Řešení druhé písemné práce z Klasické elektrodynamiky

Úloha 1

Uvažujte pole

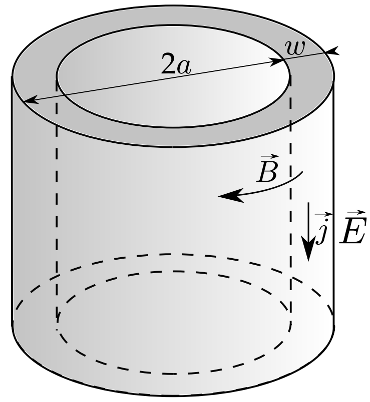
$$\vec{F}(t,\vec{r}) = \vec{A}e^{i\vec{k}.\vec{r}-i\omega t},$$

kde ω je konstanta, $\vec{A},\vec{k}$ jsou konstantní vektory, $\vec{r}$ je polohový vektor a t čas.
1) Spočtěte $\vec{G}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{F}(\vec{r})$ a zjistěte, pro jaké hodnoty vektoru $\vec{k}$ je $\vec{G} = 0$.
2) Spočtěte $h(\vec{r}) = \text{div } \vec{F}(\vec{r})$ a zjistěte, pro jaké hodnoty vektoru $\vec{k}$ je $h = 0$.
3) Spočtěte $\vec{N}(\vec{r}) = \Box\ \vec{F}(\vec{r})$ a zjistěte, pro jaké hodnoty vektoru $\vec{k}$ je $\vec{N} = 0$.

Řešení: Základem úlohy je uvědomit si, že že jediná závislost na prostorových souřadnicích je ukrytá ve skalárním faktoru $\psi = e^{i\vec{k}.\vec{r}-i\omega t}$. Pro jeho gradient vyplývá z $\nabla e^{i\vec{k}.\vec{r}} = i\vec{k}e^{i\vec{k}.\vec{r}}$, že $\nabla\psi = i\vec{k}\psi$. Na základě toho máme
1) $\vec{G}(\vec{r}) = \nabla\times(\vec{A}\psi) = (\nabla\psi)\times\vec{A} = i\vec{k}\times\vec{F}$, a tedy $\vec{G} = 0$ pro $\vec{k}$ rovnoběžné s $\vec{A}$. (3 body)
2) $h(\vec{r}) = \nabla\cdot(\vec{A}\psi) = (\nabla\psi)\cdot\vec{A} = i\vec{k}\cdot\vec{F}$, a tedy $h = 0$ pro $\vec{k}$ kolmé na $\vec{A}$. (3 body)
3) $\vec{N}(\vec{r}) = \Box\ (\vec{A}\psi) = \vec{A}\Box\ \psi = (-k^2+\omega^2/c^2)\vec{A}$, tedy $\vec{N} = 0$ pro $\omega^2 = c^2k^2$. (3 body)

Proto fakticky při výpočtu dojde k tomu, že nablu nahradíme $i\vec{k}$ a tedy $\Delta = \nabla^2$ nahradíme $-k^2$. Všem, kterým se tato úloha zdála potupně jednoduchá se omlouvám, ale byla myšlena jako uzpozornění na velmi důležitý vztah pro ty ostatní.

