Zadání písemné práce z Klasické elektrodynamiky

Martin Kihoulou

Úloha 1

Za předpokladu, že x, y, z jsou kartézské a r, θ, ϕ sférické souřadnice, spočtěte $\Delta(\vec{A} \cdot \vec{B})$ pro vektorová pole

$$\vec{A} = \frac{1}{r^k}\vec{e}_\theta \;, \qquad \vec{B} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{e}_z \;.$$

Řešení. Při počítání skalárního součinu brzy zjsitíme, že se vyplatí vyjádřit vektrové pole B ve sférických souřadnicích. To lze nejsnáze s použitím gradientu ve sférických souřadnicích, který dá

$$\vec{e}_x = \nabla x = \sin\theta\cos\phi\vec{e}_r + \cos\theta\cos\phi\vec{e}_\theta - \sin\phi\vec{e}_\phi$$

$$\vec{e}_y = \nabla y = \sin\theta\sin\phi\vec{e}_r + \cos\theta\sin\phi\vec{e}_\theta - \cos\phi\vec{e}_\phi$$

$$\vec{e}_z = \nabla z = \cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta e_\theta$$

a pak transformované pole

$$\vec{B} \;=\; \frac{\cos^2\theta\vec{e}_r}{\sin\theta} - \cos\theta\vec{e}_\theta \;.$$

Pro skalární součin máme

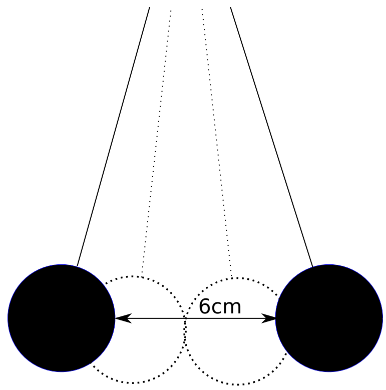
$$\vec{A}\cdot\vec{B} \;=\; -\frac{r^{-k+1}\cos\theta}{r}$$

a konečně

$$\Delta(\vec{A}\cdot\vec{B}) \;=\; -\left(1+k\right)\left(k-2\right)r^{-k-2}\cos\theta \;.$$

Úloha 2

Z dvoučtverců o straně 20 cm alobalu o tloušťce 15μm se zmačkáním vytvoří kuličky o průměru 4 cm. Ty se v jednom bodě zavěsí na 1 m dlouhé nehmotné vlákno. Po nabití obou stejným nábojem se původně dotýkající se kuličky od sebe oddálí na vzdálenost 6 cm. Jaký náboj a napětí je na kuličkách? Uveďte hodnoty jak pro situaci, kdy zanedbáváme vlastní kapacity, tak pro první aproximaci, kdy jsme na cvičení dostali, že $C_{12} = -4\pi\epsilon_0 a^2/d$ (poloměr a, vzdálenost středů d). Kde přibližně a jaká je nejvyšší hodnota elektrického pole [V/m]?



Řešení: Základní problém, který je potřeba rozmyslet, je zda lze v dané situaci určit náboj z Coulombova zákona. Na přednášce jsme viděli, že vložením vodivé kuličky o poloměru a do *homogenního* pole $\vec{E}_0$ se na jejím povrchu indukují náboje, které v důsledku vedou k tomu, že složené pole je popsáno potenciálem představujícím kombinaci pole homogenního a pole dipólu

$$\Phi = -\vec{E}_0.\vec{r}\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right).$$

Elektrická intenzita této (dipólové) poruchy homogenního pole ubývá s třetí mocninou vzdálenosti a sama hodnotu E_0 aproximující pole první kuličky v místě druhé ubývá s druhou mocninou vzdálenosti. To dohromady dává pátou mocninu. Můžeme tedy předpokládat, že ve výsledku se při určování velikosti náboje čistě za použití Coulombova zákona (kdy intezita a síla ubývá s druhou mocninou vzdálenosti) dopouštíme zanedbáním nerovnoměrného rozložení náboje na kuličkách *relativní* chyby úměrné $(a/d)^3$. Přesnější analýza dá $4(a/d)^3 \approx 4\%$.

