

Poznámky k přednášce Klasická elektrodynamika

Úvod

Fyzikální pole je následníkem principu působení na dálku. V klasické představě zprostředkovává pole vytvářené jedním zdrojem působení na druhý zdroj. Již v této primitivní verzi musí polní teorie popsat jak zdroj pole vytváří, jak se pole šíří z bodu do bodu a jak působí pole na jiný zdroj. Hezká teorie pak musí toto vše učinit v souladu s obecnými fyzikálními principy. V této přednášce budeme zkoumat jak detailní vlastnosti polní teorie popsané Maxwellovými rovnicemi, tak nalézat řešení těchto polních rovnic pro různé situace. Obecné vlastnosti jste z hledisek nejvznešenějších probírali především v přednášce Speciální Teorii Relativity. My nastoupíme do konkrétní inerciální soustavy a v ní budeme hledat detailnější pochopení významu těchto polních rovnic.

Pro zvýšení zmatku ale často budeme polem mínit i pouhou funkci tří prostorových a případně ještě jedné časové souřadnice. Například budeme mluvit o poli bázových vektorů abychom zvýraznili, že v různých bodech prostoru mají uvažované bázové vektory různé směry.

Skalární pole

je tedy v největší obecnosti termín označující skalární funkci tří prostorových a jedné časové souřadnice. V této přednášce budeme až na výjimky pracovat v 3+1 notaci, vektory budeme rozumět vektory třírozměrné, čas bude samostatnou "souřadnicí", podobně jako tomu bylo třeba v teoretické mechanice. Skalární pole je tedy nějaká funkce $\Phi(\vec{x}, t)$.

V předmětech, které se nějak odkazují na dynamiku, je zapotřebí studovat změny pole. V našem 3+1 pojetí odlišujeme časové a prostorové změny. Proto v teoriích budou vystupovat časové derivace ∂_t a prostorové derivace, například $\partial_x, \partial_y, \partial_z$. Protože souřadnice v prostoru budeme často volit i jiné, než kartézské, budeme se snažit užívat pro prostorové derivování symbol ∇ . To, že vystačíme s tímto symbolickým zápisem místo explicitního derivování podle jednotlivých souřadnic je důsledek kvalit studované teorie. Má-li být teorie nezávislá na volbě souřadného systému, nemohou v ní vystupovat libovolné kombinace ∂_x, ∂_y a ∂_z , ale jen takové, které lze zapsat s pomocí ∇ . Pro připomenutí, že speciální teorie relativity víte, že v Lorentzovsky invariantní teorii se i prostorové a časové derivace musejí vyskytovat ve vhodných kombinacích.

Isoplocha (Ekvipotenciála)

Znázorňovat hodnoty skalárního pole lze různě, nejstarší a pro vědecké účely nejintuitivnější je zakreslení tzv. isoploch (ekvipotenciál) – míst stejné hodnoty pole. Ve třech dimenzích představuje rovnice $\Phi(\vec{x}) = \Phi_0$ rovnici plochy. Často zakreslujeme průsečíky isoploch odpovídající různým hodnotám Φ_0 s nějakou jinou plochou, čímž dostáváme sadu čar spojující místa se stejnou hodnotu.

Vektorové pole

Vektorové pole se od skalárního odlišuje tím, že jde o vektorovou funkci. To znamená, že jde o tři funkce skalární popisující složky pole v nějaké bázi. Formálně píšeme $\vec{E}(\vec{x}, t)$. Při práci budeme ale potřebovat umět zapsat hodnoty konkrétně. První možností je konstruovat výraz pro hodnotu jako vektorový výraz z vektoru průvodiče, řekněme

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}. \quad (1)$$

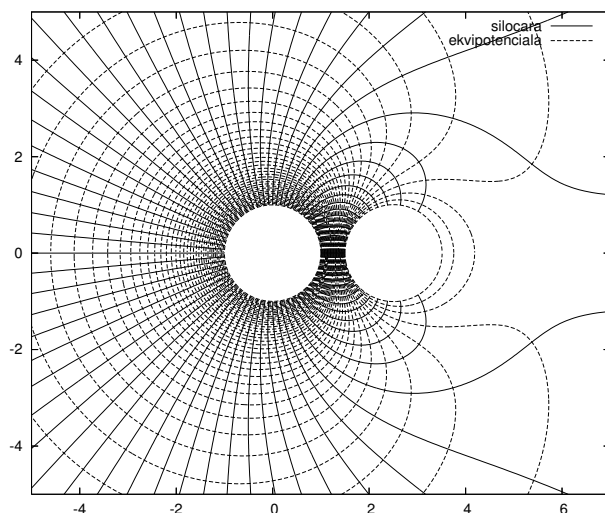
Jiná možnost je použít zápisu kartézských složek pole

$$\vec{E}(\vec{x}) = \left[\frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right]. \quad (2)$$