Úloha 2



Nalezněte v rámci kvazistacionární aproximace rozložení proudové hustoty ve vodiči v podobě dlouhého tenkostěnného válce o vnějším průměru $2a+w$ a tloušťce stěny w víte-li, že celkový proud vodičem protékající má amplitudu I. Předpokládejte, že elektrické pole $\vec{E} = E(R)\ \vec{e}_z$ je rovnoběžné s osou válce, proudová hustota je určena Ohmovým zákonem $\vec{j} = j(R)\ \vec{e}_z = \gamma\vec{E}$ a magnetické pole má siločáry v podobě kružnic, $\vec{B} = B(R)\ \vec{e}_\phi$. Uvažujte, že pole $\vec{E},\vec{B},\vec{j}$ mají harmonický časový průběh, tedy pro okamžitou hodnotu platí $X(t) = \text{Re}(\hat{X}e^{-i\omega t})$, kde $\hat{X}$ je obecně komplení amplituda příslušné veličiny (stříška se ve výpočtech obvykle nepíše].
1) Napište Maxwellovy rovnice a s uvážením předepsaného tvaru závislosti polí na souřadnicích ukažte, že jde o dvě diferenciální rovnice prvního řádu pro dvě neznámé funkce.
2) Přepište tyto rovnice do podoby jediné diferenciální rovnice druhého řádu pro neznámou hodnotu $E(R)$.
3) Zanedbejte člen úměrný křivosti válce $1/R$ a získejte obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Podobně zanedbávejte křivost při výpočtu celkového proudu a používejte $I = 2\pi a\int j_z\, dR$.
4) Předpokládejte, že dlouhý kus takovéhoto vodiče je zapojen v elektrickém obvodu a ten si vynutí uvnitř válcového vodiče a také na jeho vnější stěně konkrétní hodnotu elektrické intenzity $\hat{E} = \hat{Z}_1\hat{I}$, kde I je celkový proud vodičem a Z_1 je efektivní impedance vodiče na jednotku délky. Ukažte, že tato podmínka u statického řešení s $\omega = 0$ dá obvyklou hodnotu odporu vedení jednotkové délky $Z_1(\omega = 0)$.
5) Nalezněte řešení diferenciální rovnice 3) s hraničními podmínkami 4). Může se hodit zavést uvnitř stěny vodiče bezrozměrnou souřadnici $\rho\in(\rho_-,\rho_+)$ tak, že $R = a+\rho\sqrt{2}/\sqrt{\mu_0\gamma\omega}$ a $\rho_\pm = \pm w\sqrt{\mu_0\gamma\omega/8}$ a také vztah $\sqrt{\pm 2i} = 1\pm i$.
6) Určete $\hat{Z}_1(\omega)$ a zjistěte, pro jak vekou šířku stěny měděné trubky w je $|\hat{Z}_1(\omega = 2\pi\times 50Hz)| = 2Z_1(\omega = 0)$? Pozn.: všiměte si, že `wolframalpha.com` umí vyřešit rovnici zadanou ve tvaru: `abs( (1+i) x / sin( sqrt(i) x) ) = 1`.

Řešení:
1) Maxwellovy rovnice v kvazistacionární aproximaci v prostředí s proudem určeným Ohmovým zákonem dopadnou takto:

$$\nabla\times B = \mu_0\vec{j} \quad\longrightarrow\quad \nabla\times(B(R)\vec{e}_\phi) = \left(B' + \frac{1}{R}B\right)\vec{e}_z = \mu_0\gamma E(R)\vec{e}_z,$$

$$\nabla\times E = -\partial_t\vec{B} \quad\longrightarrow\quad \nabla\times(E(R)\vec{e}_z) = \nabla E(R)\times\vec{e}_z = E'(R)\vec{e}_R\times\vec{e}_z = i\omega B(R)\vec{e}_\phi,$$

kde jsme použili vzoreček pro rotaci ve válcových souřadnicích. Rovnice $\nabla.\vec{B} = 0$ $\nabla.\vec{E} = 0$ jsou splněny automaticky. Protože $\vec{e}_R\times\vec{e}_z = -\vec{e}_\phi$ vidíme, že směry polí byly zvoleny správně a dostáváme sadu dvou skalárních diferenciálních rovnic

$$B' + \frac{1}{R}B = \mu_0\gamma E(R)\vec{e}_z,$$

$$E'(R) = -i\omega B(R). \qquad \text{(3 body)}$$

2) Zderivováním druhé rovnice vynásobené R dostaneme $(RE')' = i\omega(RB)' = i\omega(B(R) + RB'(R))$ a tedy po vydělení R

$$E'' + \frac{1}{R}E' = -i\mu_0\gamma\omega E. \qquad \text{(3 body)}$$

3) Protože dobře známe diferenciální rovnici $u'' + \Omega^2 u = 0$, přepíšeme po zanedbání členu E'/R tuto rovnici do tvaru

$$E'' + (i\mu_0\gamma\omega)E = 0. \qquad \text{(2 body)}$$

4) Jde o rovnici druhého řádu, ta má dvě integrační konstanty. Pro $\omega = 0$ je řešení lineární funkce, ale má-li (podle zadání bodu 4) být uvnitř i vně válce stejné musí jít o konstantu a konstantní bude i proudová hustota $j_z = \gamma E$. Pro celkový proud pak platí $I = 2\pi a w\gamma E$, tedy

$$Z_1(\omega = 0) = \frac{1}{2\pi a w\gamma} = \frac{1}{\gamma S}, \qquad \text{(2 body)}$$