Proto při $\rho_{Al} = 2700$ kg m^{-3} pro hmotu kuliček dostáváme $m \doteq 1.62$ g, a pro $\sin\alpha \approx 5/102$ vychází síla 780μN. Tou se ve vzdálenosti 10cm odpuzuji dva bodové náboje $Q = 29$ nC.

V nulté aproximaci pak započítáváme jen kapacitu samotné kuličky $C_{11}^{(0)} = C_{22}^{(0)} = 4\pi\epsilon_0 a \approx 2.22$pF, a tedy napětí na jejím povrchu vzhledem k nekonečnu vychází $U_1^{(0)} = Q/C_{11} \approx 13$ kV.

Při započtení vzájemné kapacity máme při zanedbání členů $O((a/d)^2)$ stále $C_{11}^{(1)} = C_{22}^{(1)} = 4\pi\epsilon_0 a$ musíme vyřešit úlohu $Q_1 = C_{11}U_1 + C_{12}U_2 = (C_{11} + C_{12})U_1$, kde užíváme symetrii $U_1 = U_2$, tedy $U_1^{(1)} \approx 16.5$ kV.

V zadání uvedenou hodnotu aproximace $C_{12}^{(1)}$ jsme na cvičení odvodili tak, že jsme předpokládali, že pole lze superonovat, aniž se příliš změní tvar ekvipotenciál z původního přesně sférického tvaru pro $d \to \infty$. Je tedy přípustné místo užití uvedené hodnoty vzájené kapacity spočíst potenciál superpozicí polí dvou nábojů. Podle toho které místo na povchu kuličky si vybereme dostaneme při výše uvedené hodnotě náboje poteciálv v rozsahu $15.4 - 16.5$ kV. Tento rozsah $\approx \pm 3\%$ hodnoty napětí ilustruje jaký je dopad zanedbání členů $(a/d)^2 \approx 0.03$.

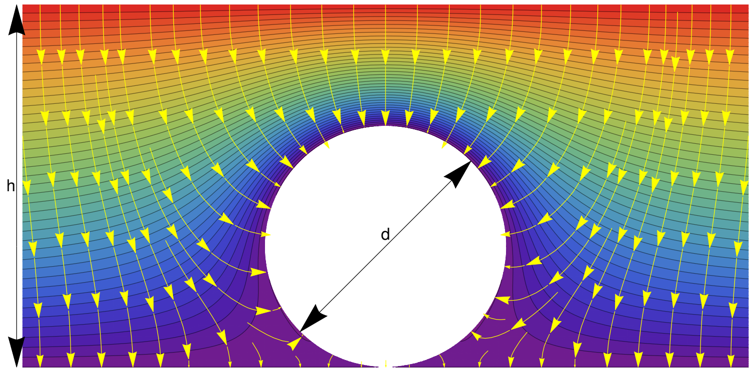
Pokud by nás zajímaly přesnější hodnoty, pak první musíme opravit určení náboje, poté započíst vliv konečných rozměrů i na napětí. Správná hodnota je $Q \doteq 30.0$ nC a $U_1 = U_2 \doteq 15.2$ kV pokud bereme vážně $g = 9.81$ ms^{-2} i ρ_{Al}.

Úloha 3

Uvažujte deskový kondenzátor tvořený dvěma rovnoběžnými deskami vzdálenými $h = 8.5$cm a rozdílem potenciálu elektrod $U = 7000$V. Aniž by se měnilo napětí přivedené na elektrody ze zdroje je na jeho spodní elektrodu položena vodivá kulička o průměru $d = 3$cm. Vodivé spojení kuličky a spodní elektrody způsobí, že část náboje spodní elektrody se rozmístí v podobě plošné nábojové hustoty σ na povrchu kuličky. Protože se nemá změnit napětí mezi deskami, bude nutno nějaký náboj doplnit i z vnějšku.

