

Zadání příkladů pro cvičení z předmětu Programování pro fyziky

Sada č. 3 — 10. prosince 2009

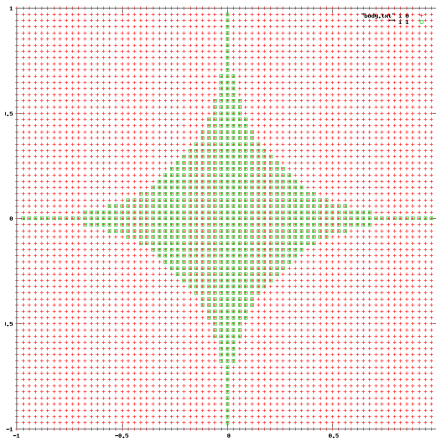
Uvažujte membránu ve tvaru oblasti $\Omega \subset \langle -1, 1 \rangle^2$ (viz Obrázek 1) dané podmínkou

$$\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} < 1 .$$

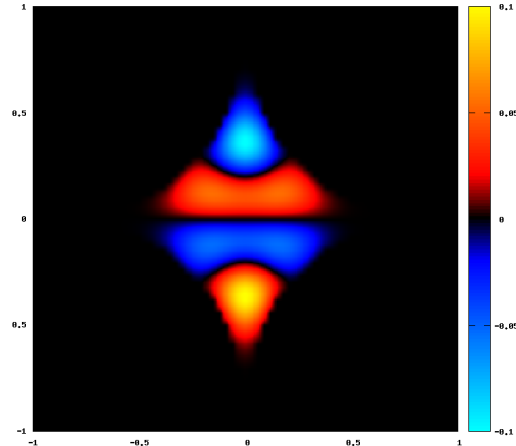
Na hranici této oblasti je membrána připevněná. Budeme hledat stojaté vlnění membrány harmonického časového průběhu. V tomto případě se druhá časová derivace pocházející z Newtonova pohybového zákona jako obvykle převede na násobení $-\omega^2$. Tak dostáváme tzv. Helmholtzovu rovnici

$$\left(\Delta + \omega^2 \right) u(x, y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y) + \omega^2 u(x, y) = 0 .$$

Tato rovnice říká, že každý kousek membrány je urychlován silou, kterou za něj tahají sousední kousky membrány. Vhodnou volbou jednotek jsou pak parametry jako hmotnost membrány a mechanické napětí v ní potlačeny. Jako každá homogenní lineární rovnice, má i tato identicky nulové řešení. Stojaté vlny pak odpovídají situaci, kdy pro vhodná ω (tzv. rezonanční frekvence) “soustava” není regulární a připouští nenulové řešení.



Obrázek 1. Množina bodů mříže $\langle -1, 1 \rangle^2$ a její průnik s Ω .



Obrázek 2. Tvar výchylky membrány pro jednu z rezonančních frekvencí.

Při hledání tvaru stojatého vlnění membrány budeme postupovat tak, že pro dané rozlišení h nalezneme všechny body mříže, $[x, y] = [hp, hq] \in \Omega$, kde $p, q \in \mathbb{Z}$ a určíme jejich počet N_h . Váš program bude uvažovat výchylky membrány v bodech mříže za neznámý vektor U_a , kde $a = 1..N_h$. Protože druhá derivace je mírou prohnutí grafu funkce, nepřekvapí, že hodnotu výrazu Δu můžeme spočítat jako rozdíl hodnoty výchylky U_a v bodě s indexem a mříže a průměrné výchylky nejbližších sousedů tohoto bodu, tedy

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y) \approx \frac{1}{h^2} (U_N + U_E + U_S + U_W - 4U_a) , \quad (1)$$

kde U_N, U_E, \dots jsou výchylky v nejbližším sousedním bodě směrem na sever, východ, atd. Proto se nalezení tvaru stojatého vlnění membrány dá převést na hledání dvojic vektoru U_a a frekvence ω splňujících vztah

$$\sum_{b=1}^{N_h} A_{ab} U_b = -\omega^2 U_a , \quad (2)$$

Jde o úlohu hledání tzv. vlastních vektorů a funkci pro její řešení máte k dispozici. Matice A_{ab} je v souladu s pravidlem (1)

$$A_{ab} = \begin{cases} -\frac{4}{h^2} & a = b \\ \frac{1}{h^2} & \text{vzdalenost_bodu_v_mrizi}(a, b) = 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} . \quad (3)$$

Jak je vidět, výpočet matice je jednoduchý, veškerá složitost spočívá v určení, zda dva body spolu v mříži sousedí či ne. Vaší úlohou je podle předpisu (3) připravit v programu matici A_{ab} , použít připravenou (nebo i jinou) funkci pro výpočet vlastních vektorů a pro 24 nejmenších rezonančních frekvencí vypsat v učeném formátu hodnoty výchylky rezonující membrány. Postupujte podle následujících bodů

- (1) Zjistěte, kolik bodů mříže leží v uvedené oblasti a jaká je tedy dimenzne uvažovaného vektorového prostoru. Při tomto zjišťování si poznamenejte hodnoty diskrétních souřadnic bodů v mříži p_a a q_a , budou se hodit při zjišťování sousedění bodů.
- (2) Zkonstruujte matici A_{ab} .
- (3) Použijte dodanou či jinou funkci pro výpočet rezonančních frekvencí.
- (4) Pro nejnižších 24 rezonančních frekvencí vypište do tří sloupečků hodnoty x , y , $u(x, y)$. Hodnoty vypisujte po řádcích či sloupcích mříže pokrývající $\langle -1, 1 \rangle^2$, při přechodu na novou vodorovnou či svislou řadu bodů vypište jeden prázdný řádek, při přechodu k nové rezonanční frekvenci vypište dva prázdné řádky. Mimo Ω vypisujte $x, y, 0$.
- (4) Výsledek pro h zhruba odpovídající půlhodinovému výpočtu, vymalujte v gnuplotu příkazem

```
set palette defined (0 0 1 1, 0.4 0 0 1, 0.5 0 0 0, 0.6 1 0 0, 1 1 1 0)
set cbrange [-0.2:0.2] # pro vetsi pocet bodu pouzijte [-0.1:0.1]
set view map
set size ratio -1
set pm3d interpolate 4,4

splot "data.txt" index 1 with pm3d

set term png truecolor
set output "cvic3.png"
replot
quit
```

Kostru možného programu spolu s funkcí na hledání vlastních vektorů naleznete na adrese utf.mff.cuni.cz/~ledvinka/uloha3.pas. Váš program (v Pascalu či C/C++), jeho textový výstup a obrázek (ve formátu png) pošlete jako přílohu emailem na adresu ledvinka@utf.troja.mff.cuni.cz Výstup programu pošlete pokud možno komprimovaný.

