < 0$ dána formou (1.13) s metrickými funkcemi

$$\begin{aligned} -\mathcal{F} &= 1 - v^2 + 2 \frac{m}{\ell} \operatorname{sh} \alpha_0 v^3 - \frac{e^2}{\ell^2} \operatorname{sh}^2 \alpha_0 v^4, \\ \mathcal{G} &= 1 - \xi^2 + 2 \frac{m}{\ell} \operatorname{ch} \alpha_0 \xi^3 - \frac{e^2}{\ell^2} \operatorname{ch}^2 \alpha_0 \xi^4, \\ \omega &= \ell^{-1} (v \operatorname{sh} \alpha_0 - \xi \operatorname{ch} \alpha_0), \end{aligned} \tag{1.22}$$

se zrychlením A daným

$$A = \frac{1}{\ell} \cosh \alpha_0. \tag{1.23}$$

Význam ostatních parametrů zůstává stejný. Souřadnice mají význam obdobný případu páru urychlených černých děr v Minkowského prostoročasu. Definiční

intervaly souřadnic, podmínky kladené na parametry a podrobná diskuse vlastností prostoročasu jsou obsaženy v příložených pracích [5] (kapitola II.B) a [12] (kapitola IV).

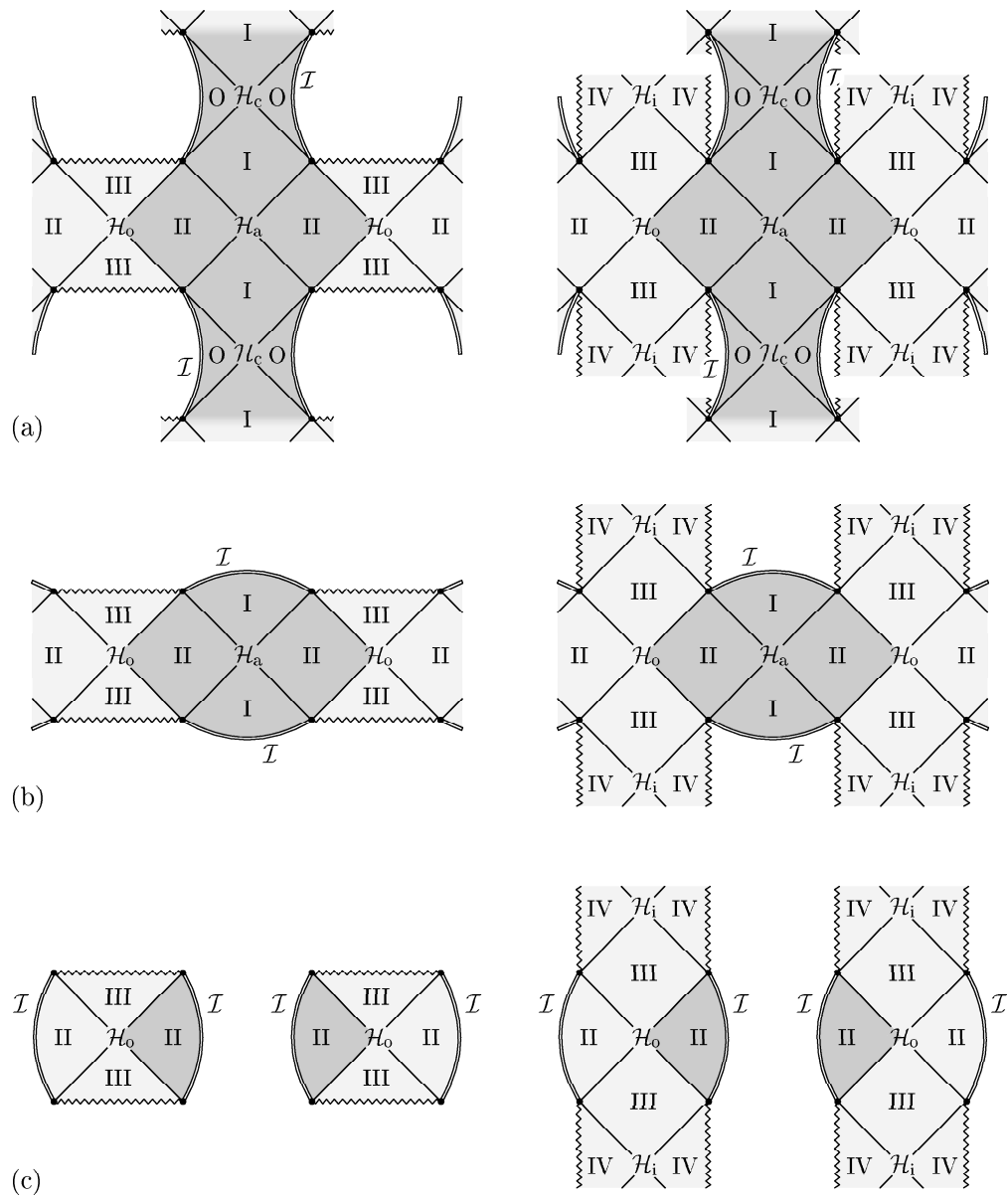
Globální struktura prostoročasu je v tomto případě složitější, jak napovídá rozmanitost a komplexita konformních diagramů na obr. 1.16. Lepší intuici je možné získat z třídídimenzionálního diagramu 1.17a. Vidíme zde asymptoticky anti-de Sitterův prostoročas, do jehož časupodobného nekonečna vstupují a později z něho vystupují páry černých děr. V oblasti kolem jednoho páru černých děr se prostoročas podobá obdobné situaci v Minkowského prostoru – díry začínají a končí v konformním nekonečnu a jsou od sebe odděleny akceleračním horizontem (v obrázku vyobrazený modře). Nyní však má nekonečno časupodobnou povahu. Navíc, oblast I nad akceleračním horizontem není uzavřena konformním nekonečnem, nýbrž prostoročas zde pokračuje k tzv. *kosmologickému horizontu*.¹⁵ Jím se dostaneme do oblastí O velice podobným prázdnému anti-de Sitterovu vesmíru bez černých děr. Po této ‘čistě kosmologické’ fázi proletíme opět kosmologickým horizontem do oblasti I, kde do prostoročasu vstoupí další pár černých děr. Obdobným způsobem se situace opakuje znovu a znovu.

V tomto případě je velice názorné připojit i zobrazení s černoděrovými horizonty deformovanými do kapkovitého tvaru (obr. 1.17b). Konformní nekonečno se zde více podobá mírně ‘pomačkanému’ nekonečnu prázdného anti-de Sitterova vesmíru – viz obr. 13a práce [12]. ‘Pomačkání’ souvisí opět s tím, že užíváme souřadnice centrované na dírách. Deformace nekonečna tak indikuje urychlený pohyb děr vzhledem k nekonečnu.¹⁶

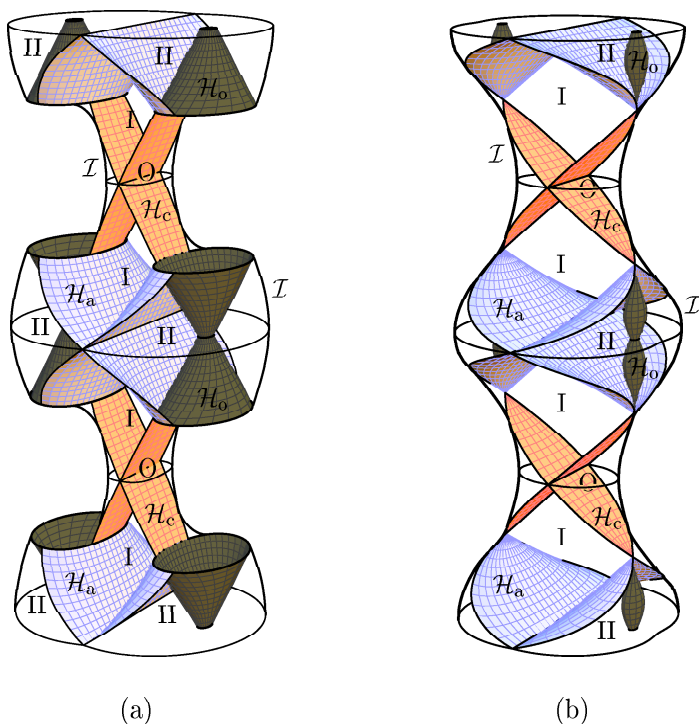
Vnoření různých dvoudídimenzionálních diagramů z obr. 1.16, jejichž podoba i kvalitativně závisí na konkrétních hodnotách souřadnice ξ , je podrobně diskutována v kapitole IV práce [12] – viz zejména obrázky 8–10, případně také obr. 4–6 v práci [5]. Všechny tyto diagramy jsou také zpracované v digitální příloze způsobem obdobným předchozím případům.

¹⁵V tomto případě se uplatňují všechny kořeny metrické funkce \mathcal{F} .

¹⁶Viz též související diskuzi týkající se souřadnic urychlených pozorovatelů v anti-de Sitterově vesmíru v kapitole V.B práce [12].



Obrázek 1.16: **Konformní diagramy nadkriticky urychlených děr v anti-de Sitterově vesmíru.** Diagramy nalevo odpovídají nenabitému, diagramy napravo nabitému případu. Značení je stejné jako v obrázcích 1.11, 1.13. Diagramy zobrazují řez $\xi, \varphi = \text{konst.}$. Příklad (a) odpovídá řezu v blízkosti osy spojující díry, případ (c) řezu v blízkosti os jdoucích z děr do nekonečna. Vnoření jednotlivých řezů do třídimenzionálního diagramu je zobrazeno v práci [12].



Obrázek 1.17: **Nadkriticky urychlené černé díry v anti-de Sitterově vesmíru.** V diagramu je znázorněna pouze vnější oblast černých děr. Tmavé plochy reprezentují horizont černých děr, obalová plocha konformní nekonečno. Prostorčas v jedné fázi neobsahuje žádné černé díry, ty do něho vstupují v páru časupodobným nekonečnem, pohybují se zpomaleně k sobě až se zastaví a poté odletí od sebe zpět do nekonečna, kde prostorčas opustí. Následuje opět fáze bez černých děr, po které vstoupí do prostorochasu další pár děr. Zobrazení (a) se snaží respektovat kauzální charakter horizontu černých děr a zobrazuje ho jako kónickou plochu připomínající světelný kužel. Diagram (b) deformuje horizont do kapkovité plochy. Toto vyobrazení je výhodnější při zkoumání limity malé hmoty, kdy černé díry přejdou na světočáry rovnoměrně urychlených částic s nadkritickým zrychlením – srovnej s obr. 1.7 napravo.

Kapitola 2

Asymptotické směrová struktura polí

Shrnutí

Jedním ze stále otevřených problémů v obecné teorii relativity je otázka definice záření v asymptoticky netriviálních prostoročasech. Ač tomuto tématu bylo věnováno rozsáhlé úsilí – od pionýrských prací Penrose [32, 81] zavádějících pojem konformního nekonečna, přes dnes již klasické monografie [29, 30, 44] pokrývající znalosti o globálních vlastnostech, koncept asymptotické jednoduchosti či tzv. peeling teorém, až po nedávné výsledky [82–86] o existenci velké třídy asymptoticky de sitterovských a anti-de sitterovských prostoročasů (viz též přehledy [17, 83, 87]) – není doposud vytvořen ucelený obraz kvalitativně i kvantitativně charakterizující záření v blízkosti prostorupodobného a časupodobného nekonečna.