Nalezněte řešení Laplaceovy rovnice mezi elektrodami metodou fiktivních nábojů a poté podle níže uvedené osnovy analyzujte získaný přibližný průběh rozložení náboje.

Návod: Použijte metodu fiktivních nábojů, tedy předpokládejte, že pole vně kuličky má podobu superpozice homogenního pole elektrod a pole dvou nebo tři bodových nábojů vložených do kondenzátoru s oběma uzemněnými elektrodami (nulové okrajové podmínky zjednodušují superpozici). Fiktivní náboje umístěte dovnitř kuličky blízko jejímu středu na osu symetrie.



Bohužel pole bodového náboje mezi deskami kondenzátoru není úplně jednoduché a proto použijte kalkulátor pole na adrese `http://utf.mff.cuni.cz/~ledvinka/h.html`. Za počátek tam použitých kartézských souřadnic je zvoleno místo dotyku spodní desky a kuličky. Její střed leží na ose z.

Otázky:

1. Jaké elektrické pole $\vec{E}$ je v kondenzátoru bez vložené kuličky, je-li mezi elektrodami napětí U? Jaká nábojová hustota sídlí na obou elektrodách?

2. Jaké numerické hodnoty (fiktivních) nábojů uvnitř kuličky je potřeba zvolit, aby rozumně vystihovaly pole, jaké se v kondenzátoru nachází po vložení kuličky? Náboje umístěte poblíž středu kuličky na její osu (doporučuje se rozestup pod 0.1-5% poloměru). Použijte princip superpozice, tedy skutečnost, že polní veličiny jsou nějakou lineární kombinací hodnot jednotlivých nábojů a původního homogenního pole. Hodnoty určete takové, aby

   a) nulová ekvipotenciála procházela pólem koule ($\theta = 0$), tj. $\Phi(\theta = 0) = 0$,

   b) potenciál na povrchu koule se co nejméně odchyloval od nuly. To prakticky znamená, že pro další jednu nebo dvě hodnoty θ^* požadujete $\Phi(\theta^*) = 0$ (pro tři náboje potřebujete k rovnici z 2a) přidat ještě dvě další rovnice a tedy je nutné zvolit dvě θ^*).

   c) potenciál na povrchu koule nevybočil z intervalu ± 140V (získáte +3 body pokud se vejdete do ± 21V).

3. Načrtněte rozložení nábojové hustoty na kuličce.

4. Do společného grafu načrtněte rozložení nábojové hustoty na spodní a horní elektrodě. Čárkovanou čarou vyznačte i průběh plošných nábojových hustot na elektrodách před vložením kuličky, pokud by se U nezměnilo.

5. Kolikrát větší je plošná nábojová hustota na pólu koule, než na deskách kondenzátoru před jejím vložením?

6. Jaký celkový náboj se nachází na povrchu kuličky?

7. O kolik se vložením kuličky změní celkový náboj na horní desce kondenzátoru?

8. O kolik se vložením kuličky změní celkový náboj na dolní desce kondenzátoru?

9. Jaký a proč je součet hodnot z předchozích tří bodů?

10. O kolik se vložením kuličky změní kapacita deskového kondenzátoru?

Pozor, jednotky elektrického pole v kalkulátoru jsou [V/cm] a vzdálenosti se zadávají v [cm]! Nezapomeňte kromě nábojů uvést i jejich polohy. Není nutné, abyste hodnoty nábojů, které se zadávají v [V cm], přepočítávali do SI. To ale neplatí o kapacitě.

