Matematické programy a jejich použití

Válec s vodou

Zadání příkladu

Určete, jak bude vypadat hladina vody ve válci o poloměru R, když jej budeme otáčet kolem osy úhlovou rychlostí ω, víte-li, že v klidu sahá voda do výšky H. Povrchové napětí a vnitřní tření vody zanedbejte.

Postup řešení příkladu

Nejprve si z porovnání tíhové a dostředivé síly na hladině určíme jak se mění směrnice hladiny (první derivace funkce popisující hladinu). Následně integrací (respektive řešením differenciální rovnice) si určíme samotnou funkci až na konstantu. Tu určíme z podmínky, že pro r=0 bude hladina dosahovat minima a to označíme h0. Pro přehlednost si tuto funkci označíme vyska1(r).

Nyní si určíme objem vody V před roztočením válce a následně ho porovnáme s objemem vody V2, když voda rotuje (objem vody určíme integrací ve válcových souřadnicích). Jelikož uvažujeme, že voda je nestlačitelná a nikam se nevypařuje je objem vody stejný. Porovnáním objemů dostaneme hodnotu výšky h0 v závislosti na H, R a ω (a g). Dosazením za h0 ve funkci vyska1(r) dostáváme funkci, kterou označíme vyska2(r) a která nám popisuje jak se mění tvar hladiny v závislosti na parametrech H, R a ω (a g).

Když ale výska h0 bude záporná (např. nedostatek vody, nebo se voda točí příliš rychle; zápornou výšku označme h02), směrnice hladiny zůstane stejná, ale nyní musíme provést integraci v mezích od r0 do R, kde r0 značí místo kde funkce protne hladinu.

Nejprve si určíme podmínku kdy tento jev nastane. Pak si určíme objem vody po roztočení V22 pomocí integrace od r0 do R. Následně si z podmínky vyska1(r)=0 určíme jak spolu souvisí r0 a h0 (přesněji si určíme jak spolu souvisí $r0^2$ a h02, jelikož je to snadnější; označíme $r00=r0^2$). Určenou závislost dosadíme do funkce pro objem po roztočení a poté porovnáme tento objem s objemem před roztočením. Pro ověření správnosti musí řešení pro h02 splňovat podmínku, že příslušná funkce výšky h02 musí spojitě navazovat na funkci h0 pro dostatek vody. Nejsnadněji tuto spojitost ověříme dosazením za výšku H výrazem, který dostaneme z podmínky h0=0 a ověřujeme, že výraz h02 je taktéž 0.

Dosazením za h0 výraz pro h02 ve funkci vyska1(r) dostáváme funkci, kterou označíme vyska22(r) a která nám popisuje jak se mění tvar hladiny v závislosti na parametrech H, R a ω (a g) pro nedostatek vody.

Následně si můžeme definovat funkci vyska(r,H, R,ω,g), která bude pro dostatek vody definována jako vyska2(r) a pro nedostatek vody jako vyska22(r). Tuto funkci je lepší definovat jako funkci více proměnných z důvodu podmínky pro nedostatek vody a také pro možnost změny paramatrů úlohy.

Zajímavostí tohoto příkladu je, že původní výška hladiny je aritmetickým průměrem minimální výšky h0 a maxima dosahovaného na okraji (pro dostatek vody).

Daší zajímavostí je ověření, že zadaná funkce je "rozumná". To znamená, mělo by platit, že množství vody které je nad původní hladinou je stejné jako množství vody, které "chybí" pod původní hladinou.

Řešení příkladu

Pro správnou činnost animací na konci notebooku je nutné jej celý propočítat (nabídka Evaluation/Evaluate Notebook).
Pro slabší počítače není vhodné používat 3D animace - jsou příliš náročné a mohou způsobit ukončení programu.

Průběh tvaru hladiny pro dostatek vody

In[1]:=
```
Clear["Global`*"]
```

In[2]:=
```
$Assumptions = R > 0
$Assumptions = H > 0
$Assumptions = ω > 0
$Assumptions = g > 0
```

Out[2]= $R > 0$

Out[3]= $H > 0$

Out[4]= $\omega > 0$

Out[5]= $g > 0$

Síly působící na hladině

In[6]:=
```
Fd = m * ω^2 * r
FG = m * g
```

Out[6]= $m\, r\, \omega^2$

Out[7]= $g\, m$

Porovnání sil na hladině

In[8]:= $k = \frac{F_d}{F_G}$

Out[8]= $\frac{r\, \omega^2}{g}$

Určení tvaru křivky hladiny (s podmínkou pro r=0 dostáváme h0)

