Matematické programy a jejich použití

Průběh funkce

Zadání příkladu

Vyšetřete průběh funkce $y(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.

Postup řešení příkladu

Nejprve si definujeme funkci, se kterou budeme pracovat, následně (což je výhoda matematických programů), si nakreslíme průběh funkce pro názornost - ať máme představu jak daná funkce vypadá. Dále už postupujeme podle standartního vyšetřování průběhu funkce:
Definiční obor
Průsečíky s osou x a osou y
Limity v krajních bodech a bodech nespojitosti
Asymptoty
První derivace
Nulové body
Funkce roste, klesá
Druhá derivace
Nulové body
Funkce je konvexní, konkávní
Maximum, minimum funkce
Obor hodnot
Graf funkce

Řešení příkladu

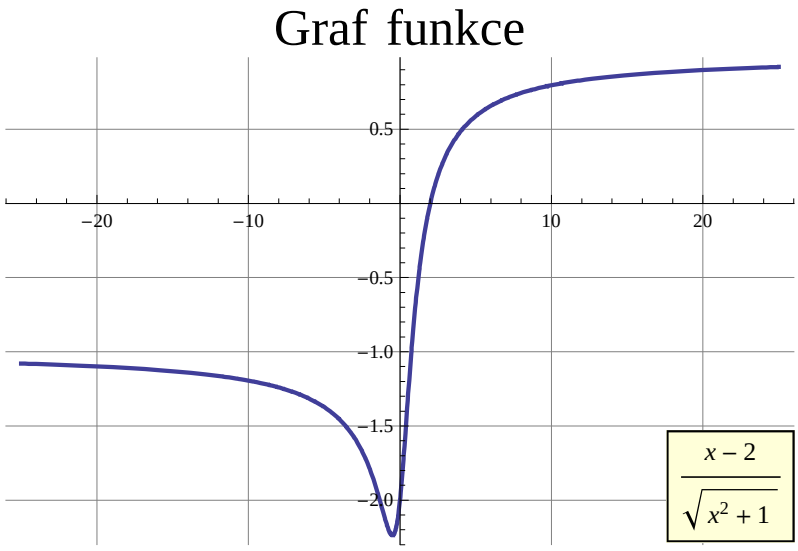
- **Definování vyšetřované funkce**

In[101]:=
```
f[x_] := (x - 2)/Sqrt[x^2 + 1]
```

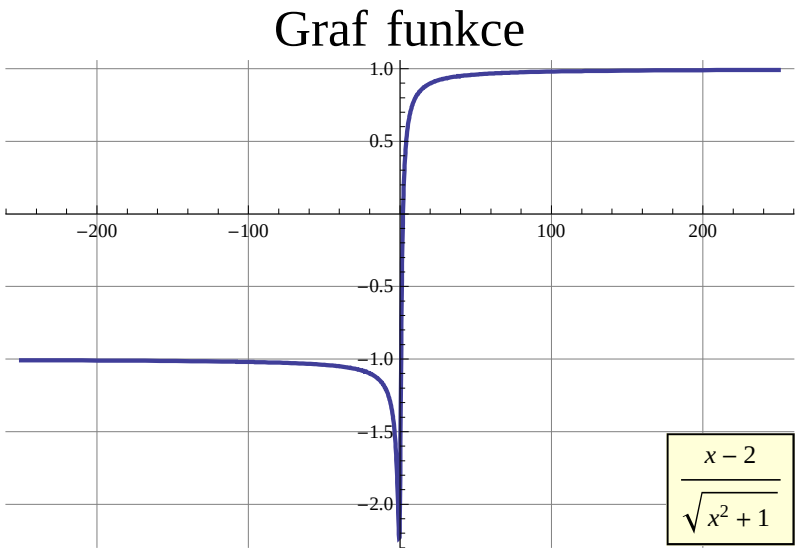
- **Graf funkce (pro představu, jak daná funkce vypadá)**

In[102]:=
```
Show[Plot[f[x], {x, -25, 25},
  PlotStyle → {Thick}, GridLines → Automatic], PlotLabel → Style["Graf funkce", 24],
 ImageSize → 370, Epilog → Inset[Framed[Style[f[x], 12], Background → LightYellow],
   {Right, Bottom}, {Right, Bottom}]]
Show[Plot[f[x], {x, -250, 250},
  PlotStyle → {Thick}, GridLines → Automatic], PlotLabel → Style["Graf funkce", 24],
 ImageSize → 370, Epilog → Inset[Framed[Style[f[x], 12], Background → LightYellow],
   {Right, Bottom}, {Right, Bottom}]]
```

Out[102]=



Out[103]=



Definiční obor

Podmínky se zadávají ručně (pokud podmínka vrátí hodnotu True, podmínka je splněna vždy.

První podmínka

$\sqrt{x^2+1} \neq 0$

```
In[104]:= Reduce[Sqrt[x^2 + 1] ≠ 0, x, Reals]
Out[104]= True
```

Druhá podmínka

$x^2+1 \geq 0$

```
In[105]:= Reduce[x^2 + 1 ≥ 0, x]
Out[105]= x ∈ Reals
```

Definiční obor (průnik předchozích podmínek)

```
In[106]:= Reduce[Sqrt[x^2 + 1] ≠ 0 && x^2 + 1 ≥ 0, x]
Out[106]= x ∈ Reals
```

Průsečíky s osou x a osou y

Průsečíky s osou x

```
In[107]:= Reduce[f[x] == 0, x]
Out[107]= x == 2
```

Průsečík s osou y

```
In[108]:= f[0]
Out[108]= -2
```

Limity v + ∞, -∞ a bodech nespojitosti

Limita do + ∞

```
In[109]:= lim1 = Limit[f[x], x → Infinity]
Out[109]= 1
```

Limita do - ∞

```
In[110]:= lim2 = Limit[f[x], x → -Infinity]
Out[110]= -1
```

Asymptoty (ve tvaru ax+b)