Jednou ze standardních technik ke zkoumání zářivých polí v asymptoticky plochých prostoročasech je zkoumání zářivé komponenty pole z hlediska pozorovatele vzdalujícího se do nekonečna podél nulové geodetiky. V sérii prací [2–8] jsme analyzovali chování této komponenty v případě prostorupodobného a časupodobného nekonečna. V první práci bylo diskutováno testovací elektromagnetické pole v de Sitterově vesmíru, v následujících dvou pracích pole rovnoměrně urychlených černých děr v prostoročasech jak s $\Lambda > 0$, tak $\Lambda < 0$. Tyto výsledky byly následně zobecněny pro obecné pole spinu s v libovolných prostoročasech s lokálně (anti-)de sitterovským nekonečnem. Výsledky byly souhrnně publikovány ve zvaném ‘topical review’ v časopise *Classical and Quantum Gravity* [7].

Tato kapitola obsahuje uvedení do kontextu teorie záření v obecné teorii relativity a nastiňuje některé postupy a předkládá hlavní výsledky zmíněných původních prací. Pro podrobný výklad odkazují čtenáře hlavně na souhrnnou práci [7].

Publikace

Původní výsledky týkající se tématu této kapitoly jsou obsaženy v následujících pracích:

- [7] Pavel Krtouš, Jiří Podolský: *Asymptotic directional structure of radiative fields in spacetimes with a cosmological constant*, Class. Quantum Grav. **21**, R233 (2004).
- [8] Pavel Krtouš, Jiří Podolský: *Asymptotic directional structure of radiation for fields of algebraic type D*, Czech. J. Phys. **55**, 119 (2005).
- [4] Pavel Krtouš, Jiří Podolský, Jiří Bičák: *Gravitational and electromagnetic fields near a de Sitter-like infinity*, Phys. Rev. Lett. **91**, 061101 (2003).
- [6] Pavel Krtouš, Jiří Podolský: *Gravitational and electromagnetic fields near an anti-de Sitter-like infinity*, Phys. Rev. D **69**, 084023 (2004).
- [3] Pavel Krtouš, Jiří Podolský: *Radiation from accelerated black holes in a de Sitter universe*, Phys. Rev. D **68**, 024005 (2003).
- [5] Jiří Podolský, Marcello Ortaggio, Pavel Krtouš: *Radiation from accelerated black holes in an anti-de Sitter universe*, Phys. Rev. D **68**, 124004 (2004).
- [2] Jiří Bičák, Pavel Krtouš: *The fields of uniformly accelerated charges in de Sitter spacetime*, Phys. Rev. Lett. **88**, 211101 (2002).

Plné znění těchto publikací lze nalézt v druhé části habilitační práce.

2.1 Záření v obecné teorii relativity

Otázka záření a vlastností zářivých polí v obecné teorii relativity je jedním z klíčových problémů matematické relativity, který lze vystopovat až k počátkům této teorie [88, 89]. Jelikož je obecná teorie relativity vysoce nelineární a svou povahou geometrická teorie, metody používané v běžných lineárních teoriích (jako např. multipólový rozvoj) mají v tomto případě svá omezení. Gravitační záření od fyzikálních zdrojů (např. binárních systémů) totiž odpovídá deformaci prostoročasu, jistým ‘vlnkám’ v jeho struktuře, přičemž tato deformace sama ovlivňuje geometrii s jejíž pomocí identifikujeme vzdálené oblasti. Nelinearita Einsteinových rovnic s sebou navíc nese nemožnost lokalizace gravitační energie, což komplikuje analýzu gravitačního záření a určení např. bilanční rovnice pro ztrátu energie zdroje.

Obtížnost Einsteinových rovnic také omezuje ‘sortiment’ řešení popisujících gravitační pole dostatečně složitých zdrojů, řešení, která mají zářivý charakter. Přesto bylo od padesátých let minulého století nalezeno několik významných příkladů zářivých prostoročasů. S C -metrikou, zástupcem nejdůležitější třídy takovýchto prostoročasů, třídy boost-rotace symetrických prostoročasů [51, 90], jsme se setkali v minulé kapitole. Ač tyto prostoročasy nepopisují nejtýpější astrofyzikální situace, jejich studiem bylo získáno mnoho poznatků týkajících se gravitačního záření – viz např. přehledy [69, 70, 91–94].

Vedle hledání a zkoumání přesných řešení bylo velké úsilí věnováno také zkoumání asymptotického chování gravitačního pole. Přelomové práce, vyjasňující povahu gravitačního záření v situacích, kdy se prostoročas daleko od zdrojů podobá prázdnému Minkowského vesmíru, přicházejí v šedesátých letech [95–99]. V těchto pracích se podařilo definovat tzv. *Bondiho hmotu* charakterizující celkovou hmotnost systému z hlediska (budoucího konformního) nekonečna a charakterizovat radiační tok odcházející do nekonečna pomocí tzv. *informační funkce* (analogie Poyntingova vektoru pro zářivé elektromagnetické pole). Pro tyto veličiny byla ukázána platnost bilanční rovnice.

Tyto práce byly zastřešeny Penrosem [32, 33, 81, 100], který zformuloval geometrický přístup k popisu vzdálených oblastí – metodu konformního nekonečna, kterou jsme krátce nastínili v části 1.1 předchozí kapitoly. V rámci této formulace bylo možné přesně specifikovat třídu asymptoticky plochých prostoročasů, definovat Bondiho hmotu geometrickým způsobem a dokázat tzv. ‘*peeling*’ *teorém* [32, 97, 101–103] (viz příští podkapitulu).

Zářivá část gravitačního pole se v tomto přístupu charakterizuje jistou komponentou Weylova tenzoru spočtenou vzhledem k tzv. *interpreteční tetradě* – bázi vektorů paralelně přenášených podél nulové geodetiky do konformního nekonečna. Podobným způsobem je možné charakterizovat zářivou komponentu i elektromagnetického pole, případně pole obecného spinu s . Peeling teorém mimo jiné říká, že tato zářivá komponenta má lokálně charakter podobný rovinné vlně.

Penroseův přístup má navíc velkou výhodu, že ho lze alespoň částečně zobecnit i pro prostoročasy, které mají jinou asymptotiku, konkrétně, pro prostoročasy s nenulovou kosmologickou konstantou [29, 32, 81, 86]. Jak jsem již konstatovali v první kapitole, znaménko kosmologické konstanty koreluje s charakterem konformního nekonečna. Pro nenulovou kosmologickou konstantu tak prostoročas

nemůže být asymptoticky plochý, nýbrž bude mít buď prostorupodobné či časupodobné nekonečno. V takovýchto prostoročasech až doposud neumíme zavést veličiny analogické Bondiho hmotě či informační funkci [104, 105]. V Penrosově formalismu alespoň umíme charakterizovat asymptotiku gravitačního pole a definovat zářivou komponentu Weylova tenzoru.

Již Penrose si ale všiml [81, 106], že v případě prostorupodobného či časupodobného konformního nekonečna je zářivá komponenta pole definovaná “méně invariantně” než v případě asymptoticky plochého prostoročasu – závisí totiž na směru, jakým se k nekonečnu přibližujeme.

Toto konstatování zůstalo dlouhou dobu nepovšimnuto a neanalyzováno. Až mnohem později jsme si v práci [2] (v práci analyzující pole rovnoměrně urychlených nábojů v de Sitterově prostoročase) této vlastnosti zářivé složky (zde elektromagnetického pole) povšimli a detailně ji analyzovali. V následných pracích [3, 5] jsme tuto analýzu zobecnili na zajímavější případ gravitačního pole urychlených černých děr v asymptoticky de Sitterově a anti-de Sitterově vesmíru, kde jsme našli explicitní směrovou závislost zářivé komponenty jak gravitačního, tak elektromagnetického pole.

Tyto konkrétní směrové závislosti se však ukázaly jako projev mnohem obecnější souvislosti, kterou jsme zformulovali v pracích [4, 6]: asymptotická směrová závislost zářivé komponenty gravitačního pole v blízkosti prostorupodobného a časupodobného nekonečna je zcela determinována algebraickou strukturou Weylova tenzoru v nekonečnu. Penrosem zmíněná nejednoznačnost tak není zcela bezbřehá, nýbrž jasně určitelná pomocí tzv. hlavních nulových směrů pole a jistých normalizačních koeficientů. Tyto výsledky byly shrnuty (a navíc zobecněny na případ obecného pole spinu s) v „topical review” [7]. V práci [8] pak byly rozebrány některé důsledky pro speciální algebraické typy prostoročasů. V příští kapitole se také zmíníme o zobecnění této problematiky do vyšších dimenzí.

Hlavním cílem série publikací zmíněných v předchozích dvou odstavcích (které jsou též součástí této habilitace) bylo alespoň částečně přispět k porozumění charakteru záření v blízkosti prostorupodobného a časupodobného nekonečna. Přestože se na tomto poli podařilo poslední dobou získat mnoho poznatků v různých směrech, stále nemáme úplný a uspokojivý vhled do tohoto fenoménu. Nadále nejsou k dispozici jasně interpretovatelné globální veličiny, charakterizující tok ‘gravitační energie’ či nalezena bilanční rovnice. Naše analýza alespoň částečně upřesňuje povahu zářivé komponenty, která se v případě asymptoticky plochých prostoročasů ukázala jako velmi užitečný nástroj. Podobná použití v případě nulové kosmologické konstanty však zatím zůstává otevřené.

2.2 Použitý formalismus¹

Jak do nekonečna?

V předchozí kapitole, v podkapitole 1.1, jsme popsali, jakým způsobem lze uchopt pojem nekonečna. Po konformním přeškálování lze fyzikální prostoročas vnést do pomocné variety, z hlediska které se nekonečno chová jako standardní

¹ V textu této podkapitoly byly použity části práce [20].

nadplocha ohraničující fyzikální prostoročas. Jeho charakter – prostorupodobný, časupodobný či nulový koreluje se znaménkem kosmologické konstanty.

V takovémto pohledu na nekonečno můžeme mluvit o jednotlivých bodech nekonečna a o směrech, ze kterých se k těmto bodům blížíme. Konkrétně nás budou zajímat limity podél nulových geodetik.

Nulové geodetiky – trajektorie nejrychlejšího možného signálu – se mohou do konformního nekonečna přibližovat z minulosti (potom mluvíme o budoucím konformním nekonečnu a o *odcházejících* geodetikách), nebo z něho mohou vycházet směrem do budoucnosti (mluvíme pak o minulém konformním nekonečnu a o *vcházejících* geodetikách). Nekonečno prostorupodobného či nulového charakteru (tj. s normálou časové či nulové povahy) je vždy buď minulé nebo budoucí. Nekonečno časupodobné povahy (s prostorovou normálou) je zároveň minulé i budoucí – viz obr. 1.2.