In[9]:=
```
reseni = DSolve[{h'[r] == k, h[0] == h0}, h, r]
```

Out[9]= $\left\{\left\{h \to \text{Function}\left[\{r\}, \frac{2\, g\, h0 + r^2\, \omega^2}{2\, g}\right]\right\}\right\}$

Definování funkce vyska1

In[10]:=
```
vyska1[r_] := FullSimplify[(h[r] /. reseni)[[1]]]
```

In[11]:=
```
vyska1[r]
```

Out[11]= $h0 + \frac{r^2\, \omega^2}{2\, g}$

- **Objem vody ve válci před roztočením**

In[12]:= $V = \pi * R^2 * H$

Out[12]= $H \pi R^2$

- **Objem vody ve válci po roztočení**

In[13]:= $V2 = \int_0^R \int_0^{2\pi} (\text{vyska1}[r])\, r \, d\varphi \, dr$

Out[13]= $h0 \pi R^2 + \frac{\pi R^4 \omega^2}{4 g}$

- **Určení výšky h0**

In[14]:=
```
reseni2 = FullSimplify[Solve[V2 == V, h0]]
h01 = h0 /. reseni2[[1]]
```

Out[14]= $\left\{\left\{h0 \to H - \frac{R^2 \omega^2}{4 g}\right\}\right\}$

Out[15]= $H - \frac{R^2 \omega^2}{4 g}$

- **Definování funkce vyska2**

In[16]:=
```
vyska2[r_] := FullSimplify[vyska1[r] /. h0 → h01]
```

In[17]:=
```
FullSimplify[vyska2[r]]
```

Out[17]= $H + \frac{(2 r^2 - R^2) \omega^2}{4 g}$

Průběh tvaru hladiny pro nedostatek vody

- **Podmínka nedostatku vody**

In[18]:=
```
Reduce[h01 < 0 && g > 0, H, Reals]
```

Out[18]= $g > 0 \,\&\&\, H < \frac{R^2 \omega^2}{4 g}$

- **Objem vody ve válci po roztočení**

In[19]:= $V22 = \int_{r0}^R \int_0^{2\pi} \left(h02 + \frac{r^2 * \omega^2}{2 * g}\right) r \, d\varphi \, dr$

Out[19]= $h02 \pi R^2 - h02 \pi r0^2 + \frac{\pi R^4 \omega^2}{4 g} - \frac{\pi r0^4 \omega^2}{4 g}$

- **Určení výrazu $r0^2$ a $r0^4$**

In[20]:=
```
r00 = r00 /. Solve[h02 + (r00 * ω^2)/(2 * g) == 0, r00][[1]]
```

Out[20]= $-\frac{2\,g\,h02}{\omega^2}$

- **Dosazení do vztahu V22 za výrazy $r0^2$ a $r0^4$**

In[21]:=
```
V22 = V22 /. {r0^2 → r00, r0^4 → r00^2}
```

Out[21]= $h02\,\pi\,R^2 + \frac{g\,h02^2\,\pi}{\omega^2} + \frac{\pi\,R^4\,\omega^2}{4\,g}$

- **Určení výšky h02**

In[22]:=
```
reseni3 = FullSimplify[Solve[{V == V22}, {h02}]]
```

Out[22]= $\left\{\left\{h02 \to -\frac{R\,\omega\,\left(2\sqrt{g\,H} + R\,\omega\right)}{2\,g}\right\}, \left\{h02 \to -\frac{R\,\omega\,\left(-2\sqrt{g\,H} + R\,\omega\right)}{2\,g}\right\}\right\}$

- **Ověření řešení**

- Podmínka pro h0

In[23]:=
```
podminka = Solve[h01 == 0, H]
```

Out[23]= $\left\{\left\{H \to \frac{R^2\,\omega^2}{4\,g}\right\}\right\}$

- Dosazení podmínky do řešení

In[24]:=
```
Assuming[g > 0 && R > 0 && ω > 0, FullSimplify[reseni3 /. podminka[[1]]]]
```

Out[24]= $\left\{\left\{h02 \to -\frac{R^2\,\omega^2}{g}\right\}, \{h02 \to 0\}\right\}$

- **Ověřená závislost pro h02**

In[25]:=
```
h02 = h02 /. reseni3[[2, 1]]
```

Out[25]= $-\frac{R\,\omega\,\left(-2\sqrt{g\,H} + R\,\omega\right)}{2\,g}$

- **Definování funkce vyska22**

In[26]:=
```
vyska22[r_] := FullSimplify[vyska1[r] /. h0 → h02]
vyska22[r]
```

Out[27]= $\frac{\omega\,\left(2\sqrt{g\,H}\,R + r^2\,\omega - R^2\,\omega\right)}{2\,g}$

