Matematické programy a jejich použití

Taylorův polynom

Zadání příkladu

Vypočítejte Taylorův polynom stupně 5 v bodě 0 z funkce tg(x).

Postup řešení příkladu

1) Výhodou matematických programů je, že si můžeme Taylorův polynom libovolného stupně můžeme nechat rovnou vypsat pomocí funkce series.Následně si můžeme graficky ověřit jak se Taylorův polynom daného stupně shoduje s danou funkcí.
2) Můžeme taktéž postupovat klasicky podle vztahu pro Taylorův polynom n-tého stupně v bodě 0: $\sum_{i=0}^{n} \left[\frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i \right]$.

Nejprve si určíme i-té derivace funce tg(x), následně hodnoty derivací v bodě 0 a poté tyto derivace vydělíme příslušným i-tým faktoriálem. Tím dostaneme koeficienty u x^i mocniny. Samotný Taylorův polynom dostane skalárním součinem vektoru koeficientů s vektorem mocnin $(1,x,x^2,x^3,x^4,x^5)$.

Řešení příkladu

Nastavení stupně Taylorova polynomu funkce tg(x)

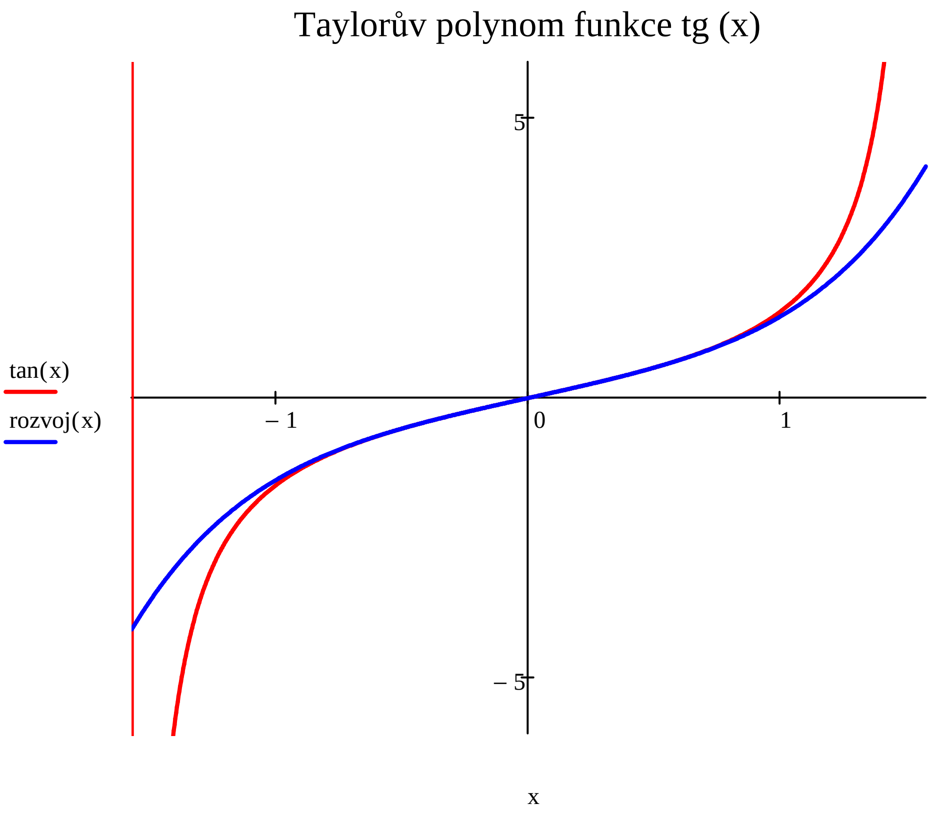
$n := 5$

ad 1)

Taylorův rozvoj stupně 5 v bodě 0 z funkce tg(x)

$$\mathrm{rozvoj}(x) := \tan(x) \text{ series}, x, 5 \;\rightarrow x + \frac{x^3}{3} + \frac{2\cdot x^5}{15}$$

Grafické ověření shody funkce tg(x) s Taylorovým polynomem stupně 5



ad 2)

Tabulka derivací funkce tg(x)

$i := 0..n$

$$\frac{d^i}{dx^i}\tan(x) \text{ simplify } \rightarrow \begin{bmatrix} \tan(x) \\ \tan(x)^2 + 1 \\ 2\cdot\tan(x)\cdot\left(\tan(x)^2 + 1\right) \\ 2\cdot\left(3\cdot\tan(x)^2 + 1\right)\cdot\left(\tan(x)^2 + 1\right) \\ 8\cdot\tan(x)\cdot\left(3\cdot\tan(x)^2 + 2\right)\cdot\left(\tan(x)^2 + 1\right) \\ 8\cdot\left(\tan(x)^2 + 1\right)\cdot\left(15\cdot\tan(x)^4 + 15\cdot\tan(x)^2 + 2\right) \end{bmatrix}$$

Tabulka hodnot derivací funkce tg(x) v bodě 0.