Nulové geodetiky jsou parametrizované afinním parametrem, který nahrazuje pojem vlastního času či vlastní vzdálenosti podél nich. Pro různé geodetiky mířící do stejného bodu v nekonečnu budeme normalizovat afinní parametr stejným způsobem, a to s pomocí normály k nekonečnu – viz kapitolu 3.3 práce [7].

Zářivá komponenta pole je definována vzhledem k ‘pozorovateli’ pohybujícímu se podél nulové geodetiky. Konkrétně vzhledem k *interpretační bázi vektorů* paralelně přenášených podél geodetiky.

Tetrády

Při práci s vektory a tenzory v křivém prostoročasu je výhodné tyto objekty reprezentovat jejich složkami vzhledem ke speciálním bázím. Na metrických varietách se typicky používají ortonormální báze vektorů \mathbf{t} , \mathbf{q} , \mathbf{r} , \mathbf{s} , v prostoročasech dimenze čtyři nazývané též *ortonormální tetrády*. Na varietách s lorentzovskou signaturou lze vedle toho s výhodou využít tzv. *nulové tetrády* \mathbf{k} , \mathbf{l} , \mathbf{m} , $\bar{\mathbf{m}}$, ve kterých je časový vektor \mathbf{t} a prostorový vektor \mathbf{q} nahrazen dvojicí nulových reálných vektorů \mathbf{k} , \mathbf{l} , a zbývající dva prostorové vektory dvěma komplexními vektory \mathbf{m} , $\bar{\mathbf{m}}$ nulové velikosti – viz např. (3.1) v práci [7].

V konformním nekonečnu \mathcal{I} je výhodné volit tetrády ‘uzpůsobené charakteru’ nekonečna. Řekneme, že ortonormální (a s ní asociovaná nulová) tetráda je *přízůsobená* prostorupodobnému či časupodobnému nekonečnu, pokud normála \mathbf{n} k nekonečnu patří do této tetrády. Pro nekonečno nulové povahy požadujeme, aby normála patřila do nulové tetrády. Tetrády splňující tuto podmínku jsou výhodné při popisu jevů blízko nekonečna. S jejich pomocí se jednoduše provádí např. restrikce na nekonečno či parametrizování nulových směrů v nekonečnu.

Typicky se jedna taková tetráda volí jako *referenční* – její nulovou verzi označíme \mathbf{k}_0 , \mathbf{l}_0 , \mathbf{m}_0 , $\bar{\mathbf{m}}_0$. Vůči ní se pak parametrizují další fyzikálně zajímavé tetrády. V konkrétních případech může být tato referenční tetráda volena s přihlédnutím ke speciálním geometrickým vlastnostem prostoročasu – pro nás však konkrétní způsob volby není důležitý. Vektor \mathbf{k}_0 budeme vždy volit orientovaný do budoucnosti. Vzhledem k fyzikálnímu prostoročasu však může být orientován jak směrem ven, tak směrem dovnitř.

Vzhledem k referenční tetrádě budeme parametrizovat i směr \mathbf{k} , ze kterého se k nekonečnu přibližují nulové geodetiky. Obecně můžeme zavést komplexní

parametr R určující směr \mathbf{k} rovnicí

$$\mathbf{k} \propto \mathbf{k}_0 + \bar{R} \mathbf{m}_0 + R \bar{\mathbf{m}}_0 + R\bar{R} \mathbf{l}_0. \quad (2.1)$$

Pro prostorupodobné nekonečno, které má charakter třídídimenzionálního riemannovského prostoru, se ke zvolenému bodu v nekonečnu můžeme přiblížit nulovou geodetikou ze všech prostorových stran – nulové směry tedy odpovídají vektorům jednotkové sféry okolo daného bodu. Tyto směry můžeme charakterizovat sférickými úhly θ, ϕ nebo komplexním parametrem (2.1) souvisejícím s úhly vztahem $R = \tan(\theta/2) \exp(-i\phi)$ (viz kapitolu 5.3 v [7]).

V případě časupodobného nekonečna, tvoří \mathcal{I} třídídimenzionální lorentzovskou varietu (tj. s indukovanou metrikou signatury $-++$), kterou si můžeme představit jako historii dvoudídimenzionální plochy ohraničující náš prostor.² K danému bodu v nekonečnu se tak můžeme přiblížit pouze z jedné hemisféry. Stejně tak jedné hemisféře odpovídají všechny nulové směry, které do prostoročasu vcházejí. Tyto směry můžeme parametrizovat opět sférickými úhly nebo alternativně rapiditou ψ a úhlem ϕ projekce nulového směru na nekonečno, viz kapitolu 5.3 v [7]. V každém případě musíme také specifikovat, zda se jedná o směr z prostoročasu vycházející ($\epsilon = +1$) nebo do prostoročasu vcházející ($\epsilon = -1$). Tyto (pseudo)úhly lze nahradit komplexním parametrem (2.1) vztahem $R = \tanh^\epsilon \frac{\psi}{2} \exp(-i\phi)$.

Jak jsme již řekli, naším cílem je zkoumat pole z hlediska *interpretační tetrády*. Interpretační tetráda $\mathbf{k}_i, \mathbf{l}_i, \mathbf{m}_i, \bar{\mathbf{m}}_i$ je tetráda, která je paralelně přenášena podél nulové geodetiky vedoucí do konformního nekonečna, přičemž vektor \mathbf{k}_i musí mířit ve směru geodetiky a být vhodně normalizován.

Taková tetráda je podél dané geodetiky dána až na konstantní lorentzovskou transformaci zachovávající vektor \mathbf{k}_i . Jak je ukázáno v kapitole 3.4 práce [7], při přenášení do nekonečna tato tetráda degeneruje – vektor \mathbf{k}_i se vzhledem k referenční tetrádě zvolené v nekonečnu nekonečně zkracuje a vektor \mathbf{l}_i nekonečně prodlužuje. Tato degenerace hraje klíčovou roli při odvození peelingu polních komponent spočtených vzhledem k interpretační tetrádě.

Komponenty gravitačního pole a hlavní nulové směry

‘Intenzitu’ gravitačního pole (jeho ‘neodtransformovatelnou’ složku – např. velikost slapových sil) lze charakterizovat pomocí Riemannova tenzoru křivosti. Ten se rozkládá na část popsanou Einsteinovým tenzorem přímo spojenou s rozložením hmoty a na část popsanou Weylovým tenzorem spojovanou s ‘volným’ gravitačním polem, tj. s gravitačními vlnami šířícími se prostorem. Jelikož nás zajímá zejména gravitační záření, zaměříme se na část popsanou Weylovým tenzorem. Tento tenzor lze vzhledem k nulové tetrádě $\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}, \bar{\mathbf{m}}$ charakterizovat pomocí pěti komplexních komponent označovaných Ψ_j – viz standardní reference [91] či kapitolu 4.1 práce [7], konkrétně rovnice (4.1).

Weylův tenzor lze dále algebraicky charakterizovat pomocí zobecněných vlastních vektorů, nazývaných *hlavní nulové směry* (HNUSy). Směr daný vektorem \mathbf{k}

²Samozřejmě ve smyslu konformní geometrie – ve fyzikální geometrii je tato ‘hranice’ nekonečně daleko.

je HNuS, je-li vzhledem k nulové tetradě³ \mathbf{k} , \mathbf{l} , \mathbf{m} , $\bar{\mathbf{m}}$ komponenta Ψ_0 nulová. Pokud parametrizujeme směr \mathbf{k} pomocí komplexního parametru R (rovnice (2.1)), podmínka na HNuS vede na rovnici

$$R^4 \Psi_4^0 + 4R^3 \Psi_3^0 + 6R^2 \Psi_2^0 + 4R \Psi_1^0 + \Psi_0^0 = 0 . \quad (2.2)$$

Zde Ψ_j^0 jsou komponenty pole vzhledem k referenční tetradě \mathbf{k}_0 , \mathbf{l}_0 , \mathbf{m}_0 , $\bar{\mathbf{m}}_0$. Jedná se o rovnici čtvrtého stupně, která má obecně čtyři komplexní kořeny R_1, R_2, R_3, R_4 parametrizující čtyři HNuSy $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4$. Poznamenejme, že koeficienty Ψ_j^0 , $j = 0, 1, 2, 3$ mohou být zpětně vyjádřeny pomocí kořenů R_1, R_2, R_3, R_4 a zbývající komponenty Ψ_4^0 normalizující ‘velikost’ pole.

HNuSy určují tzv. *algebraickou* strukturu Weylova tenzoru. Říkáme, že algebraická struktura je degenerovaná, pokud některé z HNuSů koincidují. Podle počtu koincidujících HNuSů rozlišujeme následující Petrovovy algebraické typy [91, 107]: N (všechny 4 HNuSy jsou shodné), III (tři HNuSy koincidují), II (právě dva HNuSy koincidují), D (dva a dva HNuSy koincidují), I (obecný algebraický typ s různými HNuSy) a konečně typ 0 pro nulový Weylův tenzor.

Zkušenost z asymptoticky plochých prostoročasů ukazuje, že zářivá pole jsou typicky typu N (např. gravitační *pp*-vlny – analogie rovinných vln v obecné teorii relativity). Vedle toho ‘peeling’ teorem říká, že z hlediska interpretační tetrady přenášené podél nulové geodetiky do nekonečna se polní komponenty postupně ‘odlupují’ podle algebraických typů: část pole klesající s převrácenou afinní vzdáleností η^{-1} má strukturu pole typu N, část úměrná η^{-2} má strukturu pole III, komponenta řádu η^{-3} odpovídá strukturou dvěma koincidujícím HNuSům a konečně komponenta $\sim \eta^{-4}$ odpovídá obecnému typu I. Jinými slovy: komponenty Ψ_j^i Weylova tenzoru vzhledem k interpretační tetradě mají následující asymptotické chování

$$\Psi_j^i \sim \eta^{j-5} . \quad (2.3)$$

2.3 Asymptotická směrová charakteristika záření

Zářivá komponenta pole

Vzhledem k právě zmíněnému chování budeme složku pole Ψ_4^i v interpretační tetradě – klesající podél nulové geodetiky jako $1/\eta$ – nazývat *zářivou částí pole*. Tato složka nejenže klesá nejpomaleji, ale má též algebraicky degenerovanou strukturu N očekávanou u zářivých polí. V dalším nás bude zajímat chování této komponenty v závislosti na tom, jakým způsobem se nulová geodetika blíží k nekonečnu, přičemž nekonečno připustíme obecné povahy – prostorupodobné, nulové či časupodobné. Připomeňme, že v podkapitole 1.1 jsme tento charakter parametrizovali znaménkem kvadrátu normály $\sigma = -1, 0, +1$.

