Matematické programy a jejich použití Průběh funkce

1 Zadání příkladu

Určete průběh funkce f(x) = x^2+x-1

2 Postup řešení příkladu

Příklad je možné řešit na různém stupni střední školy. Jelikož už tušíme, jak tato funkce bude vypadat na základě předchozích zkušeností, nemusíme řešit její spojitost (víme, že polynomy jsou spojité funkce).

1)Převedeme rovnici na vrcholový tvar a z něj určíme vrchol paraboly. Ze znaménka koeficientu u x^2 určíme, zda je parabola konkávní nebo konvexní.

2)Jelikož už na střední máme zkušenost s tím, jak vypadá graf f(x)=x^2, může použít i následujcí způsob. Určíme si průsečíky s osou x a následně uděláme jejich aritmetický průměr, což nám udá x-vou složku vrcholu paraboly. Parabola je totiž osově symetrická podle přímky rovnoběžné s osou y a procházející vrcholem paraboly. Tento postup lze použít i v případě, když parabola neprotíná osy x (imaginární složky kořenů x1 a x2 se v aritmetickém průměru kořenů odečtou). Druhou složku vrcholu určíme dosazením x-vé hodnoty do zadané funkce. Následně opět ze znalosti znaménka koeficientu u x^2 určíme, zda je parabola konkávní nebo konvexní.

3)Použitím diferenciálního počtu určíme první a druhou derivaci a na základě toho určíme, kde funkce roste, klesá a také kde má maximum či minimum.
3a)Určíme 1. derivaci funkce - určíme kde funkce roste, klesá a body podezřelé z extrému
3b)Určíme 2. derivaci funkce - určíme, kde je funkce konkávní a konvexní a také, které z bodů podezřelých z extrémů jsou maxima, minima, případně inflexní body

3 Řešení příkladu

Definování funkce f (x)=x^2+x-1

```
(%i1) f(x):=x^2+x-1;
```

(%o1) $f(x):=x^2+x-1$

3.1 ad 1)

Rozložení výrazu (x+a)^2+b

(%i2) expand((x+a)^2+b);

(%o2) $x^2+2\,a\,x+b+a^2$

Určení parametrů a, b pro vrcholový tvar porovnáním koeficientů u x a x^0 v předchozí rovnici a rovnici funkce f (x)=x^2+x-1 (v tomto programu je nutné předchozí výraz rozložit, ostaní programy toto rozložení dělají automaticky v rámci funkce coeff)

```
(%i3) kill(a,b);
      koeficienty:solve(
      [coeff(f(x), x, 1) = coeff(expand((x+a)^2+b), x, 1),
       coeff(f(x), x, 0) = coeff(expand((x+a)^2+b), x, 0)], [a, b]);
      a:rhs(koeficienty[1][1]);
      b:rhs(koeficienty[1][2]);
```

(%o3) *done*

(%o4) $[[a=\frac{1}{2},b=-\frac{5}{4}]]$

(%o5) $\frac{1}{2}$

(%o6) $-\frac{5}{4}$

Souřadnice vrcholu paraboly

(%i7) V:[-a,b];

(%o7) $[-\frac{1}{2},-\frac{5}{4}]$

3.2 ad 2)

Určení průsečíků s osou x

```
(%i8) pruseciky : solve(f(x), x);
      x1 : rhs(pruseciky[1]);
      x2 : rhs(pruseciky[2]);
```

(%o8) $[x=-\frac{\sqrt{5}+1}{2},x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}]$

(%o9) $-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

(%o10) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Určení aritmetického průměru průsečíků s osou x - x-vá složka vrcholu paraboly

(%i11) Vx:ratsimp((x1+x2)/2);

(%o11) $-\frac{1}{2}$

Určení y-ové složky vrcholu paraboly

```
(%i12) Vy:f(Vx);
```

(%o12) $-\frac{5}{4}$

Jako v ad 1) nám vyšly souřadnice vrcholu

```
(%i13) V2:[Vx,Vy];
```

(%o13) $[-\frac{1}{2},-\frac{5}{4}]$

3.3 ad 3)

První derivace funkce f (x)

```
(%i14) diff(f(x), x);
```

(%o14) $2x+1$

Zkoumání, kdy je první derivace větší, rovna a menší než nula (Maxima přímo neumí řešit nerovnosti, ale lze to obejít za pomoci balíčku fourier_elim)

```
(%i15) load(fourier_elim)$
       fourier_elim(diff(f(x), x) > 0, [x]);
```

(%o16) $[-\frac{1}{2}<x]$

```
(%i17) solve(diff(f(x), x) = 0, x);
```

(%o17) $[x=-\frac{1}{2}]$

```
(%i18) fourier_elim(diff(f(x), x) < 0, [x]);
```

(%o18) $[x<-\frac{1}{2}]$

Druhá derivace funkce f(x)

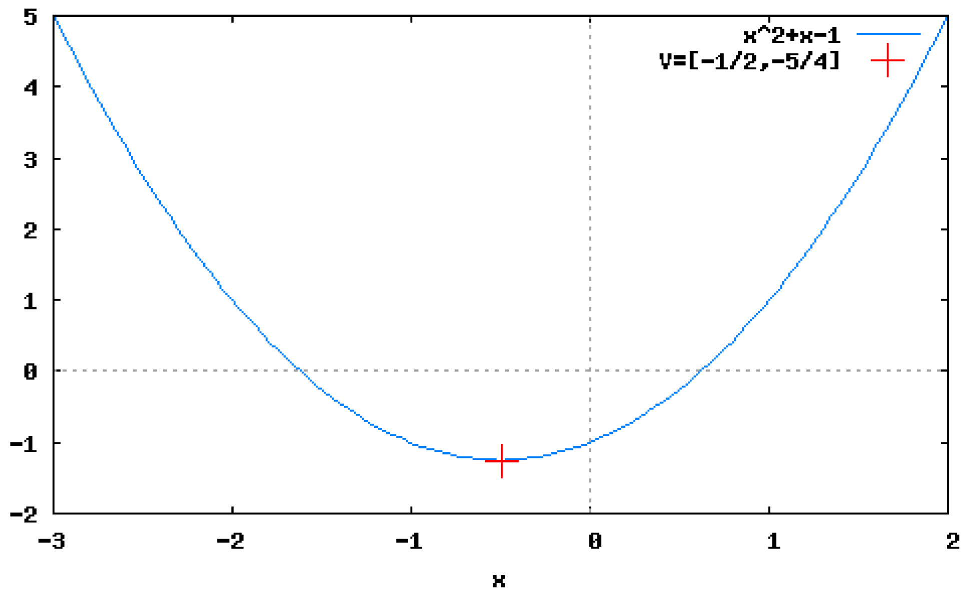
4 Graf funkce f(x)=x^2+x-1

Je více způsobů, jak si nechat zobrazit grafy v programu Maxima, níže jsou použity dva z nich

```
(%i19) load(draw)$
```

(%i20)
```
wxplot2d([f(x),[discrete,[V]]],[x,-3,2],
[style,lines,[points,5,2,3]],[legend,f(x),"V=[-1/2,-5/4]"]);
```

(%t20)



(%o20)

(%i22)
```
wxdraw2d(
key="f(x)=x^2+x-1",color=blue,explicit(f(x),x,-3,2),
key="V=[-1/2,-5/4]",color=red, points([V]),
xaxis=true,yaxis=true,xlabel="x",ylabel="y",
yrange=[-2,2],
point_size=5,point_type=3,
title= "Graf funkce f(x)=x^2+x-1")$
```

(%t22)