Z praktických důvodů budeme ale nejčastěji postupovat tak, že použijeme nekartézskou souřadnici (řekněme r) a také pomocná vektorová pole (v tomto případě $\vec{e}_r = \vec{r}/|\vec{r}|$ – pole jednotkových vektorů mířících ve

směru průvodiče) a výslednou vektorovou funkci zapíšeme pomocí jejich kombinace

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r . \quad (3)$$



Obrázek 1: Ekvipotenciály a siločáry elektrostatického pole dvou vodivých koulí. Pravá je uzemněná.

Rovnice siločáry

Při znázorňování vektorového pole je nejobvyklejším způsobem kreslení *siločar*. Tento termín není zcela přesný, když mluvíme o poli, pro které nejsou silové účinky rovnoběžné s vektorem polní veličiny, třeba u pole vektorů rychlosti mluvíme o proudočarách. Jde o křivky $\vec{x}(s)$, které jsou v každém bodě rovnoběžné s vektorovým polem:

$$\frac{d}{ds} \vec{x}(s) = \lambda(s) \vec{E}(\vec{x}(s)) . \quad (4)$$

Koeficient úměrnosti $\lambda(s)$ je libovolná funkce a volíme ji tak, aby tato soustava tří obyčejných diferenciálních rovnic byla co nejnáze řešitelná.

Je-li vektorové pole gradientem nějakého skalárního potenciálu, jsou siločáry na ekvipotenciály kolmé, jak uvidíme až se budeme zabývat operací grad.

Složky nebo nabra tečka?

Při obecných úvahách v elektromagnetismu můžeme vždy volit mezi dvěma zápisy. To že, například, v elektrostatice je elektrické pole nevířivé můžeme ekvivalentně zapsat jako

$$\epsilon_{ijk} \partial_j E_k = 0 \quad (5)$$

nebo

$$\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = 0 . \quad (6)$$

Protože druhá varianta je obvykle čitelnější, budeme ji při obecných úvahách upřednostňovat, zatímco první přijde vhod při chápání podstaty některých úprav, řekněme

$$\text{rot grad } \Phi \equiv 0 \quad \text{oproti} \quad \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \Phi \equiv 0 . \quad (7)$$

Postupně si ale vybudujeme seznam identit, při jejichž užití již nebudeme muset přecházet do složek. Např.

$$\text{grad } fg = \nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g = g \text{ grad } f + f \text{ grad } g \quad (8)$$

nebo

$$\text{div } f\vec{A} = \nabla \cdot (f\vec{A}) = f\nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla f = f \text{ div } \vec{A} + \vec{A} \cdot \text{grad } f . \quad (9)$$

Elektrostatika ve vakuu

Protože úplné Maxwellovy rovnice představují relativně komplikovanou soustavu lineárních parciálních diferenciálních rovnic, soustředíme se nejdříve na důležitou součást Maxwellovy teorie – popis neměnných čistě elektrických polí ve vakuu. Jak víme je tato redukce možná jen v konkrétním inerciálním systému, neboť rozdělení na elektrické a magnetické pole je dáno projekcí tenzoru elektromagnetického pole na čtyřrychlost pozorovatele.

Základní veličinou v elektrostatice je *elektrická intenzita* \vec{E} . Jde o veličinu, která bývá obvykle definována takto: vložíme-li v místě \vec{x} do elektrického testovací(!) náboj q , je polem tlačena silou

$$\vec{F} = q \vec{E}(\vec{x}). \quad (10)$$

Elektrická intenzita tedy představuje veličinu polní (může se lišit bod od bodu) a vektorovou (má velikost a směr; nesmíme ovšem zapomenout, že o vektoru mluvíme jen z hlediska prostorových transformací).