Obecné analýzy ukazují [29, 32, 86, 87, 105, 108], že komponenty gravitačního pole Ψ_j^0 vzhledem k *referenční* tetradě mají v blízkosti konformního nekonečna

³Tetráda musí splňovat normalizační podmínky nulové tetrady, jinak mohou být vektory \mathbf{l} , \mathbf{m} , $\bar{\mathbf{m}}$ doplněny k vektoru \mathbf{k} libovolně.

následující chování:

$$\Psi_j^o \approx \frac{\Psi_{j*}^o}{\eta^3}, \quad \Psi_{j*}^o = \text{konst.} \quad (2.4)$$

Upozorníme znovu, že se jedná o chování vůči *referenční* tetradě.⁴ Jak jsme se však zmínili, interpretační tetráda asymptoticky vůči referenční tetradě degeneruje. Proto bude chování komponent vůči interpretační tetradě odlišné. Podrobná analýza provedená v příložené práci [7] vede k následující závislosti zářivé komponenty Ψ_4^i :

$$\Psi_4^i \approx \frac{\Psi_{4*}^o}{\eta} \frac{(1 - \sigma R_1 \bar{R})(1 - \sigma R_2 \bar{R})(1 - \sigma R_3 \bar{R})(1 - \sigma R_4 \bar{R})}{(1 - \sigma R \bar{R})^2}. \quad (2.5)$$

Tato formule plně charakterizuje *asymptotickou směrovou strukturu zářivé komponenty gravitačního pole* – vystihuje její závislost na konstantách Ψ_{4*}^o , R_1 , R_2 , R_3 , R_4 charakterizujících pole a jeho HNuSy, na charakteru konformního nekonečna $\sigma = -1, 0, +1$, na afinním parametru η , a hlavně na konkrétním *směru nulové geodetiky*, podél které se do nekonečna blížíme. Tento směr je ve výrazu (2.5) určen komplexním parametrem R ve smyslu rovnice (2.1).

Přesněji řečeno, fyzikální význam má pouze velikost komplexní komponenty Ψ_4^i . Její fáze závisí na konkrétní volbě interpretační tetrády. Velikost $|\Psi_4^i|$ již na volbě interpretační tetrády (podél dané geodetiky) nezávisí. Dává tak invariantní charakteristiku zářivé složky pole.

Záření poblíž nulového nekonečna

Nejjednodušší situace nastává pro konformní nekonečno \mathcal{I} nulové povahy, tedy když $\Lambda = 0$. V tomto případě obecná směrová charakteristika (2.5) degeneruje:

$$|\Psi_4^i| \approx \frac{|\Psi_{4*}^o|}{|\eta|}. \quad (2.6)$$

Vidíme, že závislost na směrovém parametru R zcela vypadla a zářivá složka pole tak nezávisí na směru, jakým se blížíme do nekonečna. V tomto případě je asymptotické chování pole popsáno dostatečně ‘peeling’ teorémem a o směrové struktuře nemá smysl mluvit.

Záření poblíž prostorupodobného nekonečna

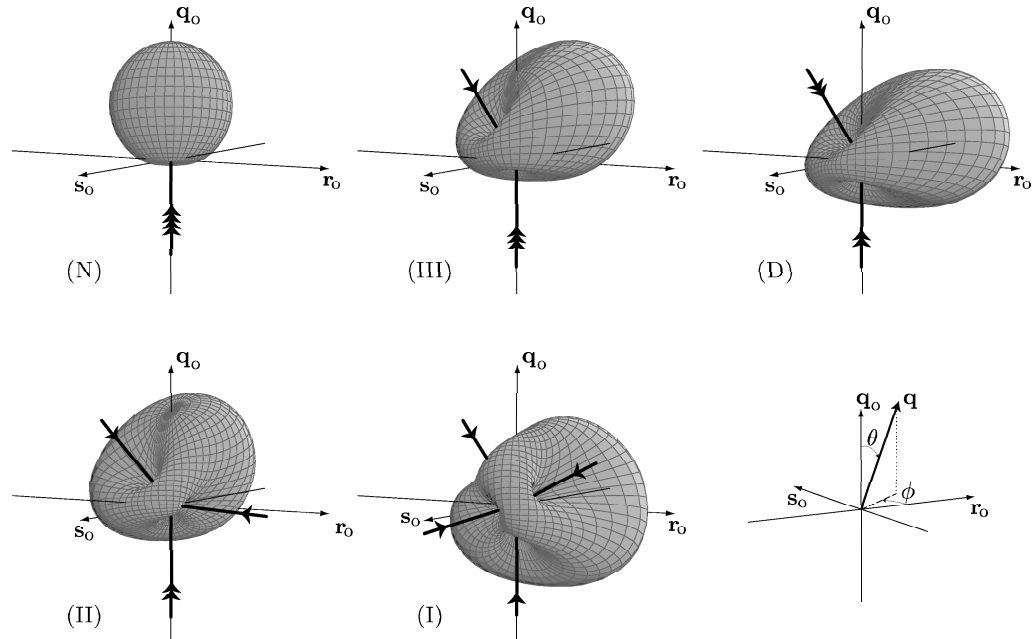
V případě prostorupodobného nekonečna ($\Lambda > 0$) je již situace zajímavější. Obecnou směrovou charakteristiku (2.5) lze přepsat do tvaru

$$\Psi_4^i \approx \frac{\Psi_{4*}^o}{\eta} (1 + |R|^2)^{-2} \left(1 - \frac{R_1}{R_a}\right) \left(1 - \frac{R_2}{R_a}\right) \left(1 - \frac{R_3}{R_a}\right) \left(1 - \frac{R_4}{R_a}\right), \quad (2.7)$$

kde $R_a = -1/\bar{R}$ určuje směr *prostorově opačný* ke směru geodetiky. Pomocí úhlových proměnných θ , ϕ dostáváme

$$|\Psi_4^i| \approx \frac{|\Psi_{4*}^o|}{|\eta|} \cos^4 \frac{\theta}{2} \prod_{n=1,2,3,4} \left|1 + \tan \frac{\theta_n}{2} \tan \frac{\theta}{2} e^{i(\phi - \phi_n)}\right|. \quad (2.8)$$

⁴Přesněji: referenční tetradě rozšířené hladce do okolí \mathcal{I} .



Obrázek 2.1: **Asymptotická směrová struktura záření v prostoročasech s $\Lambda > 0$.** Vybrazeny jsou konkrétní směrové charakteristiky v prostoročasech různých algebraických typů N, III, D, II a I. Pro každý z možných typů je vykreslena zářivá složka $|\Psi_4^i|$ měřená podél nulové geodetiky. Směry v diagramech odpovídají prostorovým směrům nulových geodetik v nekonečnu. [Degenerované] hlavní nulové směry (HNUSy) jsou vyznačeny [násobnými] šipkami. Tlusté čáry reprezentují prostorové směry (opačně k HNUŠum), podél kterých záření vymizí.

Úhly θ , ϕ popisují směr nulové geodetiky, podél které se blížíme k nekonečnu, úhly θ_n , ϕ_n charakterizují HNUSy gravitačního pole.

Z tvaru (2.7) okamžitě vidíme, že zářivá složka vymizí pro směry splňující $R_a = R_n$, $n = 1, 2, 3, 4$, tj. pro směry prostorově opačné k HNUŠum gravitačního pole. Kvalitativně je tedy směrová charakteristika záření v blízkosti prostorového nekonečna daná HNUSy pole. Pro jednotlivé algebraické typy gravitačního pole proto dostáváme kvalitativně různé zářivé charakteristiky s různým počtem směrů, v nichž záření vymizí – viz obr. 2.1.

Poznamenejme, že v blízkosti budoucího nekonečna \mathcal{I}^+ popisuje směrová charakteristika strukturu záření podél geodetik odcházejících z prostoročasu, v blízkosti minulého nekonečna \mathcal{I}^- směrovou strukturu záření podél vycházejících geodetik.

Záření poblíž časupodobného nekonečna

V případě časupodobného nekonečna ($\Lambda < 0$) je směrová struktura záření ještě o něco bohatší. Obecný vztah (2.5) můžeme přepsat do tvaru

$$\Psi_4^i \approx \frac{\Psi_{4*}^o}{\eta} (1 - |R|^2)^{-2} \left(1 - \frac{R_1}{R_m}\right) \left(1 - \frac{R_2}{R_m}\right) \left(1 - \frac{R_3}{R_m}\right) \left(1 - \frac{R_4}{R_m}\right). \quad (2.9)$$

typ	degenerace HNuSů	různé možnosti orientace HNuSů
N	4	o^4 t^4 i^4
III	3 + 1	o^3o o^3t o^3i t^3o t^3t i^3i i^3t i^3o t^3i
D	2 + 2	o^2o^2 o^2t^2 o^2i^2 t^2t^2 i^2i^2 i^2t^2
II	2 + 1 + 1	o^2oo o^2ot o^2oi o^2ii o^2it o^2tt t^2oo t^2ot t^2oi t^2tt i^2ii i^2it i^2io i^2oo i^2ot i^2tt t^2ii t^2it
I	1 + 1 + 1 + 1	$oooo$ $ooot$ $oooi$ $ooit$ $oott$ $ottt$ $ooii$ $oitt$ $tttt$ $iiii$ $iiit$ $iiio$ $iiot$ $iitt$ $ittt$

Tabulka 2.1: **Klasifikace směrové struktury záření v blízkosti časupodobného \mathcal{I} .** Tabulka zahrnuje všech 51 kvalitativně odlišných směrových struktur gravitačního záření. Pro daný algebraický typ, určený degenerací HNuSů, závisí konkrétní směrová struktura na orientaci těchto HNuSů vůči \mathcal{I} . Odcházející, tečné a vcházející HNuSy označujeme symboly o , t , a i . Jejich degenerace je popsána příslušnou mocninou. Možnosti uvedené ve třetím řádku každého algebraického typu lze získat z prvního řádku pomocí duality mezi odcházejícími a vcházejícími směry, neboli záměnou o za i .

