1 Zadání příkladu

Dva hmotné body se pohybují rovnoměrně přímočaře, první z bodu
A = [0,1] m rychlostí v_a = (3,-2) m·s^(-1), druhý z bodu
B = [0,-1] m rychlostí v_b = (6,4) m·s^(-1). Určete
1) průsečík trajektorií obou bodů,
2) čas, kdy jsou si oba body nejblíže,
3) nejmenší vzdálenost obou bodů

2 Postup řešení příkladu

1)Nejprve si parametricky vyjádříme oba pohyby ve tvaru X=A+v·t.
Průsečík trajektorií obou bodů určíme z podmínek, že x-ové a y-ové souřadnice v průsečíku jsou pro obě trajektorie shodné. Na parametrické vyjádření pohybu se budeme dívat jako na parametrické rovnice přímek. Proto parametr t v druhé rovnici si označíme s (jinak by rovnice nedávaly smysl). Když známe hodnotu t (a s), kdy se přímky protnou, zpětným dosazením do parametrického vyjádření získáme souřadnice průsečíku (pro kontrolu dosazení provedeme pro oba parametry).
Pro další počítání parametr v druhé rovnici přepíšeme opět na t.
2)Pro určení času, kdy jsou si oba body nejblíže, si nejprve musíme určit závislost vzdálenosti obou bodů na čase. Tu určíme klasicky jako vzdálenost dvou bodů s tím rozdílem, že vzdálenost obou bodů závisí na čase (parametru t). Čas, kdy jsou si oba body nejblíže t_min následně určíme z podmínky, že první derivace musí být rovna 0. To, že se jedná o minimum si ověříme graficky (šlo by taktéž použít znaménko druhé derivace).
3)Nejmenší vzdálenost určíme dosazením času t_min do vztahu pro vzálenost obou bodů.

Alternativní způsob řešení
Nyní tento příklad vyřešíme geometricky a graficky. Ze znalosti parametrického vyjádření z bodu 1) a závislosti vzdálenosti bodů na čase z bodu 2) nakreslíme příslušné grafy. Pro odečítání je lepší mít grafy co největší, abychom jsme se dopouštěli menší chyby měření.
1)Průsečík trajektorií obou bodů získáme odečtením příslušné hodnoty z grafu.
2), 3)Čas, kdy jsou si oba body nejblíže, získám pomocí grafu závislosti vzdálenosti obou bodů na čase.Také si můžeme rovnou nechat vypisovat hodnoty při daném parametru t.

3 Řešení příkladu

Nastavení přesnosti vypisovaných číselných hodnot a zavolání balíků na kreslení grafů

```
(%i126) fpprintprec:4$
        load(draw)$
```

3.1 ad 1)

Parametrické vyjádření pohybů (přímek)

```
(%i128) X1 :[0, 1]+[3, -2]*t;
        X2 : [0, -1]+[6, 4]*t;
        x1 : X1[1]$
        y1 : X1[2]$
        x2 : X2[1]$
        y2 : X2[2]$
```
(%o128) $[3\,t,1-2\,t]$

(%o129) $[6\,t,4\,t-1]$

Přepsání parametu v druhé rovnici

```
(%i134) x2 : subst(t = s, x2);
        y2 : subst(t = s, y2);
```
(%o134) $6\,s$

(%o135) $4\,s-1$

Určení parametrů t a s

```
(%i136) kill(t,s);
        parametry : solve([x1 = x2, y1 = y2], [t, s]);
        rhs(parametry[1][1]);
        rhs(parametry[1][2]);
```
(%o136) *done*

(%o137) $[[t=\frac{1}{2},s=\frac{1}{4}]]$

(%o138) $\frac{1}{2}$

(%o139) $\frac{1}{4}$

Průsečík trajektorií obou bodů

```
(%i140) subst(t = rhs(parametry[1][1]),[x1,y1]);
        subst(s = rhs(parametry[1][2]),[x2,y2]);
```
(%o140) $[\frac{3}{2},0]$