Celá závislost hladiny pro dostatek i nedostatek vody

In[28]:=
```
vyska[r_, R_, H_, ω_, g_] := Evaluate[If[h01 > 0, H + (2 r^2 - R^2) ω^2/(4 g), ω (2 Sqrt[g H] R + r^2 ω - R^2 ω)/(2 g)]]
```

Pomocné funkce na kreslení grafů

In[29]:=
```
vyska0[r_, R_, H_, ω_, g_] := Evaluate[If[h01 > 0, vyska2[r], vyska22[r]]]
vyskag[r_, R_, H_, ω_, g_] :=
 Evaluate[If[h01 > 0, H + ((2 (x^2 + y^2) - R^2) ω^2)/(4 g), ω (2 Sqrt[g H] R + (x^2 + y^2) ω - R^2 ω)/(2 g)]]
```

In[31]:=
```
vyska2[r]
vyska22[r]
vyska[r, R, H, ω, g]
vyska0[r, R, H, ω, g]
vyskag[r, R, H, ω, g]
```

Out[31]= $H + \frac{(2 r^2 - R^2)\,\omega^2}{4 g}$

Out[32]= $\frac{\omega\,(2 \sqrt{g H}\, R + r^2 \omega - R^2 \omega)}{2 g}$

Out[33]= $\text{If}\left[H - \frac{R^2 \omega^2}{4 g} > 0,\ H + \frac{(2 r^2 - R^2)\,\omega^2}{4 g},\ \frac{\omega\,(2 \sqrt{g H}\, R + r^2 \omega - R^2 \omega)}{2 g}\right]$

Out[34]= $\text{If}\left[H - \frac{R^2 \omega^2}{4 g} > 0,\ \text{vyska2}[r],\ \text{vyska22}[r]\right]$

Out[35]= $\text{If}\left[H - \frac{R^2 \omega^2}{4 g} > 0,\ H + \frac{(2 (x^2 + y^2) - R^2)\,\omega^2}{4 g},\ \frac{\omega\,(2 \sqrt{g H}\, R + (x^2 + y^2)\,\omega - R^2 \omega)}{2 g}\right]$

Zajímavosti

Průměr výšek pro dostatek vody

In[36]:=
```
FullSimplify[vyska2[0]]
FullSimplify[vyska2[R]]
FullSimplify[(vyska2[0] + vyska2[R])/2]
```

Out[36]= $H - \frac{R^2 \omega^2}{4 g}$

Out[37]= $H + \frac{R^2 \omega^2}{4 g}$

Out[38]= H

- **Porovnání objemů nad a pod původní hladinou pro dostatek vody**

In[39]:=
```
Solve[vyska2[r] == H, r]
```

$$\text{nahore} = \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R}\int_{0}^{2\pi} (\text{vyska2}[r] - H)\, r\, d\varphi\, dr$$

$$\text{dole} = \int_{0}^{\frac{R}{\sqrt{2}}}\int_{0}^{2\pi} (H - \text{vyska2}[r])\, r\, d\varphi\, dr$$

```
nahore - dole
```

Out[39]= $\left\{\left\{r \to -\frac{R}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{r \to \frac{R}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$

Out[40]= $\frac{\pi R^4 \omega^2}{16\, g}$

Out[41]= $\frac{\pi R^4 \omega^2}{16\, g}$

Out[42]= 0

- **Porovnání objemů nad a pod původní hladinou pro nedostatek vody**

In[43]:=
```
reseni4 = FullSimplify[Solve[vyska22[r] == H, r]]
r01 = r /. reseni4[[2]]
```

$$\text{nahore2} = \int_{r01}^{R}\int_{0}^{2\pi} (\text{vyska22}[r] - H)\, r\, d\varphi\, dr$$

$$\text{dole2} = \int_{\sqrt{r00}}^{r01}\int_{0}^{2\pi} (H - \text{vyska22}[r])\, r\, d\varphi\, dr + \int_{0}^{\sqrt{r00}}\int_{0}^{2\pi} H * r\, d\varphi\, dr$$

```
nahore2 - dole2
```

Out[43]= $\left\{\left\{r \to -\frac{\sqrt{2\, g\, H + R\, \omega\, \left(-2\sqrt{g\, H} + R\, \omega\right)}}{\omega}\right\}, \left\{r \to \frac{\sqrt{2\, g\, H + R\, \omega\, \left(-2\sqrt{g\, H} + R\, \omega\right)}}{\omega}\right\}\right\}$