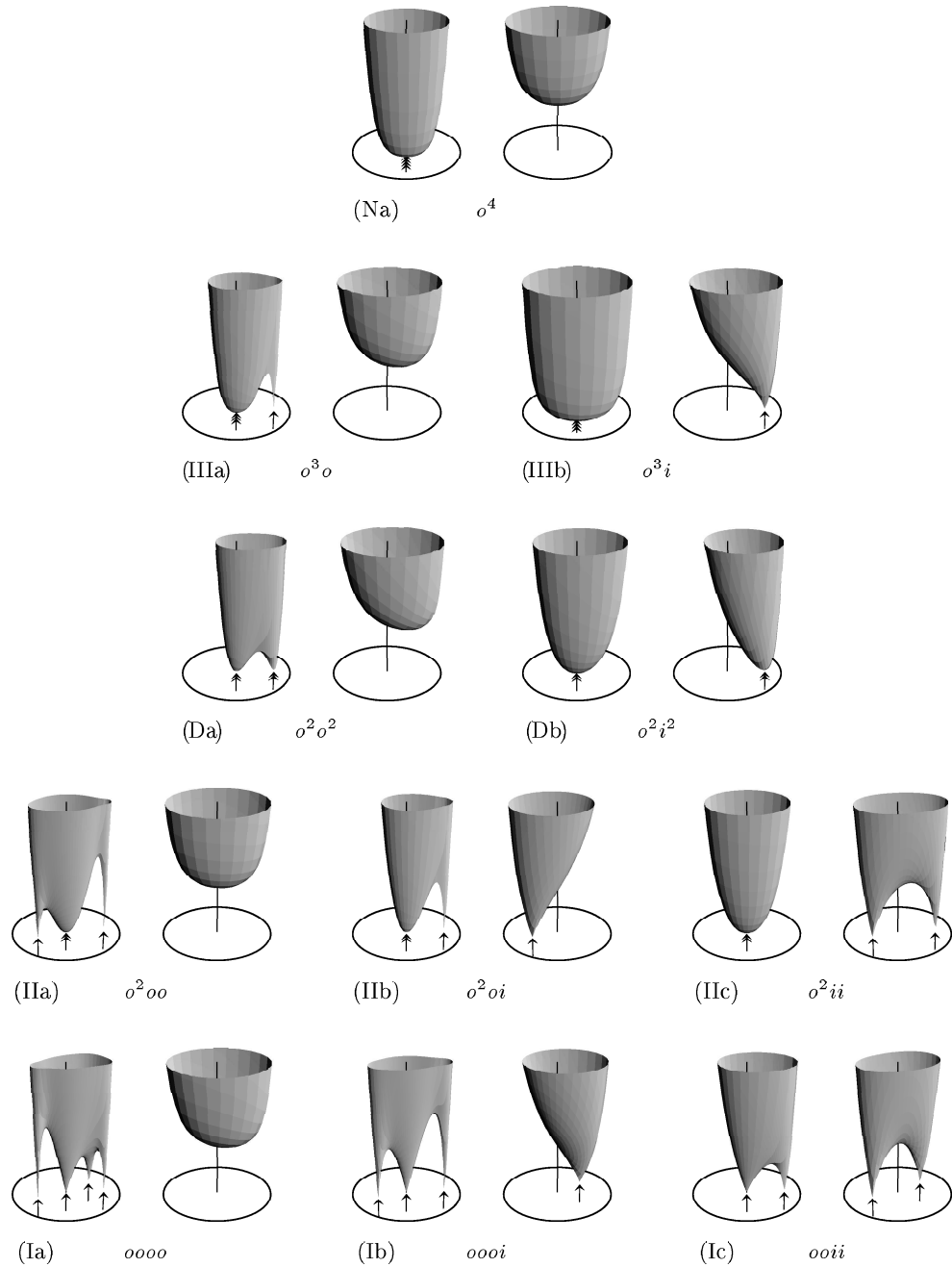
Zde komplexní parametr $R_m = 1/\bar{R}$ charakterizuje nulový směr *zrcadlově převrácený* ke směru geodetiky podle konformního nekonečna \mathcal{I} . Pomocí pseudosférických úhlů ψ , ϕ můžeme (2.5) psát:

$$|\Psi_4^i| \approx \frac{|\Psi_{4*}^o|}{|\eta|} \left(\frac{\cosh \psi + \epsilon \epsilon_o}{2} \right)^2 \prod_{n=1,2,3,4} \left| 1 - \tanh^{\epsilon_n \epsilon_o} \left(\frac{\psi_n}{2} \right) \tanh^{\epsilon \epsilon_o} \left(\frac{\psi}{2} \right) e^{i(\phi - \phi_n)} \right|. \quad (2.10)$$

Parametry ψ , ϕ , ϵ udávají směr geodetiky, parametry ψ_n , ϕ_n , ϵ_n HNuSy gravitačního pole a ϵ_o charakterizuje orientaci vektoru \mathbf{k}_o referenční tetřády.

K danému bodu časupodobného nekonečna se lze přiblížit jak podél odcházející geodetiky tak podél vcházející geodetiky. Dostáváme tak dvě různé směrové charakteristiky, jednu pro $|R| < 1$, druhou pro $|R| > 1$. Pro $|R| = 1$ výraz (2.9) degeneruje, což je dáno použitou normalizací afinního parametru geodetik (viz diskuzi v kapitole 3.3 práce [7]). Směry s $|R| = 1$ jsou však tečné k nekonečnu a neodpovídají tak směrům fyzikálních geodetik.

Z výrazu (2.9) můžeme opět odečíst směry, podél kterých záření vymizí, totiž $R_m = R_n$, $n = 1, 2, 3, 4$. Jedná se o směry zrcadlově převrácené podle \mathcal{I} k HNuSům pole. Kvalitativní tvar zářivé charakteristiky závisí opět na algebraickém typu gravitačního pole (na počtu degenerovaných HNuSů), vedle toho je však také



Obrázek 2.2: Asymptotická směrová struktura zářivé komponenty pole pro $\Lambda < 0$. V obrázku je zobrazeno všech 11 kvalitativně odlišných typů, kdy HNuSy nejsou tečné k nekonečnu (tedy typy z tabulky 2.1 neobsahující ‘ t ’; zbývajících 9 typů se dostane zrcadlením přes \mathcal{I} , tj. záměnou ‘ i ’ a ‘ o ’ směrů). Každý diagram se skládá z charakteristiky pro vcházející (nalevo) a vycházející (napravo) geodetiky. Na vertikální ose se vynášší $|\Psi_4|$, body kruhu v horizontální rovině parametrizují nulové směry v nekonečnu – jedná se o projekce hemisfér prostorových směrů nulových geodetik. Zrcadlové obrazy [degenerovaných] HNuSů jsou vyznačeny [několikanásobnými] šipkami pod kruhy. Pod každým diagramem je vyznačen Petrovův typ (N, III, D, II, I) odpovídající degeneraci HNuSů a kód z tabulky 2.1 charakterizující jejich orientaci.

dán orientací HNuSů vzhledem ke konformnímu nekonečnu. Podle toho, zda jednotlivé HNuSy z prostoročasu odcházejí nebo do něj vcházejí, dostáváme směry nulového záření pro vcházející geodetiky nebo odcházející geodetiky. HNuSům tečným ke konformnímu nekonečnu pak neodpovídá žádný fyzikální směr s nulovým zářením. V závislosti na algebraickém typu pole a orientaci HNuSů můžeme dohromady rozlišit 51 kvalitativně odlišných směrových struktur záření shrnutých v tabulce 2.1. Jejich grafické zobrazení pro případ, kdy HNuSy nejsou tečné k \mathcal{I} je na obr. 2.2.

Příklad – urychlené černé díry

V pracích [3, 5] jsme aplikovali obecnou teorii směrové závislosti záření na konkrétní prostoročasy rovnoměrně urychlených černých děr v asymptoticky de Sitterově a anti-de Sitterově vesmíru, které byly diskutovány v předchozí kapitole. Tyto prostoročasy jsou algebraického typu D – mají dva dvojnásobně degenerované HNuSy. Tyto HNuSy leží právě v řezu $\xi, \varphi = \text{konst.}$, tj. v řezu dvoudimenzionálních konformních diagramů zobrazených v podkapitole 1.4.

V případě $\Lambda > 0$ můžeme tedy usoudit, že zářivá komponenta v daném bodě nekonečna vymizí pro dva speciální směry a to směry v nekonečnu prostorově opačné než směry k černým díram. Podrobnou diskuzi lze najít v [4]. Analogický rozbor Bornova řešení v de Sitterově vesmíru lze nalézt v [2].

Pro $\Lambda < 0$ závisí kvalitativní tvar směrové závislosti zářivé komponenty také na orientaci HNuSů vzhledem k nekonečnu. U C -metriky s podkritickým zrychlením se uplatňuje pouze jedna možnost – jeden z HNuSů je orientován vždy ven z prostoročasu a druhý dovnitř. Pro nadkritické zrychlení se ale uplatňují všechny alternativy. Pro různé oblasti nekonečna může nastat jak případ, že oba HNuSy směřují dovnitř prostoročasu, ven z prostoročasu či jeden ven a jeden dovnitř. Hranicí mezi těmito oblastmi jsou průsečíky akceleračního a kosmologického horizontu s nekonečnem. Na těchto hranicích se uplatňují i limitní případy, kdy HNuSy mohou být k nekonečnu tečné. Pro podrobnou diskuzi viz [6].

Kapitola 3

Zobecnění do vyšších dimenzí

Shrnutí

V posledních letech se výrazně zvýšil zájem o řešení Einsteinových rovnic ve vyšších dimenzích. Motivace přicházejí zejména ze strunových a bránových teorií a různých verzí kvantové teorie, ať již v rámci ‘velkého sjednocení’ či kvantové gravitace. Díky tomuto zájmu se začíná rychle rozvíjet i čistě klasická verze obecné teorie relativity ve vyšších dimenzích a postupně se zobecňují různé poznatky z čtyřdimenzionální relativity.

Ač tato oblast výzkumu stojí pouze na okraji autorova zájmu, tři přiložené práce jsou příspěvkem k tomuto proudu relativistické fyziky.

Práce [13] je přímé zobecnění výsledků diskutovaných v minulé kapitole na případ prostoročasů vyšších dimenzí. Tato práce využívá nedávných výsledků [109, 110] netriviálně zobecňujících klasickou algebraickou klasifikaci. V práci je odvozena asymptotická směrová charakteristika zářivé komponenty gravitačního pole. Je ukázáno, že ji lze vyjádřit pomocí jistých funkcí charakterizujících algebraickou strukturu. Díky tomu nulové směry zářivé komponenty pole opět souvisejí s algebraicky speciálními směry.

V pracích [9, 11] jsme se zabývali zkoumáním ultrarelativisticky se pohybujícího rotujícího *černého prstence* v pěti prostoročasových dimenzích. Černý prsteneček je útvar analogický černým díram, ale s odlišnou topologií horizontu, s topologií $S^1 \times S^2$. Bylo ukázáno, že prostoročas okolo velmi rychle se pohybujícího prstence má charakter tzv. *pp*-vlny – prototypu rovinné vlny v teorii gravitace. Tento výsledek je zobecněním klasického postupu [111] ze čtyř dimenzí pro rychle pohybující se černou díru. Námí obdržžený profil *pp*-vlny je též srovnán s analogickým výsledkem [112] obdržným pro pětidimenzionální černou díru.

Publikace

Původní výsledky týkající se tématu této kapitoly jsou obsaženy v následujících pracích:

- [13] Pavel Krtouš, Jiří Podolský: *Asymptotic structure of radiation in higher dimensions*, předběžně přijato k publikaci v *Class. Quantum Grav.* (2005).
- [9] Marcello Ortaggio, Pavel Krtouš, Jiří Podolský: *Ultrarelativistic boost of the black ring*, *Phys. Rev. D* **71**, 124031 (2005).
- [11] Marcello Ortaggio, Jiří Podolský, Pavel Krtouš: *Ultrarelativistic boost of spinning black rings*, *J. High Energy Phys.* JHEP12(2005)001.

Plné znění těchto publikací lze nalézt v druhé části habilitační práce.

3.1 Asymptotická směrová charakteristika záření

Algebraická klasifikace Weylova tenzoru gravitačního pole vycházející z práce Petrova [107] a rozpracována Penrosem [113] je založena na zkoumání vztahu tzv. *hlavních nulových směrů* gravitačního pole¹ (viz monografie [29,91] pro přehledný výklad a podkapitulu 2.2 výše pro krátký souhrn). Jedná se o standardní techniku užívanou jako vodítko při hledání a případně identifikaci řešení Einsteinových rovnic. Významnou roli také sehraává při studiu zářivých prostoročasů a je klíčová ve formulaci peeling teoremu [32, 97, 101–103]. Jak bylo vyloženo v předchozí kapitole, algebraická struktura vzdáleného pole určuje i směrovou charakteristiku záření.