(%o141) $[\frac{3}{2},0]$

Přepsání parametu v druhé rovnici zpět

```
(%i142) x2 : subst(s = t, x2);
        y2 : subst(s = t, y2);
```
(%o142) $6\,t$

(%o143) $4\,t-1$

3.2 ad 2)

Vzorec pro vzdálenost

```
(%i144) d:ratsimp(sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2));
```

(%o144) $\sqrt{45\,t^2-24\,t+4}$

Čas, kdy jsou body nejblíže

```
(%i145) tmin:rhs(solve(diff(d,t)=0,t)[1]);
        tmin,numer;
```

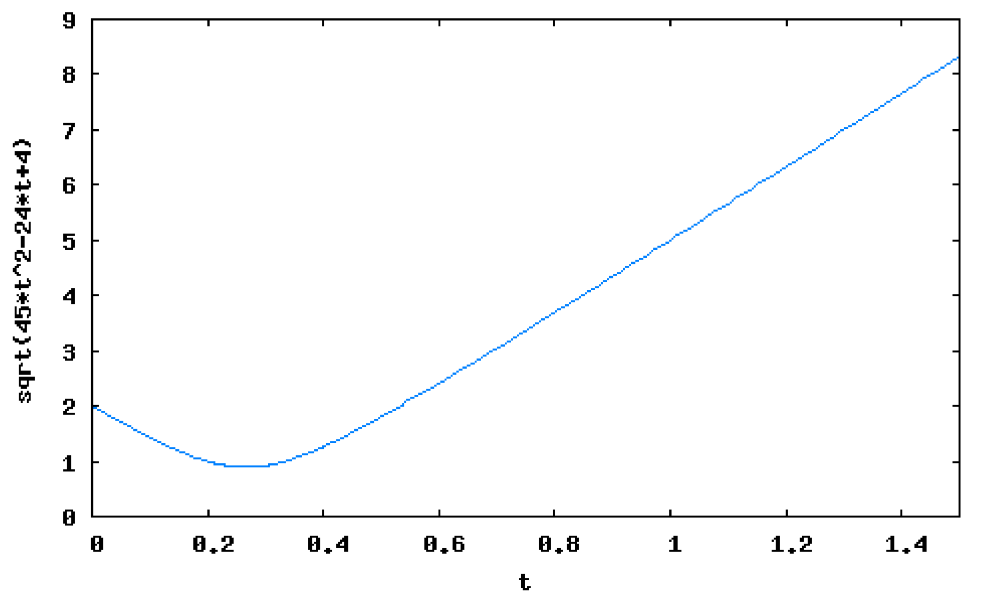
(%o145) $\frac{4}{15}$

(%o146) 0.27

Grafické ověření, že se jedná o minimum

```
(%i147) wxplot2d(d,[t,0,1.5]);
```

(%t147)



(%o147)

3.3 ad 3)

Mimimální vzdálenost bodů

```
(%i148) dmin:subst(t=tmin,d);
        dmin,numer;
```

