Matematické programy a jejich použití

Taylorův polynom

Zadání příkladu

Vypočítejte Taylorův polynom stupně 5 v bodě 0 z funkce tg(x).

Postup řešení příkladu

1) Výhodou matematických programů je, že si můžeme Taylorův polynom libovolného stupně můžeme nechat rovnou vypsat pomocí funkce series, případně taylor (Maple umožňuje použít dvě funkce pro určení Taylorova rozvoje). Následně si můžeme graficky ověřit jak se Taylorův polynom daného stupně shoduje s danou funkcí.
2) Můžeme taktéž postupovat klasicky podle vztahu pro Taylorův polynom n-tého stupně v bodě 0: $\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i$. Nejprve si určíme i-té derivace funce tg(x), následně hodnoty derivací v bodě 0 a poté tyto derivace vydělíme příslušným i-tým faktoriálem. Tím dostaneme koeficienty u x^i mocniny. Samotný Taylorův polynom dostane skalárním součinem vektoru koeficientů s vektorem mocnin ($1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$).

Řešení příkladu

```
> restart;
```

Nastavení stupně Taylorova polynomu funkce tg(x)

```
> n := 5 :
```

ad 1)

Taylorův rozvoj stupně 5 v bodě 0 z funkce tg(x) (funkce series a taylor vrací n členů Taylorova rozvoje, ne rozvoj do n-té mocniny)

```
> series(tan(x), x = 0, n + 1) ;
  rozvoj := taylor(tan(x), x = 0, n + 1) ;
```

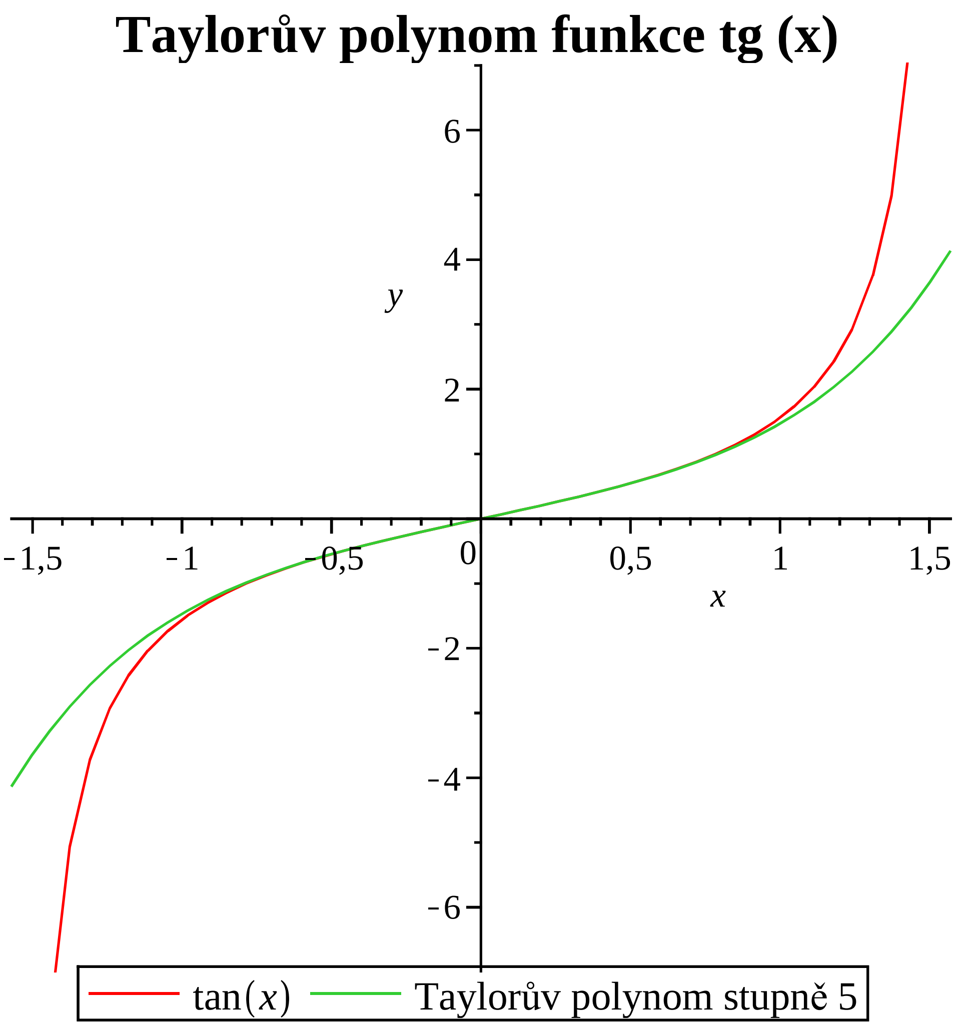
$$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^6)$$

$$rozvoj := x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^6) \qquad \textbf{(1.1.3.1.1.1)}$$

Grafické ověření shody funkce tg(x) s Taylorovým polynomem stupně 5 (funkce convert(rozvoj,polynom) vyrábí z Taylorova rozvoje Taylorův polynom)

```
> rozvoj1 := convert(rozvoj, polynom);
  plot([tan(x), rozvoj1], x = -π/2 .. π/2, y = -7 ..7, legend = [tan(x),
     "Taylorův polynom stupně 5"], title
     = typeset("Taylorův polynom funkce tg (x)"), titlefont = [TIMES,
     BOLD, 16]) ;
```

$$rozvoj1 := x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$$



ad 2)