Definice hlavních nulových směrů v podobě předložené např. Penrosem [29] však podstatně využívá, že prostoročas je čtyřdimenzionální. Hlavní nulové směry nelze stejným způsobem definovat i ve vyšší dimenzi. Teprve nedávno se objevilo zobecnění tohoto konceptu v pracích [109,110] zavádějících namísto hlavních nulových směrů obecnější koncept *nulových směrů přizpůsobených Weylovu tenzoru* (*Weyl tensor aligned null directions*).

Tyto směry jsou definovány způsobem analogickým rovnici (2.2) – nulový směr je přizpůsobený Weylovu tenzoru, pokud jisté komponenty tohoto tenzoru vymizí v bázi vystavěné na tomto nulovém směru. Na rozdíl od standardní situace ve čtyřech dimenzích však přizpůsobené vektory ve vyšší dimenzi nemusí existovat. Jejich definiční rovnice jsou obecně ‘přezadané’ a typická geometrie tak nemá žádné algebraicky speciální směry. Algebraická klasifikace ve vyšší dimenzi je tak bohatší o generické případy bez přizpůsobených směrů a závisí také na stupni degenerace více přizpůsobených směrů.

Ukázalo se, že tento formalismus lze přímočaře využít ke zobecnění výsledků prací [4, 6, 7]. V práci [13] se analogickým způsobem odvozuje směrová charakteristika zářivých komponent gravitačního pole a vyjadřuje se pomocí funkcí určujících algebraickou strukturu pole. Bylo ukázáno, že podobně jako ve čtyřech dimenzích směry, podél kterých záření vymizí, specifickým způsobem korelují s algebraicky speciálními směry.

3.2 Ultrarelativistický boost černého prstence

Velmi důležitým řešením Einsteinových rovnic z hlediska teorií ve vyšších dimenzích (ale i ve standardních čtyřech dimenzích) je třída *pp*-vln. Tyto prostoročasy hrají v obecné teorii relativity roli rovinných vln s případnými ultrarelativistickými zdroji. Jejich význam ve vyšších dimenzích pramení z toho, že v těchto prostoročasech lze přesně řešit některé strunové teorie [114,115], dále z toho, že v nich vymizí všechny algebraické invarianty [116–118], a v neposlední řadě proto, že popisují i pole rychle se pohybujících zdrojů. To lze nahlédnout např. z faktu, že *pp*-vlny se obecně dostávají při urychlení statických zdrojů (např. černých děr) na rychlost světla [111,119].

Poslední důvod přispěl k zájmu o *pp*-vlny ve vyšších dimenzích zvláště poté, co některé vícedimenzionální teorie předpověděly, že již v současných či právě

¹Obdobným způsobem lze studovat i elektromagnetické pole, případně pole obecného spinu.

budovaných urychlovačích by možná mohly být generovány mikroskopické černé díry (viz např. přehled [120]).

Prostorčas popisující rychle pohybující se lehkou Schwarzschildovu černou díru ve čtyřech dimenzích byl obdrženy v práci [111]. Předpovědi tvorby černých děr na škálách TeV však fungují pouze ve vícedimenzionálních modelech, a proto je potřebné zkoumat pp -vlnovou limitu pro vícedimenzionální černé díry. Obecná rotující černá díra ve vyšší dimenzi byla popsána Myersem a Perrym ve [121], její zobecnění pro nenulovou kosmologickou konstantu v pracích [122, 123]. Ultrarelativistická limita statické díry vedoucí vskutku k pp -vlně byla nalezena v práci [119] a zobecněna na rotující případ letos ve [112].

Oproti situaci ve čtyřech dimenzích, ve vyšší dimenzi neplatí teorém o jednoznačnosti černých děr, tj. že nejobecnější stacionární černá díra v asymptoticky plochem vakuovém prostoročase je rotující díra s horizontem topologie S^2 popsaná Kerrovým řešením. Např. v pěti dimenzích je explicitně známo černoděrové řešení s ‘toroidální’ ($S^1 \times S^3$) topologií horizontu, tzv. *černý prstenec* (*black ring*) [124, 125]. Černý prstenec může být jak statický tak rotující. V obecném případě je k jeho stabilitě nutný membránový zdroj napnutý uvnitř prstence (analogie kosmické struny u C -metriky). Pro speciálně zvolenou rychlost rotace však lze zhruba řečeno vybalancovat gravitační sílu se silou odstředivou a membránu uvnitř prstence eliminovat. (Černý prstenec kupodivu souvisí na formální úrovni s čtyřdimenzionální C -metrikou diskutovanou v podkapitole 1.4: pro nerotující statický prstenec prostorovou část metriky tvoří euklidovská verze čtyřdimenzionální C -metriky.)

V pracích [9, 11] jsme provedli ultrarelativistickou limitu jak statického tak obecně rotujícího prstence v obecném směru vzhledem k ose prstence. Nalezli jsme konkrétní profilové funkce výsledných pp -vln a porovnali je s pp -vlnou získanou urychlením rotující černé díry [112]. Obě pp -vlny jsou pro obecnou volbu parametrů prstence různé. Shodují se pouze ve speciálním případě singulárního prstence, kdy jeho horizont vymizí a zbyde pouze prstencová singularita. Prostorčas singulárního prstence se však shoduje s prostoročasem získaným z Mayersovy-Perryho černé díry degenerovanou volbou parametrů již před ultrarelativistickou limitou a tak shoda výsledných pp -vln v tomto případě není překvapením.

Seznam publikací autora

- [1]* Jiří Bičák, Pavel Krtouš: *Accelerated sources in de Sitter spacetime and the insufficiency of retarded fields*, Phys. Rev. D **64**, 124020 (2001).
- [2]* Jiří Bičák, Pavel Krtouš: *The fields of uniformly accelerated charges in de Sitter spacetime*, Phys. Rev. Lett. **88**, 211101 (2002).
- [3]* Pavel Krtouš, Jiří Podolský: *Radiation from accelerated black holes in a de Sitter universe*, Phys. Rev. D **68**, 024005 (2003).
- [4]* Pavel Krtouš, Jiří Podolský, Jiří Bičák: *Gravitational and electromagnetic fields near a de Sitter-like infinity*, Phys. Rev. Lett. **91**, 061101 (2003).
- [5]* Jiří Podolský, Marcello Ortaggio, Pavel Krtouš: *Radiation from accelerated black holes in an anti-de Sitter universe*, Phys. Rev. D **68**, 124004 (2004).
- [6]* Pavel Krtouš, Jiří Podolský: *Gravitational and electromagnetic fields near an anti-de Sitter-like infinity*, Phys. Rev. D **69**, 084023 (2004).
- [7]* Pavel Krtouš, Jiří Podolský: *Asymptotic directional structure of radiative fields in spacetimes with a cosmological constant*, Class. Quantum Grav. **21**, R233 (2004).
- [8]* Pavel Krtouš, Jiří Podolský: *Asymptotic directional structure of radiation for fields of algebraic type D*, Czech. J. Phys. **55**, 119 (2005).
- [9]* Marcello Ortaggio, Pavel Krtouš, Jiří Podolský: *Ultrarelativistic boost of the black ring*, Phys. Rev. D **71**, 124031 (2005).
- [10]* Jiří Bičák, Pavel Krtouš: *Fields of accelerated sources: Born in de Sitter*, J. Math. Phys. **46**, 102504 (2005).
- [11]* Marcello Ortaggio, Jiří Podolský, Pavel Krtouš: *Ultrarelativistic boost of spinning black rings*, J. High Energy Phys. JHEP12(2005)001 (2005).
- [12]* Pavel Krtouš: *Accelerated black holes in an anti-de Sitter universe*, Phys. Rev. D **72**, 124019 (2005).
- [13]* Pavel Krtouš, Jiří Podolský: *Asymptotic structure of radiation in higher dimensions*, předběžně přijato k publikaci v Class. Quantum Grav. (2005).
- [14] Tomáš Kopf, Pavel Krtouš, Don N. Page: *Too Soon for Doom Gloom?* preprint gr-qc/9407002 (1994).
- [15] Pavel Krtouš. *Relationships between Scalar Field and Relativistic Particle Quantizations*, Ph.D. práce, 194 str. (University of Alberta, Edmonton, 1997).

- [16] Pavel Krtouš: *Boundary quantum mechanics*, v Gravitation: Following the Prague Inspiration, Festschrift to J. Bičák, str. 289, ed. O. Semerák, J. Podolský, M. Žofka (World Scientific, Singapore, 2002).
- [17] Jiří Bičák, Pavel Krtouš: *Radiative fields in spacetimes with Minkowski and de Sitter asymptotics*, v Recent Developments in Gravity, str. 3, ed. K. D. Kokkotas, N. Stergioulas (World Scientific, Singapore, 2003).
- [18] Pavel Krtouš: *Covariant derivative on non-linear fiber bundles*, Czech. J. Phys. **54**, 273 (2004).
- [19] Pavel Krtouš: *Sum-over-histories quantization of relativistic particle*, Class. Quantum Grav. **21**, 1519 (2004).
- [20] Pavel Krtouš, Jiří Podolský: *Asymptotická struktura prostoročasů s kosmologickou konstantou*, Čs. čas. fyz. **55**, 94 (2005).

Nejdříve jsou uvedeny publikace, které jsou součástí této habilitační práce (označeny hvězdičkou *). Ty lze v plném znění nalézt v druhé části práce. Jinak je řazení chronologické. Většina z prací je též k dispozici na přiloženém CD.

Ostatní literatura

- [21] T. Levi-Civita: *ds² einsteiniani in campi newtoniani*, Atti Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. Fis., Mat. Nat., Rend. **26**, 307 (1917).
- [22] H. Weyl: *Bemerkung uber die axisymmetrischen losungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen*, Ann. Phys. (Leipzig) **59**, 185 (1918).
- [23] W. Kinnersley, M. Walker: *Uniformly accelerating charged mass in general relativity*, Phys. Rev. D **2**, 1359 (1970).
- [24] A. Ashtekar, T. Dray: *On the Existence of Solutions to Einstein's Equation With Non-Zero Bondi News*, Commun. Math. Phys. **79**, 581 (1981).
- [25] W. B. Bonnor: *The Sources of the Vacuum C-Metric*, Gen. Rel. Grav. **15**, 535 (1983).
- [26] J. Plebański, M. Demiański: *Rotating charged and uniformly accelerated mass in general relativity*, Ann. Phys. (N.Y.) **98**, 98 (1976).
- [27] B. Carter: *Hamilton-Jacobi and Schrodinger Separable Solutions of Einstein's Equations*, Commun. Math. Phys. **10**, 280 (1968).
- [28] R. Debever: *On type D expanding solutions of Einstein-Maxwell equations*, Bull. Soc. Math. Belg. **23**, 360 (1971).
- [29] R. Penrose, W. Rindler: *Spinors and Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1984, 1986).
- [30] R. M. Wald: *General Relativity* (The University of Chicago Press, Chicago and London, 1984).
- [31] S. Hawking, R. Penrose: *The nature of space and time* (Princeton University Press, Princeton, 1996); český překlad: *Povaha prostoru a času* (Academia, Praha, 2000).
- [32] R. Penrose: *Zero rest-mass fields including gravitation: asymptotic behaviour*, Proc. R. Soc. Lond., Ser A **284**, 159 (1965).
- [33] R. Penrose: *Asymptotic properties of fields and space-times*, Phys. Rev. Lett. **10**, 66 (1963).
- [34] M. Walker: *Block Diagrams and the Extension of Timelike Two-Surfaces*, J. Math. Phys. **11**, 2280 (1970).
- [35] *Modern Cosmology in Retrospect*, edited by B. Bertotti, R. Balbinot, S. Bergia, A. Messina (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1990).
- [36] P. J. E. Peebles: *Principles of Physical Cosmology* (Princeton University Press, Princeton, 1993).