Jak se liší elektrická intenzita bod od bodu? To určují polní rovnice – pro elektrostatická pole ve vakuu mají tvar

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (11)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad (12)$$

Tyto rovnice představují soustavu 4 rovnic pro 3 neznámé složky vektorového pole $\vec{E}(\vec{x})$ a nabádají k otázkám: Je možné aby taková soustava nebyla přeuročena? Jak se dělí operátorem div ?

Při hledání řešení těchto rovnic uvážíme nejdříve naivní ale velmi užitečnou představu zdrojů jako seskupení spousty bodových nábojů.

Začneme obvyklým uvážením *Coulombova zákona* ve vakuu

$$\vec{E}(\vec{x}) = q^{-1} \vec{F} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}. \quad (13)$$

Tento vztah popisuje jednak sílu \vec{F} , jíž na náboj velikosti q nacházející se v místě \vec{x} působí náboj q' nacházející se v místě \vec{x}' . Zároveň ale také popisuje elektrickou intenzitu v místě \vec{x} již zde *budí* náboj q' nacházející se v místě \vec{x}' . Pro určení elektrické intenzity tu ale již máme rovnice (11-12). Budeme tedy muset zkoumat, zda jsou obě určení v souladu.

Nejdříve si povšimneme, co mají oba vztahy společné – tzv. princip superpozice. Pro polní rovnice platí, že elektrické pole způsobené nábojovou hustotou $\rho_1(\vec{x}) + \rho_2(\vec{x})$ je součtem polí $\vec{E}_1(\vec{x}) + \vec{E}_2(\vec{x})$, kde $\vec{E}_1(\vec{x})$ je řešení (11-12) s pravou stranou danou nábojovou hustotou $\rho_1(\vec{x})$ a podobně pro $\vec{E}_2(\vec{x})$. Podobně Coulombův zákon zobecníme tak, že elektrické pole buzené soustavou nábojů je součtem polí od jednotlivých nábojů.

Při zkoumání souladu Coulombova zákona a polních rovnic narážíme na překážku danou rozdílnou povahou nábojů v obou případech. V polních rovnicích je zdrojem v prostoru rozložená nábojová hustota, v Coulombově zákoně je to bodový náboj. Pro připomenutí nejdříve velmi stručně zopakujeme postup obvyklý v učebnicích pro úvodní kurz, zhruba odpovídající [SeSt]. Nábojovou hustotu si představíme tvořenou velkým množstvím bodových nábojů. Součet elektrických intenzit od jednotlivých nábojů je pak místo sumy dán integrálem

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dq' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \rho(\vec{x}') d^3x'. \quad (14)$$

Nyní je třeba ověřit, že takovéto pole splňuje polní rovnice. Kupodivu to ale není přímočaré – matematici nám totiž nepovolí prohodit derivace z operátorů divergence a rotace a integrál vyskytující se v (14). Kdybychom jejich zákaz ignorovali dostaneme, že takto definované elektrické pole má divergenci nulovou. Proto přichází na řadu

Gaussova věta

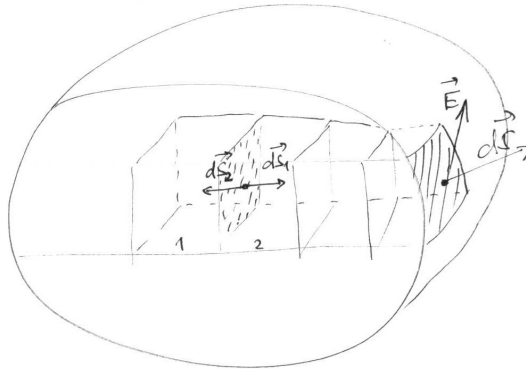
Není bez zajímavosti, že Gaussovu větu (pro gravitační pole) objevil o padesát let dříve Lagrange. S použitím moderního značení ji zapisujeme takto

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) d^3\vec{x} = \oint_{\partial\Omega} \vec{E}(\vec{x}) \cdot d\vec{S}. \quad (15)$$

Slovy řečeno: objemový integrál skalární veličiny dané divergencí vektorového pole přes objem Ω je roven plošnému integrálu, tj. toku této vektorové veličiny skrze plochu $\partial\Omega$, která tvoří hranici uvažovaného objemu. V elektrostatice se rovnost těchto veličin lépe vyjádří vztahem

$$Q_\Omega = \int_\Omega \rho(\vec{x}) d^3\vec{x} = \int_\Omega \operatorname{div} \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) d^3\vec{x} = \oint_{\partial\Omega} \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) \cdot d\vec{S}, \quad (16)$$

který říká, že náboj Q_Ω libovolně rozložený uvnitř objemu Ω vytváří takové elektrické pole, jehož tok skrze hranici uvažovaného objemu je roven tomuto náboji.