Pro zachování analogie s ostaními matematickými programy je použita funkce substituate. Má ale nevýhodu v tom,že pokud výsledek substituce chceme přiřadit proměnné musíme daný výraz nejprve přiřadit nějaké proměnné a až poté se dá provést příkaz substituate s přiřazením (jinak se oběví chybová hláška).
Alternativně by šlo definováním x:=0 určit příslušné derivace v bodě 0, avšak při určení polynomu se musí x "odpřiřadit" příkazem x:=x.

$$\frac{\frac{d^i}{dx^i}\tan(x)}{i!} \text{ substitute}, x = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{15} \end{pmatrix}$$

Tabulka koeficientů Taylorova polynomu stupně 5 funkce tg(x) v bodě 0

$$koeficienty0_i := \frac{\frac{d^i}{dx^i}\tan(x)}{i!}$$

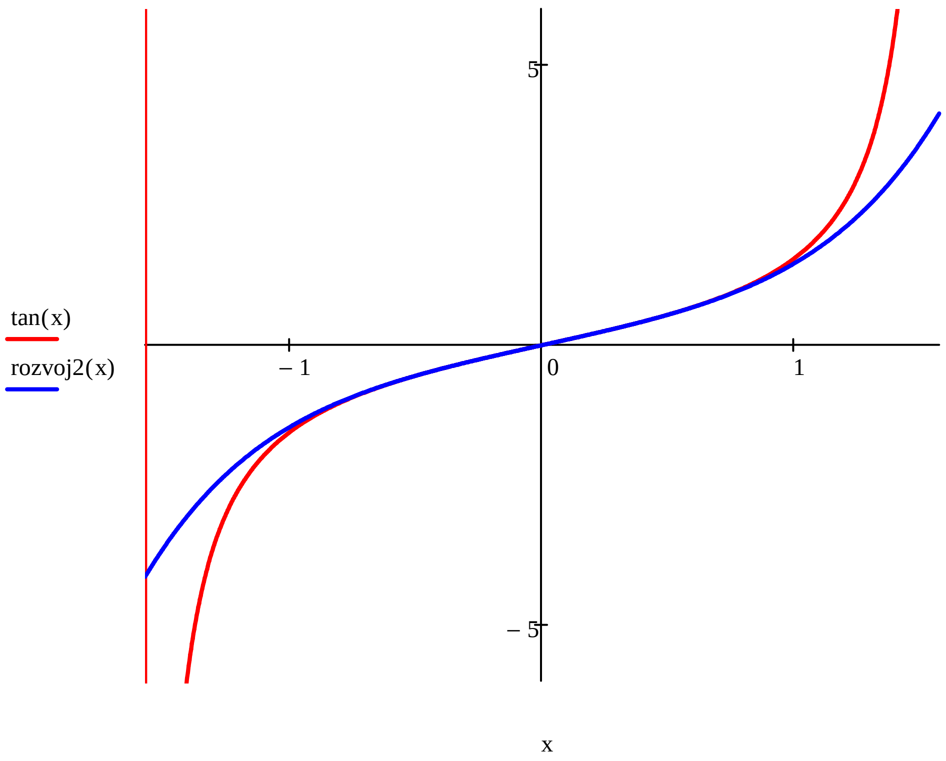
$$koeficienty := koeficienty0 \text{ substitute}, x = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{15} \end{pmatrix}$$

Taylorův polynom stupně 5 funkce tg(x) v bodě 0

$\text{mocniny}_i := x^i$

$\text{rozvoj2}(x) := \text{koeficienty}^T \cdot \text{mocniny} \rightarrow \frac{2 \cdot x^5}{15} + \frac{x^3}{3} + x$

Taylorův polynom funkce tg (x)



Alternativní určení derivací v bodě 0

$x := 0$

$$\frac{d^i}{dx^i}\tan(x) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$koeficienty3_i := \frac{\frac{d^i}{dx^i}\tan(x)}{i!}$$

$$koeficienty3 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{15} \end{pmatrix}$$

Taylorův polynom stupně 5 funkce tg(x) v bodě 0

$x := x$

$mocniny_i := x^i$

$$rozvoj3(x) := koeficienty3^T \cdot mocniny \rightarrow \frac{2 \cdot x^5}{15} + \frac{x^3}{3} + x$$