V kalkulátoru máte k dispozici hodnoty následujících veličin na povrchu kuličky: `Phi`$\rightarrow \Phi$[V], `theta`$\rightarrow \theta$(souřadnice na povrchu sféry, 0 na horním pólu, π na dolním), `Ex`$\rightarrow E_x = -\partial_x \Phi$[V/cm], `Ez`$\rightarrow E_z = -\partial_z \Phi$[V/cm], `nx`$\rightarrow n_x = \sin\theta$, `nz`$\rightarrow n_z = \cos\theta$ (tj. složky normálového vektoru ke kuličce), `En`$\rightarrow E_n = -\vec{n} \cdot \nabla\Phi$[V/cm], `x`$\rightarrow x = R\sin\theta$, `z`$\rightarrow z = R(1 + \cos\theta)$ (tj. souřadnice bodu na povrchu kuličky) a konstanty `R` poloměr kuličky, `H` vzdálenost desek (obojí v cm), `epsilon` pro $\epsilon_0 = 8.854187817.10^{-12}$F m^{-1} a `Pi`. Na spodní a horní desce odpovídají hodnoty `x, z, nx, nz` složkám souřadnic a polí normál na deskách.

Soustavy lineárních rovnic umí řešit m.j. Wolfram Alpha (`http://goo.gl/FvNS2b`).

Řešení:

1. Samozřejmě bez vložené kuličky je mezi deskami homogenní pole $E_z^0 = U/h$, na deskách je pak nábojová hustota $\sigma^0 = \pm\epsilon_0 E_z^0$.

2. Podle rady zvolíme polohu dvou nábojů blízko středu koule, např. $z_1 = 1.56$ cm a $z_2 = 1.44$ cm. Nyní studujeme superpozici polí elektrod a obou nábojů. Pro $U = 7000$V a $Q_1 = Q_2 = 0$ máme

$$\Phi(\theta = 0) \doteq 2470.59\text{V}, \quad \Phi(\theta = 120°) \doteq 617.647\text{V}$$

Pro $U = 0$, $Q_1 = 1$Vcm a $Q_2 = 0$ je

$$\Phi(\theta = 0) \doteq 0.465274\text{V}, \quad \Phi(\theta = 120°) \doteq 0.273584\text{V}$$

a konečně pro $U = 0$, $Q_1 = 0$ a $Q_2 = 1$Vcm je

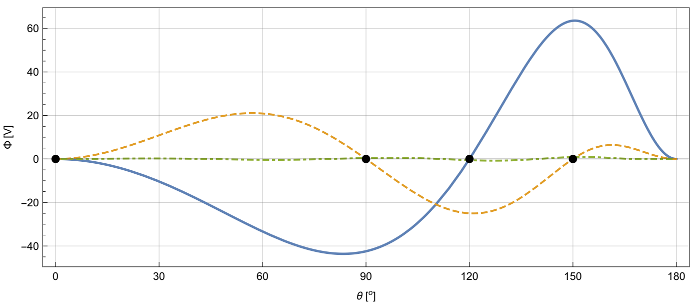
$$\Phi(\theta = 0) \doteq 0.406705\text{V}, \quad \Phi(\theta = 120°) \doteq 0.284995\text{V}$$

a) Pro vynulování hodnot potenciálu na pólu $\Phi(\theta = 0)$ a
b) na zvolené rovnoběžce $\Phi(\theta = 120°)$ musí být zároveň:

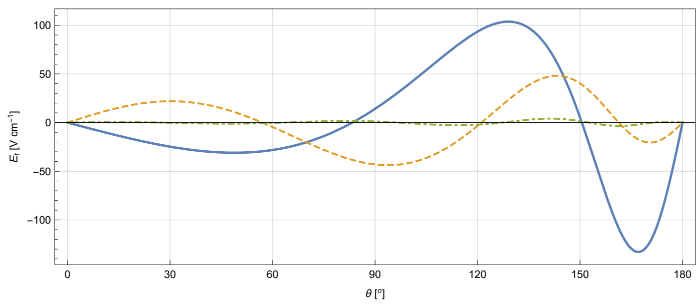
$$2470.59 + 0.465274 Q_1 + 0.406705 Q_2 = 0$$