Obrázek 2: Ilustrace ke Gaussově větě – vyrušení se příspěvků přes vnitřní plošky.

V limitě větších a větších objemů majících tvar koule s povrchem rostoucím jako kvadrát jejího poloměru dostáváme tak známé chování coulombovského pole $\sim 1/r^2$, v limitě nekonečně malých krychliček či kuliček $\Omega_{\vec{x}}$ obsahujících bod \vec{x} , jejichž objem označíme V_Ω , pak dostáváme alternativní definici divergence vektorového pole

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) = \lim_{V_\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{V_\Omega} \oint_{\partial\Omega_{\vec{x}}} \vec{E}(\vec{x}') \cdot d\vec{S}'. \quad (17)$$

S její pomocí je Gaussova věta velmi názorná: Velký objem si předtavíme jako hromadu velmi malých krychliček. Pravá strana (15) má význam součtu přes objem všech krychliček, levá součtu přes orientovaný povrch všech krychliček. Právě to že, jde o orientované plošky způsobí vyrušení příspěvků uvnitř velkého objemu, zůstane jen integrál přes jeho povrch. To, že (17) opravdu představuje diferenciální operaci tvaru $\nabla \cdot \vec{E}$, ukážeme v části věnované křivočarým souřadnicím.

Aplikací takto definované divergence za použití Gaussovy věty pro bodový náboj (21) snadno nahlédneme, že elektrická intenzita určená vztahem (14) splňuje rovnici $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\epsilon_0$. Splnění vztahu (12) lze podobně ověřit po zavedení alternativní definice operátoru rotace, což však odložíme. Místo toho se spokojíme s přirozeným argumentem, že superpozicí polí s nulovou rotací (tzv. polí nevířivých) dostaneme také nevířivé pole. Navíc v určitých situacích lze elektromagnetickou indukci chápat jako zdroj pro $\operatorname{rot} \vec{E}$ a tak budeme později tuto část diskutovat podrobněji.

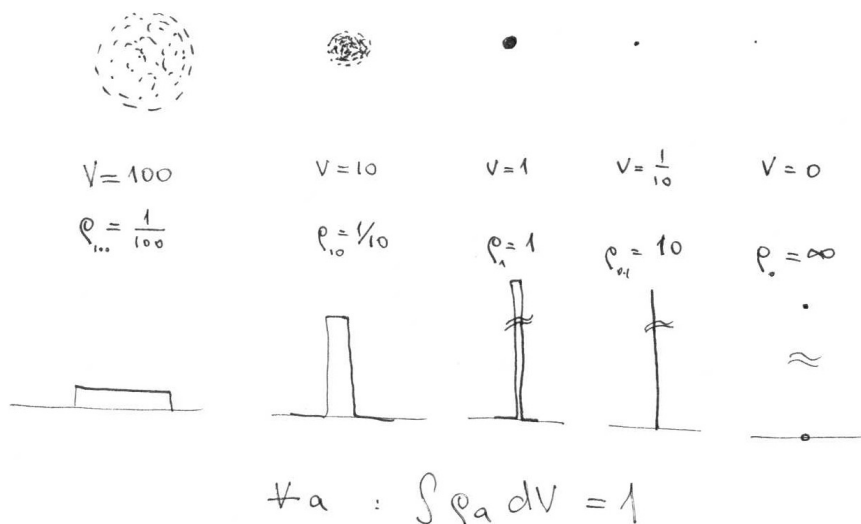
Víme již, že elektrická intenzita spočtená podle (14) splňuje rovnice elektrostatiky. Ignorujeme-li prozatím otázku existence příslušných integrálů, znamená to, že polní rovnice nejsou přeuročené: pro všechny pravé strany – nábojové hustoty existuje pole v souladu s polními rovnicemi. Jsou tu ještě nějaká další řešení odpovídající stejné nábojové hustotě, nejsou náhodou polní rovnice nedourčené? A pokud ano, co rozhoduje, které řešení “ve skutečnosti” opravdu nastane?