Tabulka derivací funkce tg(x) (nultá derivace není v Maple definována)

> *simplify*([tan(x), seq(diff(tan(x), x$i), i = 1 ..n)]) ;

$$\left[\tan(x), \frac{1}{\cos(x)^2}, \frac{2\sin(x)}{\cos(x)^3}, -\frac{2\left(2\cos(x)^2-3\right)}{\cos(x)^4}, -\frac{8\left(\cos(x)^2-3\right)\sin(x)}{\cos(x)^5}, \frac{8\left(2\cos(x)^4+15-15\cos(x)^2\right)}{\cos(x)^6}\right] \quad \textbf{(1.1.3.2.1.1)}$$

Tabulka hodnot derivací funkce tg(x) v bodě 0

> *simplify*(*subs*(x = 0, [tan(x), *seq*(diff(tan(x), x$i), i = 1 ..n)])) ;

$$[0, 1, 0, 2, 0, 16] \quad \textbf{(1.1.3.2.2.1)}$$

Tabulka koeficientů Taylorova polynomu stupně 5 funkce tg(x) v bodě 0

> $koeficienty := simplify\left(subs\left(x = 0, \left[\frac{\tan(x)}{0!}, seq\left(\frac{\mathrm{diff}(\tan(x), x\$i)}{i!}, i = 1 ..n\right)\right]\right)\right)$;

$$koeficienty := \left[0, 1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{2}{15}\right] \quad \textbf{(1.1.3.2.3.1)}$$

Taylorův polynom stupně 5 funkce tg(x) v bodě 0

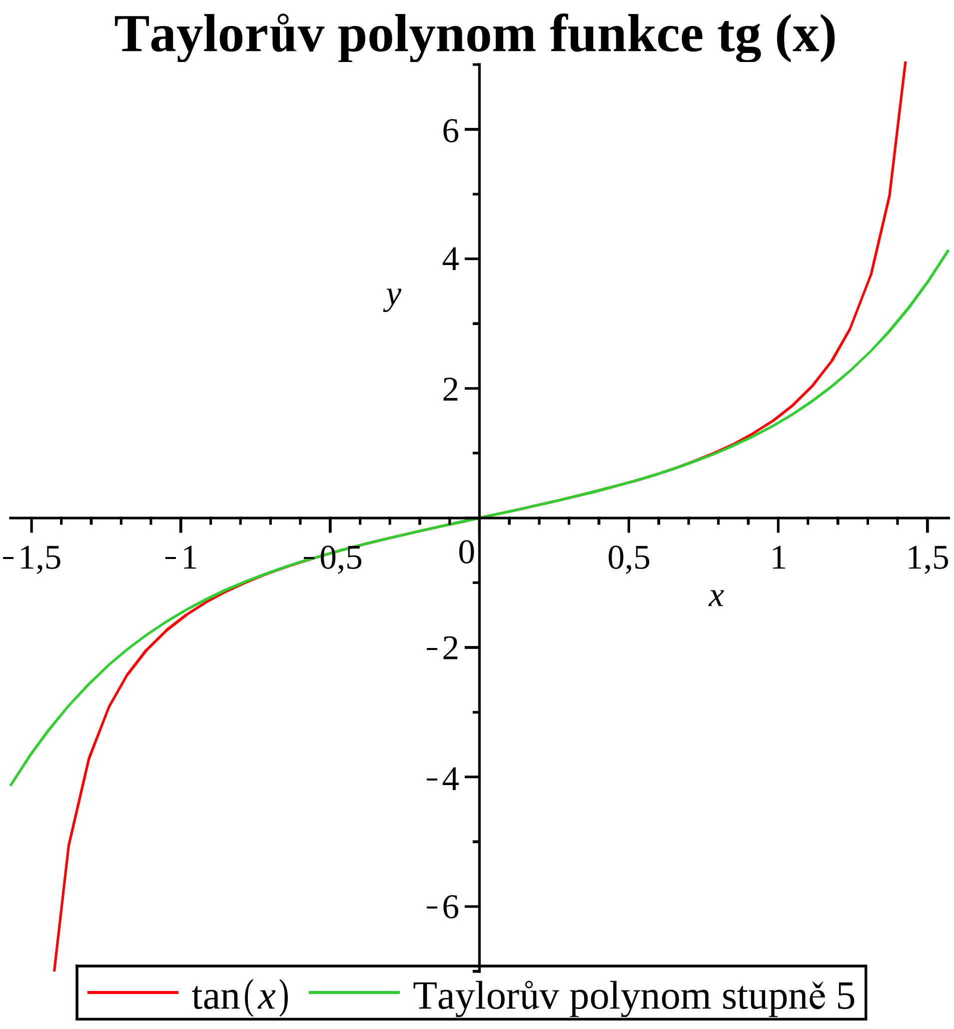
> $mocniny := [seq(x^i, i = 0..5)];$
> $rozvoj2 := Vector(koeficienty)Vector(mocniny);$

$$mocniny := [1, x, x^2, x^3, x^4, x^5]$$

$$rozvoj2 := x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 \tag{1.1.3.2.4.1}$$

Grafické ověření shody funkce tg(x) s Taylorovým polynomem stupně 5

> $plot\left([\tan(x), rozvoj2], x = -\frac{\pi}{2}..\frac{\pi}{2}, y = -7..7, legend = [\tan(x),\right.$ "Taylorův polynom stupně 5"], $title$ = $typeset$("Taylorův polynom funkce tg (x)"), $titlefont$ = [$TIMES$, $BOLD$, 16]) ;



>