Out[44]= $\frac{\sqrt{2\, g\, H + R\, \omega\, \left(-2\sqrt{g\, H} + R\, \omega\right)}}{\omega}$

Out[45]= $H\, \pi\, R^2 + \frac{g\, H^2\, \pi}{\omega^2} - \frac{2\, H\sqrt{g\, H}\, \pi\, R}{\omega}$

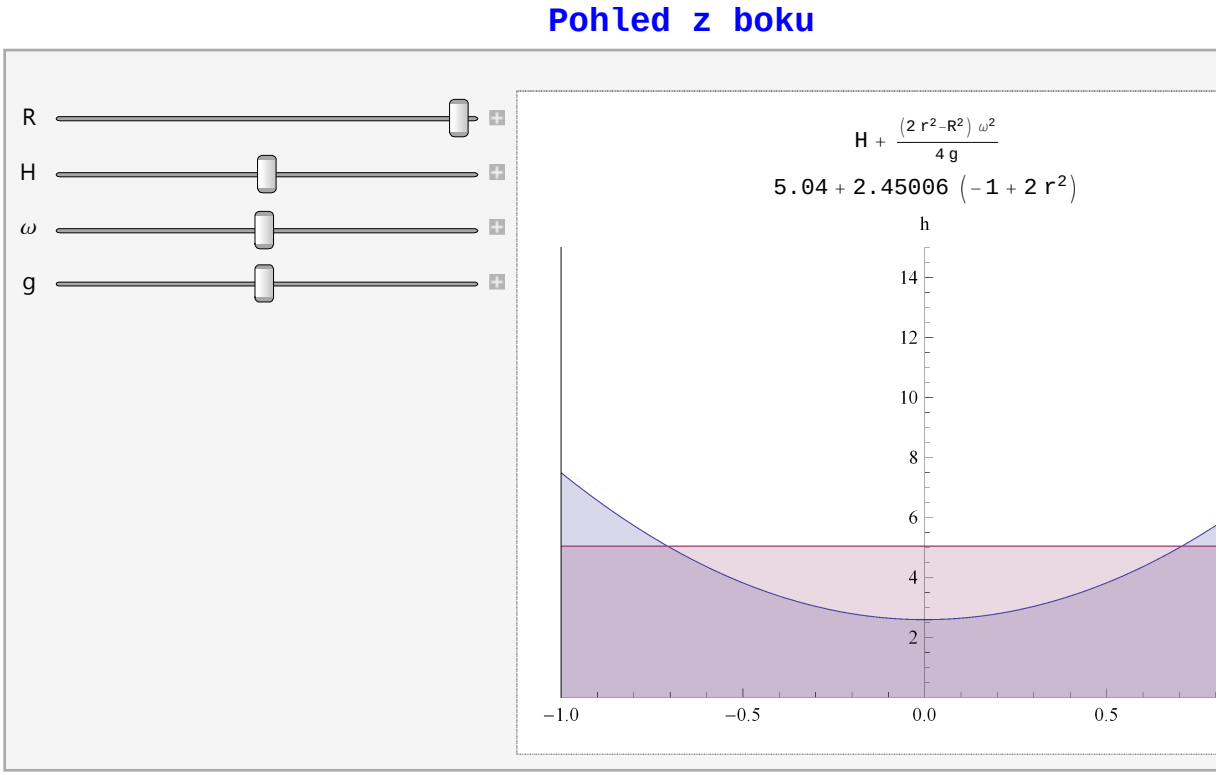
Out[46]= $H\, \pi\, R^2 + \frac{g\, H^2\, \pi}{\omega^2} - \frac{2\, H\sqrt{g\, H}\, \pi\, R}{\omega}$

Out[47]= 0

Vizualizace

In[48]:=
```
Grid[{{Style["Pohled z boku", Blue, Bold, 16]}, {
   Manipulate[Grid[{{vyska0[r, R, H, ω, g]}, {vyska[r, R, H, ω, g]},
      {Show[Plot[{vyska[r, R, H, ω, g], H}, {r, -R, R}, Filling → Bottom,
         PlotRange → {{-1, 1}, {0, 15}}, AxesLabel → {"r", "h"}],
        ListLinePlot[{{-R, 0}, {-R, 15}}, PlotStyle → Black],
        ListLinePlot[{{R, 0}, {R, 15}}, PlotStyle → Black], ImageSize → 360]}}],
    {{R, 1}, 0.001, 1}, {{H, 5}, 0, 10}, {{ω, 10}, 0, 20}, {{g, 10}, 0.01, 20}]
  }}]
```