Jsou-li E_1 a E_2 dvě řešení odpovídající téže nábojové hustotě ρ , můžeme při uplatnění linearity polních rovnic dojít k závěru, že obě řešení se mohou odlišovat o libovolné řešení homogenních polních rovnic popisujících pole bez nábojů. Existují taková pole v elektrostatice? Ukáže se, že jich jsou spousty. Abychom o nich mohli pořádně mluvit budeme ale muset počkat. Spokojíme se s jediným příkladem, jímž je homogenní elektrické pole vyplňující celý vesmír, a budeme doufat, že i ostatní řešení homogenní rovnice pocházejí od nábojů přesunutých za hranice vesmíru. Polní rovnice zde používané jsou zbytečně složité na přesnější formulaci jednoznačnosti řešení a tak uzavřeme naše zkoumání: počítáme-li elektrickou intenzitu jako superpozici coulombovských polí vztahem (14), dostaneme jedno z řešení polních rovnic – to, které předpokládá neexistenci dalších nábojů a to i za hranicemi vesmíru.

Na cvičeních poslouží Gaussova věta jako nástroj pro určení pole v symetrických situacích. Nalezneme pole rovnoměrně nabitě koule, nekonečně dlouhého válce a nekonečně veliké rovnoměrně nabitě vrstvy.

Diracova δ -funkce

Ukazuje se, že chápání bodového náboje jakožto speciálního průběhu nábojové hustoty a následující zobecnění tohoto vede k důležitým metodám pro řešení lineárních (parciálních) diferenciálních rovnic. Především, nábojová hustota jednotkového bodového náboje není slušná funkce – samá nula a v jednom bodě nekonečno. To nekonečno ale není jen tak obyčejné, je jednotkové. Nábojová hustota dvakrát takového bodového náboje má to nekonečno dvakrát větší (... počítání s nekonečny je výzva pro matematiky).



Obrázek 3: Ilustrace k zavedení δ -funkce jako nábojové hustoty bodového náboje.

Chceme-li tedy pracovat s těmito *zobecněnými funkcemi*, budeme muset obětovat jednu důležitou vlastnost funkcí – funkční hodnotu. Za tuto cenu bude možno ponechat v platnosti jiné důležité vlastnosti funkcí, především pravidla jež funkce splňují při integraci. To není náhoda – náboj, tedy integrální veličina je jistě důležitější, nežli hodnota nábojové hustoty v nějakém konkrétním bodě. V následujícím rychlokursu zavedeme tzv. *zobecněné funkce* neboli *distribuce*:

- Nábojovou hustou jednotkového bodového náboje v počátku souřadnic označíme $\delta^3(\vec{x})$, něčím, co je nula pro všechna $\vec{x} \neq 0$ a vhodně nekonečné v počátku.
- Sídli-li takový jednotkový náboj v bodě \vec{x}' , bude nábojová hustota popsána distribucí $\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$, právě pro $\vec{x} = \vec{x}'$ bude totiž argument δ -funkce nulový.
- Integrál nábojové hustoty přes objem Ω

$$\int_{\Omega} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') d^3x = \begin{cases} 1 & \vec{x}' \text{ uvnitř } \Omega \\ 0 & \vec{x}' \text{ vně } \Omega \\ \text{nedef.} & \vec{x}' \text{ na hranici } \Omega \end{cases} \quad (18)$$

- Nebude-li náboj jednotkový, ale bude mít velikost q' , vyjádříme hustotu jako $q' \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$.
- Protože δ -funkce je nulová s výjimkou bodu, kde má nulový argument, jsou totožné následující nábojové hustoty $f(\vec{x}) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$ a $g(\vec{x}) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$ právě když se dvě (obyčejné) funkce f a g rovnají v bodě \vec{x}' , t.j. $f(\vec{x}') = g(\vec{x}')$.
- Násobení δ -funkce obyčejnou funkcí se tedy shoduje s násobením obyčejnou konstantou a tedy

$$\int_{R^3} f(\vec{x}) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') d^3x = \int_{R^3} f(\vec{x}') \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') d^3x = f(\vec{x}') \int_{R^3} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') d^3x = f(\vec{x}') \quad (19)$$

- Hezké funkce jsou distribuce, δ -funkce je distribuce, distribuce vynásobená hezkou funkcí je distribuce, součet distribucí je distribuce.
- Při integraci distribuce splňují větu o substituci, o součtu integrálů atp.

