

Matematické programy a jejich použití

Průběh funkce

Zadání příkladu

Určete průběh funkce $f(x) = x^2 + x - 1$

Postup řešení příkladu

Příklad je možné řešit na různém stupni střední školy. Jelikož už tušíme, jak tato funkce bude vypadat na základě předchozích zkušeností, nemusíme řešit její spojitost (víme, že polynomy jsou spojité funkce).

- 1) Převedeme rovnici na vrcholový tvar a z něj určíme vrchol paraboly. Ze znaménka koeficientu u x^2 určíme, zda je parabola konkávní nebo konvexní.
- 2) Jelikož už na střední máme zkušenost s tím, jak vypadá graf $f(x) = x^2$, může použít i následující způsob. Určíme si průsečíky s osou x a následně uděláme jejich aritmetický průměr, což nám udá x -vou složku vrcholu paraboly. Parabola je totiž osově symetrická podle přímky rovnoběžné s osou y a procházející vrcholem paraboly. Tento postup lze použít i v případě, když parabola neprotíná osu x (imaginární složky kořenů x_1 a x_2 se v aritmetickém průměru kořenů odečtou). Druhou složku vrcholu určíme dosazením x -vé hodnoty do zadané funkce. Následně opět ze znalosti znaménka koeficientu u x^2 určíme, zda je parabola konkávní nebo konvexní.
- 3) Použitím diferenciálního počtu určíme první a druhou derivaci a na základě toho určíme, kde funkce roste, klesá a také kde má maximum či minimum.
 - 3a) Určíme 1. derivaci funkce - určíme kde funkce roste, klesá a body podezřelé z extrému
 - 3b) Určíme 2. derivaci funkce - určíme, kde je funkce konkávní a konvexní a také, které z bodů podezřelých z extrémů jsou maxima, minima, případně inflexní body

Řešení příkladu

Definování funkce $f(x) = x^2 + x - 1$

$$f[x_] := x^2 + x - 1$$

ad 1)

Rozložení výrazu $(x + a)^2 + b$

$$\text{Expand}[(x + a)^2 + b]$$

$$-1 + x + x^2$$

Určení parametrů a, b pro vrcholový tvar porovnáním koeficientů u x a x^0 v předchozí rovnici a rovnici funkce $f(x) = x^2 + x - 1$

```
Clear[a, b] (*Pro jistotu, aby pri prepocitavani vypocet nezlobil*)
koeficienty = Solve[{Coefficient[f[x], x, 1] == Coefficient[(x + a)^2 + b, x, 1],
  Coefficient[f[x], x, 0] == Coefficient[(x + a)^2 + b, x, 0]}, {a, b}]
a = koeficienty[[1, 2, 2]];
b = koeficienty[[1, 1, 2]];
```

$$\left\{ \left\{ b \rightarrow -\frac{5}{4}, a \rightarrow \frac{1}{2} \right\} \right\}$$

Souřadnice vrcholu paraboly

$$v = \{-a, b\}$$

$$\left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{5}{4} \right\}$$

ad 2)

Určení průsečíků s osou x

```
pruseciky = Solve[f[x] == 0, x]
x1 = pruseciky[[1, 1, 2]];
x2 = pruseciky[[2, 1, 2]];
```

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{1}{2} (-1 - \sqrt{5}) \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{5}) \right\} \right\}$$

Určení aritmetického průměru průsečíků s osou x - x-vá složka vrcholu paraboly

$$vx = \text{FullSimplify}\left[\frac{x1 + x2}{2}\right]$$

$$-\frac{1}{2}$$

Určení y-ové složky vrcholu paraboly

$$vy = \text{FullSimplify}[f[vx]]$$

$$-\frac{5}{4}$$

Jako v ad 1) nám vyšly souřadnice vrcholu

$$v2 = \{vx, vy\}$$

$$\left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{5}{4} \right\}$$

ad 3)První derivace funkce $f(x)$

$$D[f[x], x]$$

$$1 + 2x$$

Zkoumání, kdy je první derivace větší, rovna a menší než nula

$$\text{Reduce}[D[f[x], x] > 0, x]$$

$$x > -\frac{1}{2}$$

$$\text{Solve}[D[f[x], x] == 0, x]$$

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow -\frac{1}{2} \right\} \right\}$$