$$617.647 + 0.273584 Q_1 + 0.284995 Q_2 = 0$$

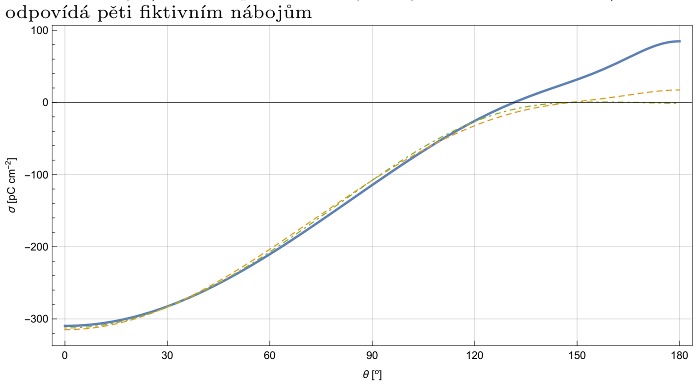
To je soustava dvou rovnic a má řešení $Q_1 = -21230.4$ a $Q_2 = 18213.1$.
Maximální odchylka od nulové hodnoty je na povrchu kuličky asi 63V (viz Obr.1).



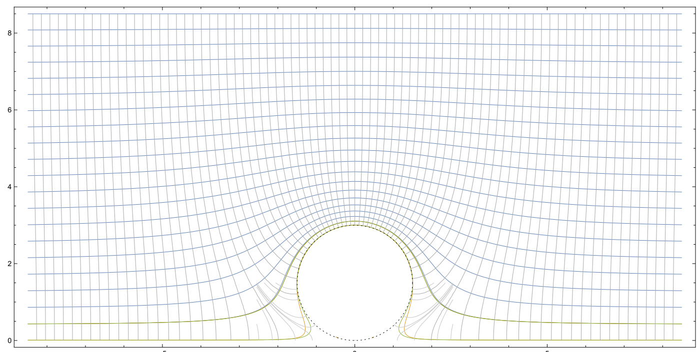
Obr. 1 Průběh potenciálu na povrchu kuličky pro nalezené hodnoty nábojů (modrá křivka). Dva body na modré křivce, kde jsme vyžadovali splnění $\Phi = 0$ jsou zvýrazněny puntíkem. Žlutá křivka je pro řešení se třemi fiktivními náboji (nulovost potenciálu vyžadujeme ve třech bodech). Zelená odpovídá pěti fiktivním nábojům



Obr. 2 Průběh tečné složky elektrické intenzity ukazuje, že se s rostoucím počtem fiktivních nábojů klesá k nule i tečná složka elektrické intenzity.



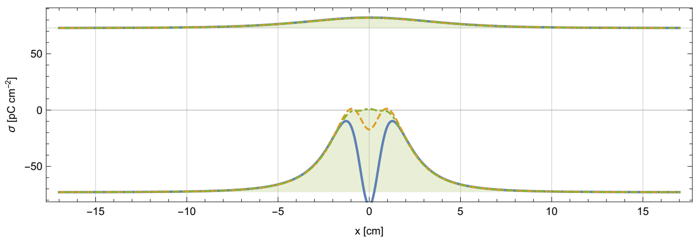
Obr. 3 Průběh nábojové hustoty na povrchu kuličky. Barvy křivek opět odpovídají počtu použitých fiktivních nábojů. Spolu s Obr. 2 tak vidíme, že obě složky elektrické intenzity v místě dotyku kuličky a spodní elektrody vymizí.



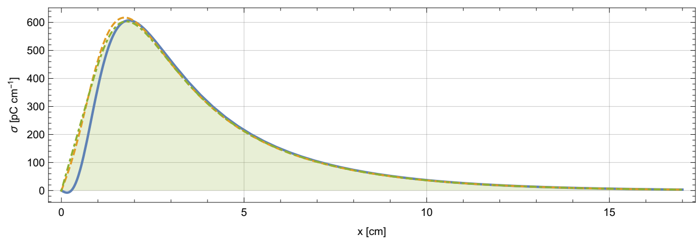
Obr. 4 Průběh ekvipotenciál pole s krokem $U/20$ v rovině $x - z$. Vykresleny jsou i vybrané siločary. Abychom mohli posoudit kvalitu použitých aproximací, je pro tři a pět fiktivních nábojů vykreslena i ekvipotenciála $U/1000$.