- [37] S. M. Carroll: *The Cosmological Constant*, Living Rev. Rel. **4**, 1 (2001), URL (cited on November 2005): <http://www.livingreviews.org/lrr-2001-1>.
- [38] C. L. Bennett *et al.*: *First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Preliminary Maps and Basic Results*, Astrophys. J. Suppl. **148**, 1 (2003).
- [39] D. N. Spergel *et al.*: *First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters*, Astrophys. J. Suppl. **148**, 175 (2003).
- [40] N. D. Birrell, P. C. W. Davies: *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1982).
- [41] M. Born: *Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips*, Ann. Phys. (Leipzig) **30**, 1 (1909).
- [42] E. Eriksen, Ø. Grøn: *Electrodynamics of Hyperbolically Accelerated Charges I, II, III*, Ann. Phys. (N.Y.) **286**, 320 (2000).
- [43] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler: *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973).
- [44] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis: *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1973).
- [45] K. S. Thorne: *Černé díry a zborcený čas* (Mladá Fronta, Praha, 2004).
- [46] A. Hamilton, *Falling Into a Black Hole*, 1998, URL: <http://casa.colorado.edu/~ajsh/schw.shtml>.
- [47] C. T. Bolton: *Identification of Cygnus X-1 with HDE 226868*, Nature **235**, 271 (1972).
- [48] C. T. Bolton: *Cygnus X-1-Dimensions of the system*, Nature Phys. Sci. **240**, 124 (1972).
- [49] R. Schödel *et al.*: *A star in a 15.2-year orbit around the supermassive black hole at the centre of the Milky Way*, Nature **419**, 694 (2002).
- [50] J. Ehlers, W. Kundt: *Exact Solutions of the Gravitational Field Equations*, in *Gravitation: an Introduction to Current Research*, edited by L. Witten (John Wiley, New York, 1962), pp. 49–101.
- [51] J. Bičák, B. G. Schmidt: *Asymptotically flat radiative space-times with boost-rotation symmetry: the general structure*, Phys. Rev. D **40**, 1827 (1989).
- [52] J. Bičák, V. Pravda: *Spinning C-metric: Radiative spacetime with accelerating, rotating black holes*, Phys. Rev. D **60**, 044004 (1999).
- [53] P. S. Letelier, S. R. Oliveira: *On Uniformly Accelerated Black Holes*, Phys. Rev. D **64**, 064005 (2001).
- [54] V. Pravda, A. Pravdová: *Boost-rotation symmetric spacetimes — review*, Czech. J. Phys. **50**, 333 (2000).

- [55] K. Hong, E. Teo: *A new form of the C-metric*, Class. Quantum Grav. **20**, 3269 (2003).
- [56] K. Hong, E. Teo: *A new form of the rotating C-metric*, Class. Quantum Grav. **22**, 109 (2005).
- [57] J. B. Griffiths, J. Podolsky: *Accelerating and rotating black holes*, Class. Quantum Grav. **22**, 3467 (2005).
- [58] J. Podolský, J. B. Griffiths: *Uniformly accelerating black holes in a de Sitter universe*, Phys. Rev. D **63**, 024006 (2001).
- [59] O. J. C. Dias, J. P. S. Lemos: *Pair of accelerated black holes in a de Sitter background: The dS C metric*, Phys. Rev. D **67**, 084018 (2003).
- [60] J. Podolský: *Accelerating black holes in anti-de Sitter universe*, Czech. J. Phys. **52**, 1 (2002).
- [61] O. J. C. Dias, J. P. S. Lemos: *Pair of accelerated black holes in an anti-de Sitter background: The AdS C metric*, Phys. Rev. D **67**, 064001 (2003).
- [62] O. J. C. Dias, J. P. S. Lemos: *The extremal limits of the C-metric: Nariai, Bertotti-Robinson and anti-Nariai C-metrics*, Phys. Rev. D **68**, 104010 (2003).
- [63] R. Emparan, G. T. Horowitz, R. C. Myers: *Exact description of black holes on branes*, JHEP **01**, 007 (2000).
- [64] A. Chamblin: *Capture of bulk geodesics by brane-world black holes*, Class. Quantum Grav. **18**, L17 (2001).
- [65] R. Emparan, G. T. Horowitz, R. C. Myers: *Exact description of black holes on branes II: Comparison with BTZ black holes and black strings*, JHEP **01**, 021 (2000).
- [66] J. Bičák: *Gravitational radiation from uniformly accelerated particles in general relativity*, Proc. R. Soc. Lond., Ser A **302**, 201 (1968).
- [67] J. Bičák, A. Pravdová: *Symmetries of asymptotically flat electrovacuum spacetimes and radiation*, J. Math. Phys. **39**, 6011 (1998).
- [68] J. A. Valiente Kroon: *On Killing vector fields and Newman-Penrose constants*, J. Math. Phys. **41**, 898 (2000).
- [69] J. Bičák: *Selected Solutions of Einstein's Field Equations: Their Role in General Relativity and Astrophysics*, in *Einstein's Field Equations and Their Physical Implications*, edited by B. G. Schmidt (Springer, Berlin, 2000), Vol. 540, pp. 1–126.
- [70] J. Bičák: *Radiative spacetimes: exact approaches*, in *Relativistic Gravitation and Gravitational Radiation, Les Houches 1995*, edited by J. A. Marck, J. P. Lasota (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1997), pp. 67–87.
- [71] J. Bičák: *Exact radiative spacetimes: some recent developments*, Annalen Phys. **9**, 207 (2000).
- [72] J. Frauendiener, M. Hein: *Numerical evolution of axisymmetric, isolated systems in general relativity*, Phys. Rev. D **66**, 124004 (2002).

- [73] R. Emparan: *Pair creation of black holes joined by cosmic strings*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3386 (1995).
- [74] R. B. Mann: *Pair production of topological anti-de Sitter black holes*, Class. Quantum Grav. **14**, L109 (1997).
- [75] O. J. C. Dias, J. P. S. Lemos: *Pair creation of de Sitter black holes on a cosmic string background*, Phys. Rev. D **69**, 084006 (2004).
- [76] O. J. C. Dias: *Pair creation of anti-de Sitter black holes on a cosmic string background*, Phys. Rev. D **D70**, 024007 (2004).
- [77] A. Vilenkin, E. P. S. Shellard: *Cosmic Strings and other Topological Defects* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1994).
- [78] F. J. Ernst: *Removal of the nodal singularity of the C-metric*, J. Math. Phys. **17**, 515 (1976).
- [79] J. Bičák, C. Hoenselaers, B. Schmidt: *The solutions of the Einstein equations for uniformly accelerated particles without nodal singularities II. Self-accelerating particles*, Proc. R. Soc. Lond., Ser A **390**, 397 (1983).
- [80] J. Bičák, C. Hoenselaers, B. Schmidt: *The solutions of the Einstein equations for uniformly accelerated particles without nodal singularities I. Freely falling particles in external fields*, Proc. R. Soc. Lond., Ser A **390**, 411 (1983).
- [81] R. Penrose: *Conformal treatment of infinity*, in *Relativity, Groups and Topology, Les Houches 1963*, edited by C. DeWitt, B. DeWitt (Gordon and Breach, New York, 1964), pp. 563–584.
- [82] H. Friedrich: *Existence and structure of past asymptotically simple solutions of Einstein's field equations with positive cosmological constant*, J. Geom. Phys. **3**, 101 (1986).
- [83] H. Friedrich: *Einstein's Equation and Geometric Asymptotics*, in *Gravitation and Relativity: At the turn of the Millenium (Proceedings of the GR-15 conference)*, edited by N. Dadhich, J. Narlikar (Inter-University Centre for Astronomy and Astrophysics Press, Pune, 1998).
- [84] H. Friedrich: *On the global existence and the asymptotic behavior of solutions to the Einstein-Maxwell-Yang-Mills equations*, J. Diff. Geom. **34**, 275 (1991).
- [85] H. Friedrich: *Einstein equations and conformal structure: existence of anti-de Sitter-type space-times*, J. Geom. Phys. **17**, 125 (1995).
- [86] H. Friedrich: *Conformal Einstein Evolution*, in *The Conformal Structure of Space-Time: Geometry, Analysis, Numerics*, edited by J. Frauendiener, H. Friedrich (Springer, Berlin, 2002), Vol. 604, pp. 1–50.
- [87] J. Frauendiener: *Conformal Infinity*, Liv. Rev. Rel. **7**, 2004 (2004), URL (cited on November 2005): <http://www.livingreviews.org/lrr-2004-1/>.
- [88] A. Einstein: *Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation*, Preuss. Akad. Wiss. Sitz. 688 (1916).
- [89] A. Einstein: *Über Gravitationwellen*, Preuss. Akad. Wiss. Sitz. 154 (1918).

- [90] J. Bičák: *Radiative properties of spacetimes with the axial and boost symmetries*, in *Gravitation and Geometry (A volume in honour of Ivor Robinson)*, edited by W. Rindler, A. Trautman (Bibliopolis, Naples, 1987), pp. 55–69.
- [91] H. Stephani *et al.*: *Exact Solutions of Einstein's Field Equations, Second Edition* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2003).
- [92] J. Bičák: *On exact radiative solutions representing finite sources*, in *Galaxies, Axisymmetric Systems and Relativity*, edited by M. A. H. MacCallum (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1985), pp. 91–124.
- [93] W. B. Bonnor, J. B. Griffiths, M. A. H. MacCallum: *Physical Interpretation of Vacuum Solutions of Einstein's Equations. Part II. Time-dependent Solutions*, *Gen. Rel. Grav.* **26**, 687 (1994).
- [94] J. Bičák, P. Krtouš: *Radiative fields in spacetimes with Minkowski and de Sitter asymptotics*, in *Recent Developments in Gravity (Proceedings of 10th Greek Relativity Meeting, Chalkidiki, May 2002)*, edited by K. D. Kokkotas, N. Stergioulas (World Scientific, Singapore, 2003), pp. 3–25.
- [95] H. Bondi: *Gravitational waves in general relativity*, *Nature* **186**, 535 (1960).
- [96] H. Bondi, M. G. J. van der Burg, A. W. K. Metzner: *Gravitational waves in general relativity: VII. Waves from axi-symmetric isolated systems*, *Proc. R. Soc. Lond., Ser A* **269**, 21 (1962).
- [97] R. K. Sachs: *Gravitational waves in general relativity: VII. Waves in asymptotically flat space-time*, *Proc. R. Soc. Lond., Ser A* **270**, 103 (1962).
- [98] R. K. Sachs: *Asymptotic Symmetries in Gravitational Theory*, *Phys. Rev.* **128**, 2851 (1962).
- [99] F. A. E. Pirani: *Introduction to gravitational radiation theory*, in *Brandeis Lectures on General Relativity*, edited by S. Deser, K. W. Ford (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1965), pp. 249–372.
- [100] R. Penrose: *Structure of Space-Time*, in *Battelle Rencontres*, edited by B. DeWitt, J. A. Wheeler (Benjamin, New York, 1968), pp. 121–235.
- [101] R. Sachs: *Gravitational waves in general relativity: VI. The outgoing radiation condition*, *Proc. R. Soc. Lond., Ser A* **264**, 309 (1961).
- [102] E. T. Newman, R. Penrose: *An Approach to Gravitational Radiation by a method of Spin Coefficients*, *J. Math. Phys.* **3**, 566 (1962).
- [103] J. N. Goldberg, R. P. Kerr: *Asymptotic Properties of the Electromagnetic Field*, *J. Math. Phys.* **5**, 172 (1964).
- [104] A. Ashtekar, A. Magnon: *Asymptotically anti-de Sitter space-times*, *Class. Quantum Grav.* **1**, L39 (1984).
- [105] A. Ashtekar, S. Das: *Asymptotically anti-de Sitter spacetimes: conserved quantities*, *Class. Quantum Grav.* **17**, L17 (2000).
- [106] R. Penrose: *Cosmological boundary conditions for zero rest-mass fields*, in *The Nature of Time*, edited by T. Gold (Cornell University Press, Ithaca, New York, 1967), pp. 42–54.