$$\text{Reduce}[D[f[x], x] < 0, x]$$

$$x < -\frac{1}{2}$$

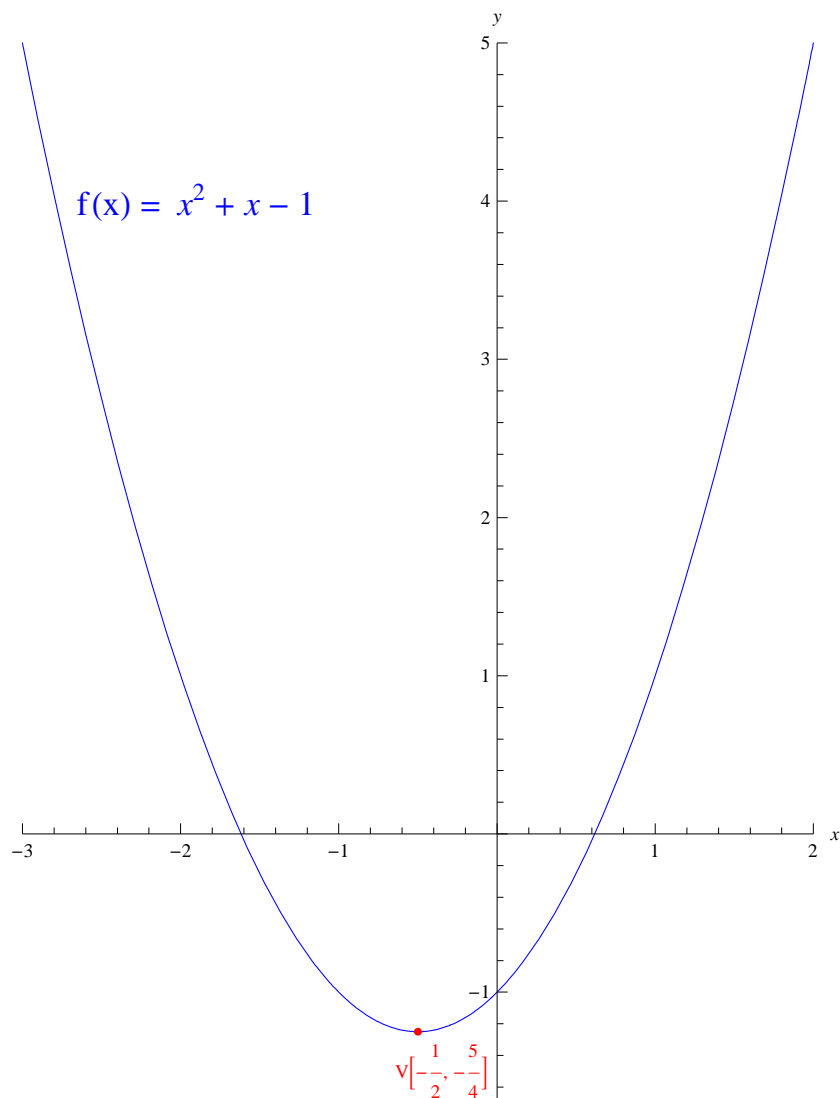
Druhá derivace funkce $f(x)$

$$D[f[x], \{x, 2\}]$$

$$2$$

Graf funkce $f(x) = x^2 + x - 1$

```
Plot[x^2 + x - 1, {x, -3, 2}, AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Blue}, AxesLabel -> {x, y},
PlotLabel -> Style["Graf funkce " x^2 + x - 1, 20], PlotRange -> {{-3, 2}, {-1.7, 5}},
Epilog -> {Inset[Style["f(x) = " x^2 + x - 1, 16, Blue], {-1.9, 4}],
Inset[Style["v"[-1/2, -5/4], Red], {-0.35, -1.5}],
{PointSize[0.01], Red, Point[{-1/2, -5/4}]}]}
```

Graf funkce $x^2 + x - 1$ 

Graf funkce $f(x) = x^2 + x - 1$ bez popisků