(%o148) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

(%o149) 0.89

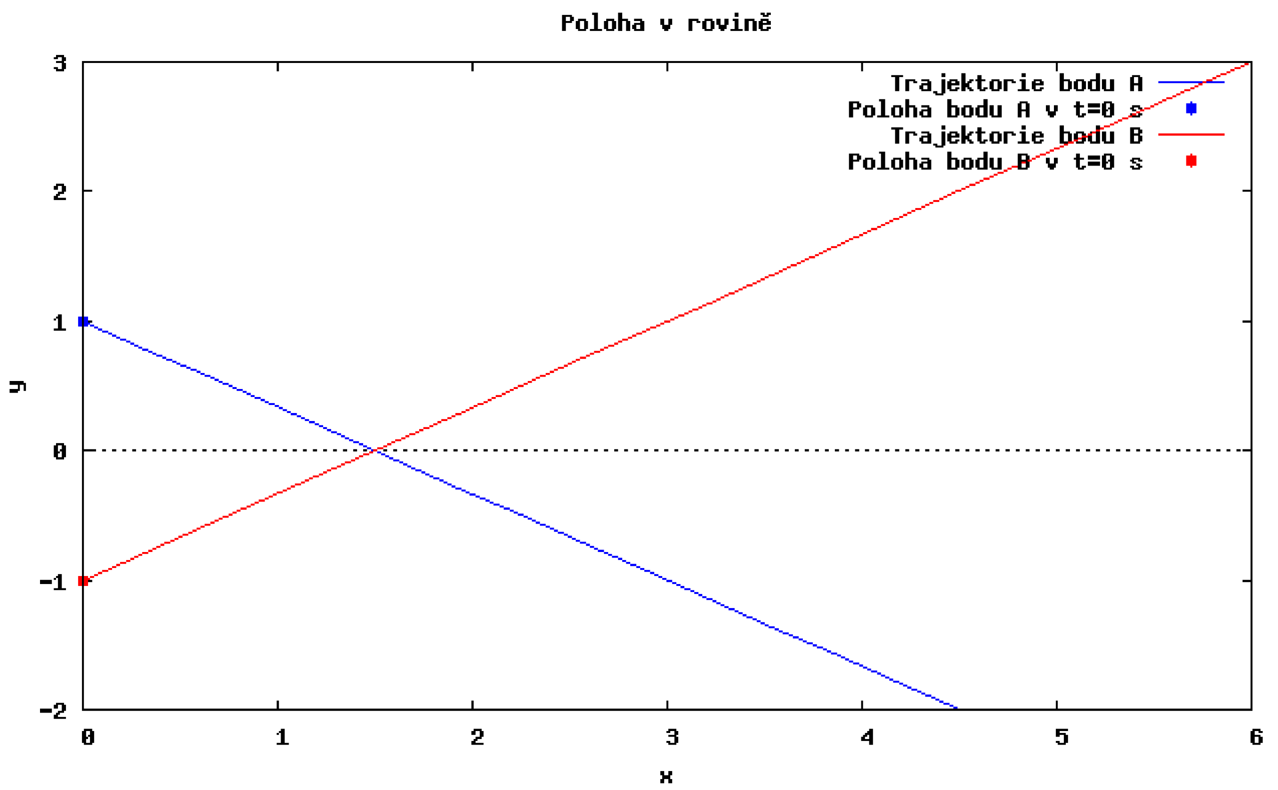
3.4 Alternativní způsob řešení

Bohužel Maxima zatím neumožňuje interaktivně měnit parametry, následující grafy jsou proto udělány jako náhrada animací

```
(%i150) x1(t):=''x1$
        y1(t):=''y1$
        x2(t):=''x2$
        y2(t):=''y2$
        d(t):=''d$
```