- [107] A. Z. Petrov: *Classification of spaces defined by gravitational fields*, Sci. Not. Kazan. State Univ. **114**, 55 (1954).
- [108] H. Friedrich: *Einstein's Equation and Conformal Structure*, in *The Geometric Universe: Science, Geometry, and the Work of Roger Penrose*, edited by S. A. Huggett *et al.* (Oxford University Press, Oxford, 1998), pp. 81–98.
- [109] A. Coley, R. Milson, V. Pravda, A. Pravdová: *Classification of the Weyl Tensor in Higher Dimensions*, Class. Quantum Grav. **21**, L35 (2004).
- [110] R. Milson, A. Coley, V. Pravda, A. Pravdová: *Alignment and algebraically special tensors in Lorentzian geometry*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **2**, 41 (2005).
- [111] P. C. Aichelburg, R. U. Sexl: *On the gravitational field of a massless particle*, Gen. Rel. Grav. **2**, 303 (1971).
- [112] H. Yoshino: *Lightlike limit of the boosted Kerr black holes in higher-dimensional spacetimes*, Phys. Rev. D **71**, 044032 (2005).
- [113] R. Penrose: *A spinor approach to general relativity*, Ann. Phys. (N.Y.) **10**, 171 (1960).
- [114] D. Amati, C. K. K.: *Strings in a shock wave background and generation of curved geometry from flat space string theory*, Phys. Lett. **B210**, 92 (1988).
- [115] H. J. de Vega, N. Sánchez: *Quantum string scattering in the Aichelburg-Sexl geometry*, Nucl. Phys. **B317**, 706 (1989).
- [116] V. Pravda, A. Pravdová, A. Coley, R. Milson: *All spacetimes with vanishing curvature invariants*, Class. Quantum Grav. **19**, 6213 (2002).
- [117] A. Coley *et al.*: *Generalizations of pp-wave spacetimes in higher dimensions*, Phys. Rev. D **67**, 104020 (2003).
- [118] A. Coley, R. Milson, V. Pravda, A. Pravdová: *Vanishing Scalar Invariant Spacetimes in Higher Dimensions*, Class. Quantum Grav. **21**, 5519 (2004).
- [119] C. Loustó, N. Sánchez: *The curved shock wave space-time of ultrarelativistic charged particles and their scattering*, Int. J. Mod. Phys. A **5**, 915 (1990).
- [120] V. Cardoso, E. Berti, M. Cavagliá: *What we (dont) know about black hole formation in high-energy collisions*, Class. Quantum Grav. **22**, L61 (2005).
- [121] R. C. Myers, M. J. Perry: *Black holes in higher dimensional space-times*, Ann. Phys. (N.Y.) **172**, 304 (1986).
- [122] G. W. Gibbons, H. Lü, D. N. Page, C. N. Pope: *Rotating Black Holes in Higher Dimensions with a Cosmological Constant*, Phys. Rev. Lett. **93**, 171102 (2004).
- [123] G. W. Gibbons, H. Lü, D. N. Page, C. N. Pope: *The General Kerr-de Sitter Metrics in All Dimensions*, J. Geom. Phys. **53**, 49 (2005).
- [124] R. Emparan, H. S. Reall: *A rotating black ring in five dimensions*, Phys. Rev. Lett. **88**, 101101 (2002).
- [125] R. Emparan, H. S. Reall: *Generalized Weyl solutions*, Phys. Rev. D **65**, 084025 (2002).

Publikace jsou řazeny v pořadí výskytu v textu.

Obsah přiloženého CD

K habilitační práci je přiloženo CD obsahující některé doplňkové materiály. Výchozím bodem k prohlídce těchto materiálů je soubor `index.html` ve vrchním adresáři disku. Ten obsahuje následující přehled:

Habilitační práce

Elektronická podoba této práce v několika formátech, včetně ‘originálních’ elektronických verzí přiložených prací.

Příloha *Černé díry*

Digitální příloha popisovaná v textu habilitace. Tato příloha obsahuje třídimenzionální obrázky, interaktivní diagramy a animace vizualizující kauzální strukturu prostoročasů s černými dírami.

Publikace

Elektronická podoba většiny prací uvedených v seznamu na str. 61.

Studijní texty

Některé studijní texty vypracované k přednáškám „Proseminář teoretické fyziky” a „Geometrické metody teoretické fyziky”, které vedu na MFF UK. Zejména se jedná o rozsáhlý text přibližující diferenciální geometrii pro fyziky.

Popularizace

Dva popularizační a výukové projekty: prezentace objasňující vztah nerelativistického a relativistického chápání prostoru a času, a program sloužící k ilustraci a vysvětlení relativistického paradoxu dvojčat a k diskuzi vztahu červích děr a tzv. strojů času.

Těmto bodům odpovídají na disku i jednotlivé adresáře `habilitace`, `cerne_diry`, `publikace`, `studijni_texty` a `popularizace`.

Pár poznámek k obsahu CD

Příloha *Černé díry*

Příloha *Černé díry* obsahuje odborně nejzajímavější materiál ilustrující mnohé výsledky popsané v kapitole 1. Tento materiál je zde uveřejněn v ucelené formě poprvé – pro svoji interaktivní povahu ho bohužel nelze publikovat v tištěném časopise.

Příloha obsahuje schematické třidimenzionální zobrazení různých prostoročasů s černými dírami. Jedná se o kompakťkované zobrazení okolí černých děr, naznačující zejména kauzální strukturu těchto oblastí. Je zde zobrazen jak triviální Minkowského prostoročas a asymptoticky plochý prostoročas obsahující statickou černou díru, tak prostoročasy s urychlenými dírami s Minkowského a anti-de Sitterovou asymptotikou. Prezentace umožňuje zobrazovat prostoročas v různých náhledech a ukazuje, jakým způsobem jsou do třidimenzionálních diagramů vnořeny privilegované dvoudimenzionální řezy.

Průvodce ovládáním přílohy je uveden v podkapitole 1.4, v oddíle na str. 36.

Studijní texty

K habilitační práci jsou přiloženy některé studijní texty, které používám při přednáškách vedených na MFF UK. Lze zde nalézt:

- *Přehled vlastností křivočarých souřadnic*
Jedná se o soubor tabulek shrnujících geometrické vlastnosti ortonormálních systémů v euklidovské rovině a prostoru. Jsou zde tabelovány transformační vztahy, Lamého koeficienty, souřadnicové vektory a tvary vektorových operátorů pro nejběžnější ‘rodiny’ souřadnic – pro cylindrické, sférické, eliptické, parabolické a bipolární souřadnice. Texty jsou určeny pro „Proseminář teoretické fyziky II” vyučovaný v druhém ročníku studia fyziky.
- *Distribuční kuchařka v \mathbb{R} a E^3*
Text určený pro stejný proseminář, obsahující stručné zavedení distribucí na reálných číslech a v euklidovském prostoru s aplikacemi ve fyzice. V jedné dimenzi se text zaměřuje na zavedení distribucí a operací s nimi, na regularizaci lokálně neintegrovatelných funkcí a na využití distribucí při Fourierově transformaci. Ve třech dimenzích je důraz kladen na popis distribucí se singulárním nosičem, tj. distribucí lokalizovaných v bodě, na křivce či na ploše, a na jejich využití v teorii elektromagnetického pole.
- *Geometrické metody ve fyzice*
Tento rozsáhlejší text tvoří základ vznikajících skript k výběrové přednášce „Geometrické metody teoretické fyziky” určené pro magisterské studium teoretické fyziky. Jedná se o přehled diferenciální geometrie s důrazem na aplikace v teoretické mechanice, obecné teorii relativity a kalibrační teorii pole. V současnosti text obsahuje pět kapitol a pokrývá tak většinu první části zamýšlených skript týkající se zejména zavedení variet a riemanovské geometrie. (Druhá část skript by měla pokrývat teorii fibrováných prostorů užívanou v teorii kalibračních polí.)

Popularizace

Tato část obsahuje dva projekty popularizující speciální teorii relativity.

Prezentace *Speciální teorie relativity a žížalí farma* na populární úrovni vysvětluje vztah newtonovského a relativistického chápání prostoru a času. Vztah těchto dvou přístupů je vykládán na smyšleném příkladu žížalího světa - modelu, který využívá pouze středoškolské znalosti euklidovské geometrie a přitom do velké míry vystihuje myšlenkový skok mezi klasickou a relativistickou fyzikou.

Program *Výlet ke hvězdám* obsahuje dvě aplikace: *Paradox dvojčat* a *Stroj času*. Jedná se o program, který byl vytvořen k populární přednášce o 'strojích času'.

Aplikace *Paradox dvojčat* slouží k modelování paradoxu dvojčat na příkladu letu kosmické lodi ze Země k Alfa Centauri A a zpět. Interaktivní formou se zde zájemce může seznámit s různými aspekty relativistického popisu a pomocí různých pohledů na vysvětlovaný jev získat intuici v situacích, se kterými se při běžných rychlostech a rozměrech nesetká.

Aplikace *Stroj času* ukazuje, jak lze pomocí tzv. červí díry a paradoxu dvojčat vytvořit stroj času. Tato část byla připravena jako ilustrace k přednášce jež vysvětluje postoj současné teoretické fyziky k velmi oblíbenému tématu vědecko-fantastické literatury, k tzv. strojům času (zařízením umožňujícím návrat do vlastní minulosti). Přednáška ukazuje na koncepční problémy při formulaci takovéto kauzální situace a shrnuje fyzikálně podložené argumenty týkající se její přípustnosti či nepřípustnosti. Příložený program dokumentuje, že existence červích děr (topologických zkratk v prostoročase) s sebou nevyhnutelně nese i možnost existence strojů času.