Asymptota do + ∞

In[111]:=
```
a1 = Limit[f[x] / x, x → Infinity]
```
Out[111]= 0

In[112]:=
```
b1 = Limit[f[x] - a1 * x, x → Infinity]
```
Out[112]= 1

Limita f (x) - (ax + b) (pokud je tato limita rovna 0, asymtota existuje)

In[113]:=
```
Limit[f[x] - (a1 * x + b1), x → Infinity]
```
Out[113]= 0

Asymptota do - ∞

In[114]:=
```
a2 = Limit[f[x] / x, x → -Infinity]
```
Out[114]= 0

In[115]:=
```
b2 = Limit[f[x] - a1 * x, x → -Infinity]
```
Out[115]= -1

Limita f (x) - (ax + b) (pokud je tato limita rovna 0, asymtota existuje)

In[116]:=
```
Limit[f[x] - (a2 * x + b2), x → -Infinity]
```
Out[116]= 0

První derivace

In[117]:=
```
D[f[x], x]
```
Out[117]= $-\frac{(-2+x)\,x}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

První derivace zjednodušeno

In[118]:=
```
FullSimplify[D[f[x], x]]
derivace[x_] = FullSimplify[D[f[x], x]]
```
Out[118]= $\frac{1+2\,x}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$

Out[119]= $\frac{1+2\,x}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$

- **Nulové body první derivace**

In[120]:=
```
koreny = x /. Solve[derivace[x] == 0, x, Reals]
N[koreny, 3]
nulovebody = Table[{x, f[x]}, {x, koreny}] // FullSimplify
```

Out[120]= $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

Out[121]= $\{-0.500\}$

Out[122]= $\left\{\left\{-\frac{1}{2}, -\sqrt{5}\right\}\right\}$

- **Funkce roste**

In[123]:=
```
FullSimplify[Reduce[derivace[x] > 0, x, Reals]]
N[%, 3]
```

Out[123]= $x > -\frac{1}{2}$

Out[124]= $x > -0.500$

- **Funkce klesá**

In[125]:=
```
FullSimplify[Reduce[derivace[x] < 0, x, Reals]]
N[%, 3]
```

Out[125]= $x < -\frac{1}{2}$

Out[126]= $x < -0.500$

- **Druhá derivace**

In[127]:=
```
D[f[x], x, x]
```

Out[127]= $\frac{3(-2+x)x^2}{(1+x^2)^{5/2}} - \frac{-2+x}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{2x}{(1+x^2)^{3/2}}$

- **Druhá derivace zjednodušeno**

In[128]:=
```
derivace2[x_] = FullSimplify[D[f[x], x, x]]
```

Out[128]= $\frac{2-x(3+4x)}{(1+x^2)^{5/2}}$

- **Nulové body druhé derivace**

In[129]:=
```
koreny2 = x /. Simplify[Solve[derivace2[x] == 0, x, Reals]]
N[%, 3]
nulovebody2 = Table[{x, f[x]}, {x, koreny2}] // Simplify
```

Out[129]= $\left\{\frac{1}{8}\left(-3-\sqrt{41}\right), \frac{1}{8}\left(-3+\sqrt{41}\right)\right\}$

Out[130]= $\{-1.18, 0.425\}$

Out[131]= $\left\{\left\{\frac{1}{8}\left(-3-\sqrt{41}\right), -\sqrt{\frac{1}{6}\left(19+\sqrt{41}\right)}\right\}, \left\{\frac{1}{8}\left(-3+\sqrt{41}\right), \frac{-19+\sqrt{41}}{\sqrt{114-6\sqrt{41}}}\right\}\right\}$

Funkce je konvexní

In[132]:=
```
FullSimplify[Reduce[derivace2[x] > 0, x, Reals]]
N[%, 3]
```

Out[132]= $\frac{1}{8}\left(-3-\sqrt{41}\right) < x < \frac{1}{8}\left(-3+\sqrt{41}\right)$

Out[133]= $-1.18 < x < 0.425$

- **Funkce je konkavní**

In[134]:=
```
FullSimplify[Reduce[derivace2[x] < 0, x, Reals]]
N[%, 3]
```

Out[134]= $3+\sqrt{41}+8x<0 \,||\, 3+8x>\sqrt{41}$

Out[135]= $9.40+8.00x<0 \,||\, 3.00+8.00x>6.40$

Maximum, minimum funkce

- **Pomocná funkce na rozhodnutí, zda se jedná o maximum, minimum, případně inflexní bod**

In[136]:=
```
Maxmin[x_] :=
 Piecewise[{{"Maximum", x < 0}, {"Minimum", x > 0}, {"Inflexní bod", x == 0}}]
```

- **Maximum, minimum funkce**

Maximum, minimum a inflexní body se určují z x-ových bodů, pro které je první derivace rovna 0. Tyto body jsou uloženy v proměnné koreny.

In[137]:=
```
Table[{x, f[x], Maxmin[derivace2[x]]}, {x, koreny}]
```

Out[137]= $\left\{\left\{-\frac{1}{2}, -\sqrt{5}, \text{Minimum}\right\}\right\}$

Obor hodnot

Obor hodnot se určuje jako maximum a minimum z bodů podezřelých z extrémů a limit v krajních bodech (a bodech nespojitosti).

- **Dolní mez**

In[138]:=
```
Min[Table[f[x], {x, koreny}], lim1, lim2]
```

Out[138]= $-\sqrt{5}$

- **Horní mez**

In[139]:=
```
Max[Table[f[x], {x, koreny}], lim1, lim2]
```

Out[139]= 1