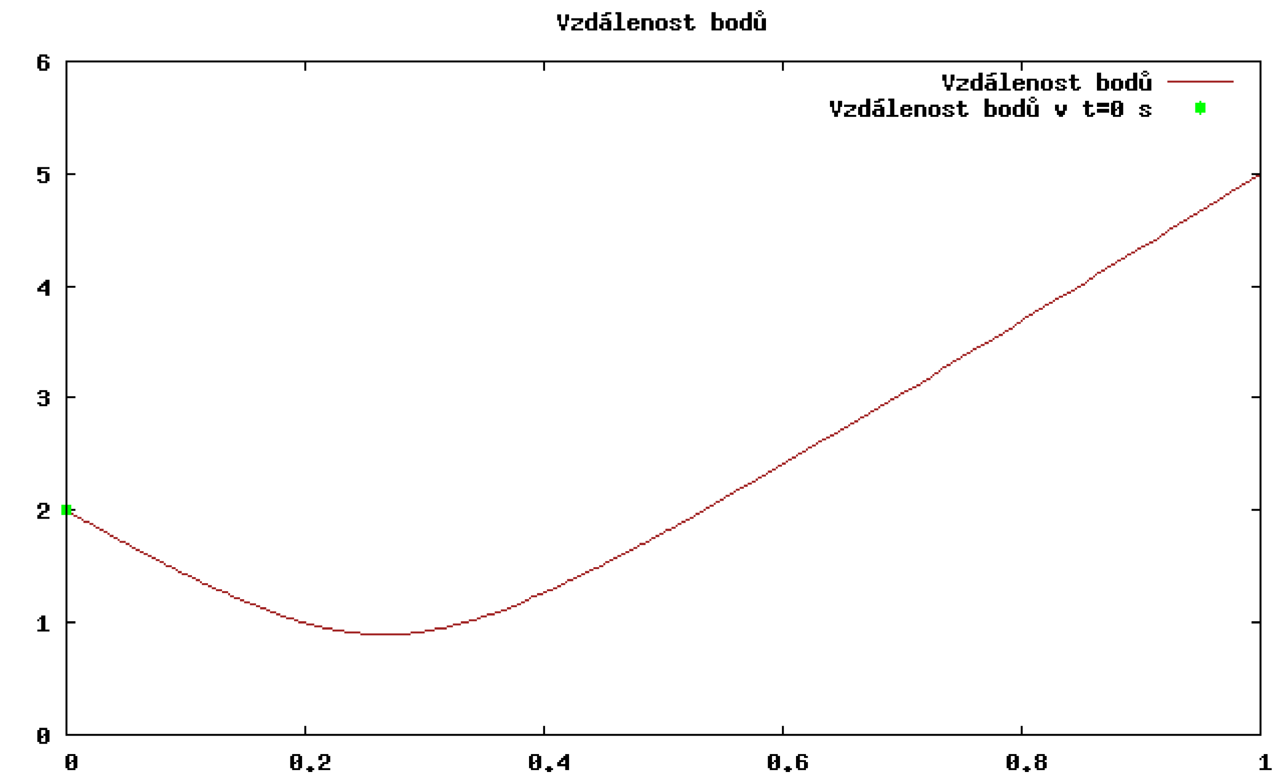
```
(%i155) t1:0$
        load(draw)$
        wxdraw2d(pic_width  = 650, pic_height = 400,
        key="Trajektorie bodu A",color=blue,parametric(x1(t),y1(t),t,0,3),
        key="Poloha bodu A v t=0 s",color=blue,point_size=1,point_type=7,
         points([[x1(t1),y1(t1)]]),
        key="Trajektorie bodu B",color=red,parametric(x2(t),y2(t),t,0,3),
        key="Poloha bodu B v t=0 s",color=red,point_size=1,point_type=7,
         points([[x2(t1),y2(t1)]]),
        xaxis=true,yaxis=true,xlabel="x",ylabel="y",
        xrange=[0,6], yrange=[-2,3],
        point_size=5,point_type=5,
        title= "Poloha v rovině")$
```

(%t157)



