Úloha č. 4 z Programování pro fyziky

Napište program obsahující následující dvě funce a provádějící dále požadované výpočty.

A) Napište funkci počítající hodnotu

$$K(k) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}$$

za použití řady

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2} k \right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4} k^2 \right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} k^3 \right)^2 + \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} k^4 \right)^2 + \ldots \right].$$

Tuto řadu sčítejte dokud jsou sčítance v závorce větší jak 10^{-14}. Jde o tzv. eliptický integrál a podobnou řadu pro obvod elipsy jsme potkali na přednášce.

B) Napište funkci hledající metodou půlení intervalu kořen $k(y)$ funkce

$$f(k) \equiv 2K(k) - \pi y$$

s přesností $\Delta k = 10^{-12}$.

C) Hlavní program by pak

1. měl zkontrolovat (např. pomocí `assert`), že funkce $K(0.5) = 1.68575035481259604287 12 \pm 10^{-12}$,
2. spočíst hodnotu $k(2)$,
3. zkontrolovat, že $K(k(2)) = \pi \pm 10^{-10}$
4. a nakonec vypsat hodnotu $\phi_{\max} = 2 \arcsin k(2)$. Jde o amplitudu kývání matematického kyvadla, při které má periodu kývání $2\times$ delší než při kývání s velmi malými amplitudami.
   Funkci `arcsin` si zpřístupníte uvedením `using math;` na začátku programu hned za řádkem **program** `Uloha4;`

Komentář. Matematické kyvadlo se řídí pohybovou rovnicí

$$\ddot{\phi} + \omega^2 \sin \phi = 0,$$

která se pro malé úhly ϕ redukuje na rovnici harmonického oscilátoru s periodou $T_{\text{HO}} = 2\pi/\omega$. Zákon zachování energie pro má pro matematické kyvadlo podobu $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \omega^2 \cos \phi = \text{konst.}$ (Přesvědčte se zderivováním této rovnice podle času.) Pro kyvadlo v režimu kývání s výchylkou $\phi_{\max}$ má pak zákon zachování energie podobu

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \omega^2 (\cos \phi_{\max} - \cos \phi) = 0.$$

Integrací této diferenciální rovnice metodou separace proměnných přes jednu čtvrtinu periody dostáváme pro periodu kývání matematického kyvadla

$$\frac{\pi}{2} \frac{T}{T_{\text{HO}}} = \frac{\omega T}{4} = \int_0^{\phi_{\max}} \frac{d\phi}{\sqrt{2}\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_{\max}}} = \int_0^{\phi_{\max}} \frac{d\phi}{2\sqrt{\sin^2 \frac{\phi_{\max}}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2}}} = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\phi_{\max}}{2} \sin^2 u}},$$

kde poslední integrál dostaneme substitucí $\sin(\phi/2) = \sin(\phi_{\max}/2) \sin u$.