kde $S = 2\pi a w$ je (přibližný) průřez válcového vodiče.
5) V minulém bodě jsme pro $\omega = 0$ viděli, že okrajové podmínky dají spolu s dif. rovnicí pro radiální průběh pole hodnotu Z_1. Nyní to zkusme pro $\omega \neq 0$. Hraniční podmínky stále říkají, že vně i uvnitř je na kraji stěny tatáž hodnota pole E. Použijeme doporučenou *lineární* změnu souřadnic, která dává $dR = \rho\sqrt{2}/\sqrt{\mu_0\gamma\omega}$, tedy $d^2/dR^2 = (\mu_0\gamma\omega/2)(d^2/d\rho^2)$,

$$\frac{d^2E}{d\rho^2} + (2i)E = 0.$$

Rovnice $\ddot{u} + \Omega^2 u = 0$ má dvě řešení $\cos(\Omega t)$ a $\sin(\Omega t)$, to že na obou stranách stěny vodiče má být stejné pole $\hat{E}$ vybere první z nich. Máme tedy

$$E(\rho) = E_0\cos(\sqrt{2i}\rho), \qquad j(\rho) = \gamma E_0\cos(\sqrt{2i}\rho). \qquad \text{(4 body)}$$

6) Celkový proud

$$I = 2\pi a\int j(R)\,dR = 2\pi a\sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}\int j(\rho)\,d\rho = \gamma E_0 2\pi a\sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}\int_{\rho_-}^{\rho_+}\cos(\sqrt{2i}\rho)d\rho = \gamma E_0 2\pi a\sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}\frac{2\sin(\sqrt{2i}\rho_+)}{\sqrt{2i}}.$$

Tento vztah určuje, jakou hodnotu integrační konstanty E_0 si proud vynutí, tedy vlastně hodnotu $\hat{Z}(\omega)$.

$$E_0 = I\frac{\sqrt{\mu_0\gamma\omega}}{\sqrt{2}2\pi a\gamma}\frac{\sqrt{2i}}{2\sin(\sqrt{2i}\rho_+)} = I\frac{\sqrt{\mu_0\gamma\omega/8}w}{2\pi a w\gamma}\frac{\sqrt{2i}}{\sin(\sqrt{2i}\rho_+)} = IZ(\omega = 0)\frac{\sqrt{2i}\rho_+}{\sin(\sqrt{2i}\rho_+)}.$$

Na krajích vodiče tedy máme $E(\rho_\pm) = E_0\cos(\sqrt{2i}\rho_+)$ a tedy

$$\hat{Z}(\omega) = Z(\omega = 0)\frac{\sqrt{2i}\rho_+}{\tan(\sqrt{2i}\rho_+)}. \qquad \text{(4 body)}$$

Dotaz `abs( sqrt(2i) x/tan( sqrt(2i) x ) )= 2` na zmiňované stránce dá $x \doteq 1.55$, tedy pro $\rho_{\mathrm{Cu}} \doteq 6\times 10^7\,\mathrm{S\,m^{-1}}$

$$w \doteq 1.55\sqrt{\frac{8}{\mu_0\gamma\omega}} \doteq 3\mathrm{cm}. \qquad \text{(2 body)}$$

Úloha 3

Zkoumejte podle následujícího návodu model permanentního magnetu „držícího“ na nástěnce.

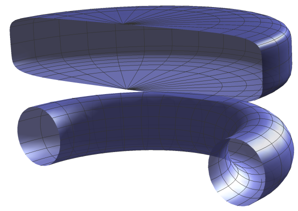
1) Odvoďte známý vzorec pro sílu mezi dvěma dlouhými rovnoběžnými vodiči jimiž protéká shodný proud I.

2) Na základě tohoto výsledku určete, jakou silou na sebe působí dva souosé kruhové vodiče o průměru D a vzdáleností rovin smyček $h \ll D$.

3) Předpokládejte, že podobně jako v elektrostatice lze v magnetismu používat metodu zrcadlení a bod 2) popisuje situaci, kdy rovina proudové smyčky je vzdálena $h/2$ od roviny tvořící povrch magneticky měkkého feromagnetického prostředí. Jaký proud by musel smyčkou (v podobě toru stejných rozměrů jako má válcový magnet) protékat, aby dokázala nahradit válcový neodymový magnet o rozměrech $D = 10h = 10$mm, který na nástěnce drží silou 10N?

4) Jakou hodnotu a směr magnetizace materiálu magnetu popsanou veličinou $\mu_0 M$ vyjádřenou v jednotkách tesla má takový permanentní magnet? ($\mu_0 M$ je tzv. „magnetická polarizace“, *residual flux density*, a m.j. popisuje nejvyšší magnetické pole, jaké při příznivém tvaru můžete magnetem s takovouto magnetizací vytvořit.)