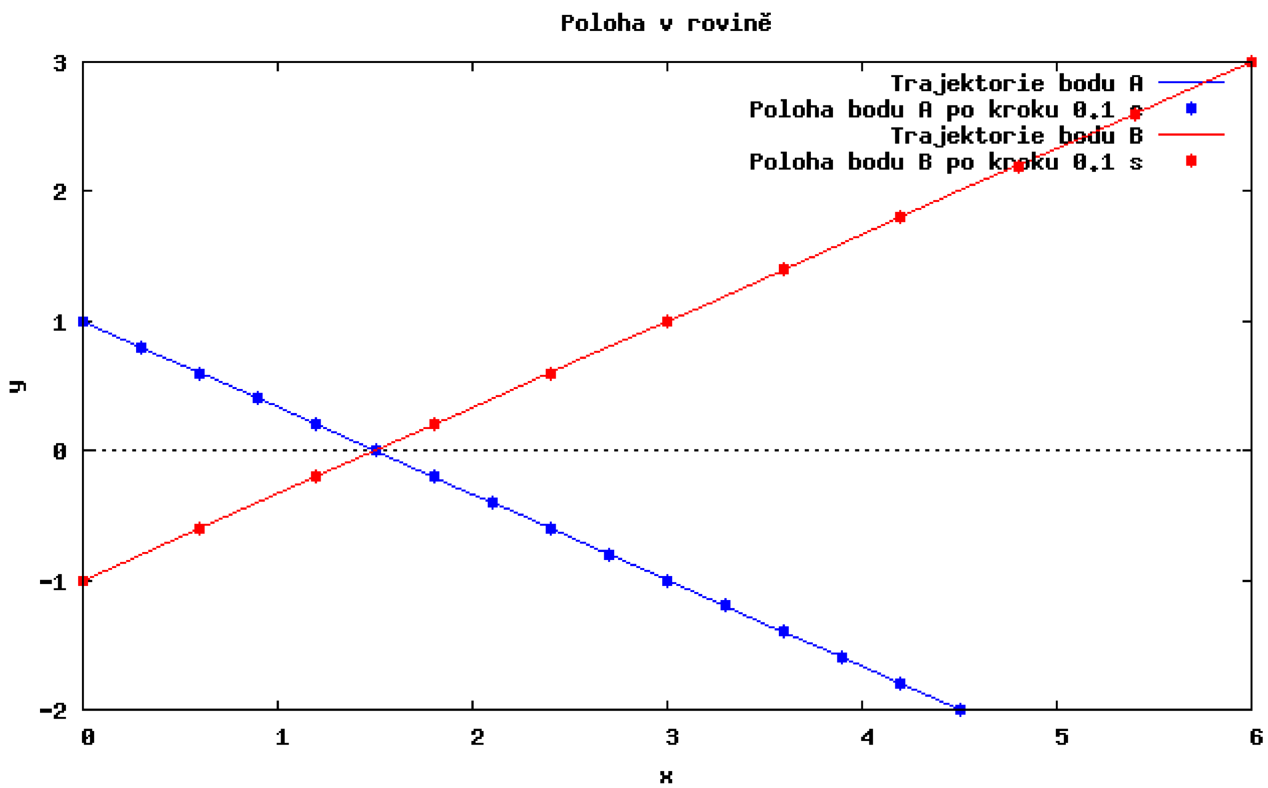
```
(%i158) wxdraw2d(pic_width  = 650, pic_height = 400,
        key="Vzdálenost bodů",color=brown,explicit(d(t),t,0,1),
        key="Vzdálenost bodů v t=0 s",color=green,point_size=1,
        point_type=7, points([[t1,d(t1)]]),
        xrange=[0,1], yrange=[0,6],
        point_size=5,point_type=5,
        title= "Vzdálenost bodů")$
```

(%t158)



```
(%i159) wxdraw2d(pic_width  = 650, pic_height = 400,
        key="Trajektorie bodu A",color=blue,parametric(x1(t),y1(t),t,0,3),
        key="Poloha bodu A po kroku 0.1 s",color=blue,point_size=1,
        point_type=7, points(makelist([x1(t1/10),y1(t1/10)],t1,0,20)),
        key="Trajektorie bodu B",color=red,parametric(x2(t),y2(t),t,0,3),
        key="Poloha bodu B po kroku 0.1 s",color=red,point_size=1,
        point_type=7, points(makelist([x2(t1/10),y2(t1/10)],t1,0,10)),
        xaxis=true,yaxis=true,xlabel="x",ylabel="y",
        xrange=[0,6], yrange=[-2,3],
        point_size=5,point_type=5,
        title= "Poloha v rovině")$
```

(%t159)



```
(%i160) wxdraw2d(pic_width  = 650, pic_height = 400,
        key="Vzdálenost bodů",color=brown,explicit(d(t),t,0,1),
        key="Vzdálenost bodů po kroku 0.1 s",color=green,
        point_size=1,point_type=7,
        points(makelist([t1/10,d(t1/10)],t1,0,10)),
        xrange=[0,1], yrange=[0,6],
        point_size=5,point_type=5,
        title= "Vzdálenost bodů")$
```

(%t160)