Out[48]=

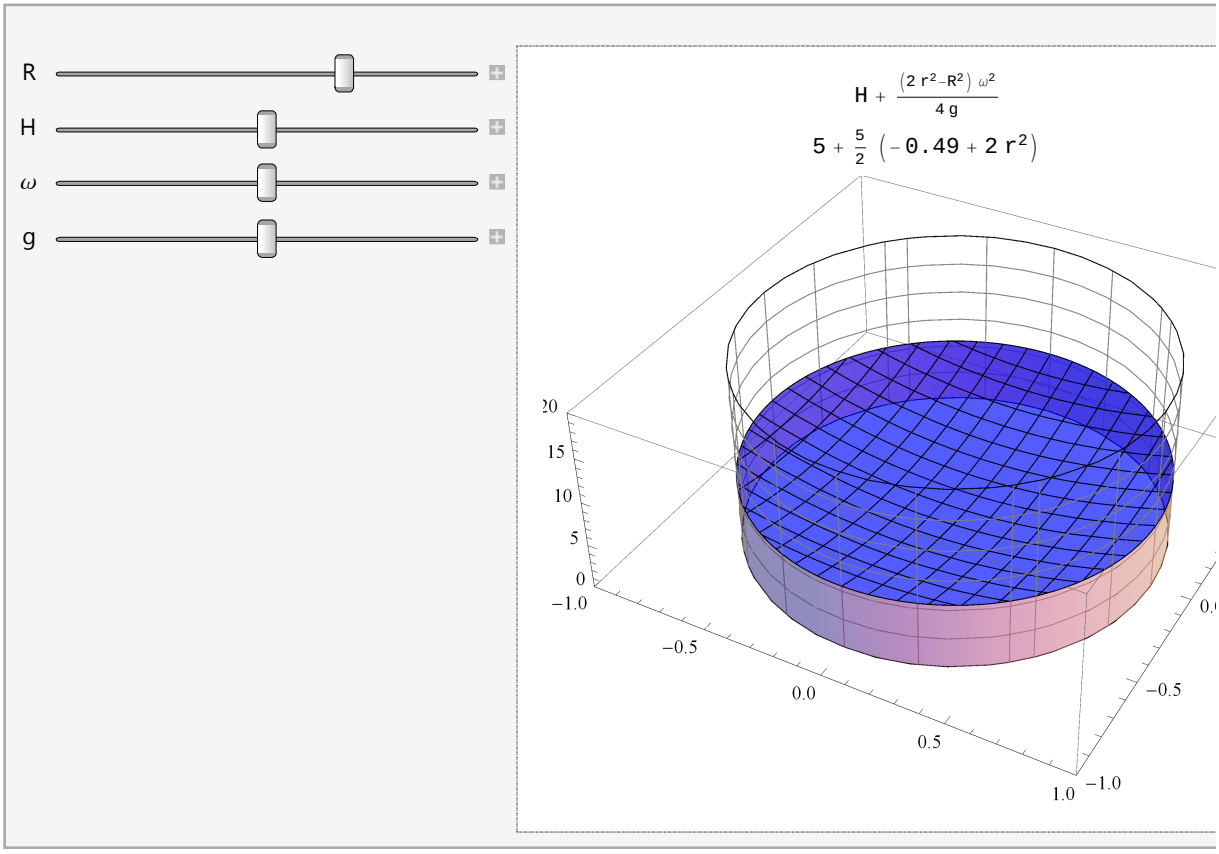


In[49]:=

```
Grid[{{Style["Tvar hladiny pro různé parametry R, H, ω a g", Blue, Bold, 14]}, {
   Manipulate[Grid[{{vyska0[r, R, H, ω, g]}, {vyska[r, R, H, ω, g]}, {Show[

        Plot3D[vyskag[r, R, H, ω, g],
         {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, PlotStyle → Directive[Blue, Opacity[0.6]],
         PlotRange → {{-1, 1}, {-1, 1}, {0, 20}}, Filling → Bottom, RegionFunction →
          Evaluate[Function[{x, y, z}, x^2 + y^2 < R]], PerformanceGoal → "Quality"],

        ContourPlot3D[x^2 + y^2 == R, {x, -1, 1}, {y, -1, 1},
         {z, 0, 20}, ContourStyle → None, MeshStyle → Gray, Mesh → 5],
        ImageSize → 360]}}], {{R, 0.7}, 0.001, 1}, {{H, 5}, 0, 10},
    {{ω, 10}, 0, 20}, {{g, 10}, 0.01, 20}]
  }}]
```

Out[49]=

Tvar hladiny pro různé parametry R, H, ω a g