5) Zdůvodněte, jakou „sílu“ očekáváte od magnetu vyrobeného z materiálu se stejnou magnetizací i výškou h ale s $2\times$ větším průměrem $D' = 2D \gg h$?



Polovina válcového magnetu (nahoře) a (také polovina) proudové smyčky (dole) se stejnými rozměry, která by jej měla nahradit, kdyby tedy bylo možné získat supravodič požadovaných vlastností.

Řešení:

1) Magnetické pole vodiče s axiálně symetrickým rozložením proudu je $\vec{B} = \mu_0 I_1/(2\pi R)\vec{e}_\phi$. Na druhý vodič v tomto poli nacházející se ve vzdálenosti R působí Lorentzova síla v radiálním směru $d\vec{F} = I_2 d\vec{l} \times \vec{B}$, na jednotku délky ta máme

$$\vec{F}_1 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}\vec{e}_R, \qquad \text{(2 body)}$$

vodiče se souhlasnou orientací proudu se přitahují. Důležitá a zajímavá poznámka: To platí i pro vodiče konečného průřezu pokud je v každém z nich rozložena proudová hustota axiálně symetricky – magnetické pole mezi nimi je stejné jako u tenkých drátů a sílu pak získáme integrací Maxwellova tenzoru přes plochu mezi nimi, kde se konečný průřez vodičů vytvářejících pole neprojeví.

2) Předpokládáme délku πD, tedy

$$\vec{F} = -\mu_0 I_1 I_2 \frac{\pi D}{2\pi h}\vec{e}_z. \qquad \text{(2 body)}$$

3) Předpokládáme magnet těsně „nalepený“ na nástěnku, tedy jeho výška je rovna vzdálenosti proudových smyček a $I_1 = I_2 = I$. Vyjde $|I_1| \doteq 1260$A, případně $|I_1| \doteq 1410$A, pokud vezmeme $D = 8$mm, tak aby vnější rozměry magnetu byly 10×1mm. (2 body)

4) Magnetizace je rovna plošné proudové hustotě tekoucí po plášti válce (to je a část povrchu, co nejsou podstavy), samozřejmě musí být orientována podél osy magnetu, aby $\vec{j}_{\text{plos}} = \vec{n} \times [\vec{M}]$ bylo orientováno ve směru $\vec{e}_\phi$ a mohlo být aproximováno onou proudovou smyčkou. Proto $I_1 = Mh$, tedy $|M_z| \doteq 1260\text{Amm}^{-1}$. Vyjádřeno v požadovaných jednotkách, $|\mu_0 M_z| \doteq 1.6$T (nebo dokonce 1.8T pro $D/h = 8$). (3 body)

5) Ano, ze vzorečku výše vyplývá, že když se materiál a výška nezmění, je proud daný jako součin Mh stejný a síla roste přímo úměrně s průměrem magnetu. Tedy pro $D' = 2D$ dvakrát. (2 body)

Doufám, že aspoň někomu to přišlo divné – magnet má přece čtyřikrát větší plochu podstavy, hmotnost i počet „molekulárních“ dipólů, ale „přitahuje“ jen dvakrát více. Zde jsou stručně možná vysvětlení, předpokládáme, že místo nástěnky a fiktivního obrazu magnetu v ní máme sílu mezi dvěma dotýkajícími se magnety:

- Síla je součet sil na jednotlivé dipóly v nehomogenním poli druhého magnetu – většina síly pak působí jen na dipóly na kraji magnetu. Blízko středu je pole homogenní a síla se nekoná.
- Síla je součet sil mezi dvojicemi dipólů vždy v jednom a druhém magnetu – většina síly opět působí jen na dipóly na kraji magnetu. Možná překvapivě, síla mezi dvěma shodně orientovanými dipóly může být i odpudivá, o znaménku rozhodne úhel, který svírá vzdálenost a dipólový moment (shodný u obou magnetů). Ukazuje se, že i když odpudivá síla je slabší, dipólů, které působí odpudivou silou je mnohem více a u dipólu blízko středu velkého placatého magnetu se výsledná síla od všech dipólů protějšího magnetu vyruší.
- Naivní vzoreček pro sílu mezi magnety zjednodušuje tok Maxwellova tenzoru na integrál energie ve velmi malé vzduchové mezeře mezi nimi. Protože pole směrem do středu magnetu klesá, je takový integrál spíše úměrný obvodu než ploše magnetu.