3. Jak jsme viděli, zadáním vhodných fiktivních nábojů jsme získali elektrické pole, jehož tečná složka na povrchu kulčiky je dostatečně malá. Kolmá složka pak představuje nábojovou hustotu. Abychom vyřešili jednotky použijeme faktor 1/100 pro převod F/m na F/cm Průběh nábojové hustoty na kuličce v C/cm^2 získáme zadáním výrazu `0.01*epsilon*En` a je na Obr. 3.

4. Nábojovou hustotu před vložením kuličky jsme nalezli v bodě 1., stejný výraz jako v bodě 3., tedy `0.01*epsilon*En`, nám popisuje i nábojovou hustotu na obou elektrodách. Složený graf je na Obr.5.



Obr. 5 Průběh nábojové hustoty na povrchu elektrod. Barvy křivek opět odpovídají počtu použitých fiktivních nábojů. Vyplněná plocha souvisí s body 7. a 8.



Obr. 6 Průběh integrandu $(\sigma(z = 0) + \sigma^0)2\pi x$, který vyjde, když při integraci přes plochu spodní elektrody používáme $dS = 2\pi x dx$. Obrázek ilustruje, že ani značná chyba modré nábojové hustoty na spodní elektrodě v míste dotykus kuličkou se ve výsledku zas tak moc neprojeví.

5. Kolikrát větší je plošná nábojová hustota na pólu koule, než na deskách kondenzátoru před jejím vložením spočteme zadáním výrazu `En/(U/H)`. Vyjde 4.25, část je dána tím, že mezi pólem kuličky a horní elektrodou je menší vzdálenost, než mezi deskami, část tím, že pole není homogenní.

6. Při určování, jaký celkový náboj se nachází na povrchu kuličky (o poloměru a) musíme spočíst integrál

$$Q_K = \int \sigma dS = \int_0^{\pi} \sigma(\theta) 2\pi a^2 \sin\theta d\theta,$$

   proto do kalkulátoru zadáme výraz `0.01*epsilon*En*R**2*2*Pi*sin(theta)`. V řádku s hodnotami primitivní funkce $\int^{\theta} f(\theta')d\theta'$ najdete $Q_K \doteq -37.9$ kV cm $= -3.36$ nC.

7. Pokud počítáme o kolik se vložením kuličky změní celkový náboj na horní desce kondenzátoru, musíme určit (v rovině $y = 0$ představuje x zároveň válcovou souřadnici)

$$\Delta Q_+ = \int (\sigma - \sigma^0) dS = \int_0^{\infty} (\sigma(z = h) - \sigma^0) 2\pi x dx$$

   a proto do kalkulátoru zadáme výraz `0.01*epsilon*(En+nz*U/H)*2*Pi*x`. V řádku s hodnotami primitivní funkce $\int^{x} f(x')dx'$ najdete $\Delta Q_+ \doteq 10.25$ kV cm $= 0.91$ nC.

8. O kolik se vložením kuličky změní celkový náboj na dolní desce kondenzátoru spočteme úplně stejně. Protože jsme použili pole normál, výraz zadávaný do kalkulátoru není potřeba měnit.

9. Nula. Souvisí to s principem superpozice. Pole v kondenzátoru je superpozicí pole homogenního a polí bodových nábojů při nulovém potenciálu elektrod. Z Gaussovy věty pak plyne, že každý (tedy i fiktivní) náboj vložený mezi dostatečně velké uzeměné desky kondenzátoru musí být kompenzován v součtu stejně velkým nábojem opačné polarity rozloženým na obou deskových elektrodách. Jinak by potenciály na elektrodách nemohly zůstat konstatní a pole vystupující v Gaussově větě vymizet.

10. Změnu náboje na horní elektrodě vydělíme napětím, tedy $\Delta C = 0.1$pF.