- Vystupuje-li distribuce v integrálech násobená dostatečně hezkou funkcí, splňuje pravidla integrace *per partes* a jí podobná vícerozměrná zobecnění.
- Rovnost dvou distribucí se pozná podle rovnosti jejich vlastností pod integrálem.
- Prostor zobecněných funkcí je úplnější. Speciálně platí, že bodový náboj jako výsledek zmenšování např. homogenně nabitých kuliček má mezi distribucemi obdobu v δ -funkci jako limitě na jednotku normovaných funkcí úměrných charakteristické funkci těchto kuliček – viz. Obr. 3.

Polní rovnice s distribucí na pravé straně

Je snadné se přesvědčit, že elektrické pole bodového náboje splňuje všude podmínku nulové divergence, jakkoli použité úpravy nedávají smysl v místě, kde tento bodový náboj leží – tam musí být nábojová hustota nekonečná. Tuto vlastnost můžeme zapsat vztahem

$$\operatorname{div} \frac{q'}{4\pi} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = q' \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') . \quad (20)$$

Tento vztah je tvrzením o rovnosti dvou distribucí a nedokazuje se porovnáváním funkčních hodnot, nýbrž rovností obou stran pod integračním znaménkem, případně důvěřujeme-li v úplnost prostoru distribucí jako limita polí nebodového náboje.

Význam rovnosti dvou distribucí si přiblížíme z pohledu a) fyzikálně motivovaného a b) matematictější přesnějšího. a) V jednom z bodů, jimiž jsme zavedli distribuce se bez dalších podrobností říká, že rovnost distribucí se pozná podle jejich rovnosti pod integračním znaménkem. Budeme-li na distribuce nahlížet jako na jistý druh nespojitého rozložení náboje, lze kritérium rovnosti distribucí chápat tak, že pakliže počítáme množství náboje v nějakém objemu (což je integrál z těchto distribucí) dají obě distribuce stejné výsledky pro stejné objemy. Levá strana má tvar úplné divergence, takže ji převedeme na plošný integrál a tento pak s použitím $dS_{\perp} = |\vec{x} - \vec{x}'|^2 d\Omega$ na integrál prostorového úhlu Ω , pod nímž hranici ∂V vidíme z bodu \vec{x}'

$$\oint_{\partial V} \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial V} \frac{1}{4\pi} \frac{dS_{\perp}}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} = \oint_{\partial V} \frac{1}{4\pi} d\Omega = \begin{cases} 1 & \vec{x}' & \text{uvnitř } V \\ 0 & \vec{x}' & \text{vně } V \\ \text{neodef.} & \vec{x}' & \text{na hranici } V \end{cases} . \quad (21)$$

Vidíme tak, že po vyintegrování se levá strana (20) chová jako bodový náboj v bodě \vec{x}' , tedy jako strana pravá.

b) Protože je prostor distribucí bohatší, než jen kombinace prostoru spojitých funkcí a δ -funkcí je z ve skutečnosti rovnost distribucí f a g potřeba dokazovat složitěji – pro všechny “hezké” funkce ψ musí platit $\int_{R^3} \psi(\vec{x})f(\vec{x})d^3x = \int_{R^3} \psi(\vec{x})g(\vec{x})d^3x$. Nám jak uvidíme stačí aby funkce ψ byla hladká a nulová v nekonečnu, pro seriózní práci potřebují matematici testovací funkce ještě o něco hezčí. Zatímco pravá strana (20) okamžitě dává

$$\int \psi(\vec{x})q'\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')d^3x = q'\psi(\vec{x}'), \quad (22)$$

levou stranu

$$\int \psi(\vec{x}) \operatorname{div} \frac{q'}{4\pi} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x = \quad (23)$$

upravíme pomocí identity $\nabla \cdot \psi \vec{A} = \vec{A} \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \vec{A}$ na rozdíl dvou integrálů, přičemž první má tvar úplné divergence:

$$= \int \operatorname{div} \left[\psi(\vec{x}) \frac{q'}{4\pi} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right] d^3x - \frac{q'}{4\pi} \int \operatorname{grad} \psi(\vec{x}) \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x \quad (24)$$

Protože podle Gaussovy věty přejde první integrál na plošný integrál přes hranici integrační oblasti, jíž je nekonečně velká sféra na níž ψ vymizí, zbyde jen druhý z integrálů. Po zavedení posunutých souřadnic $\vec{y} = \vec{x} - \vec{x}'$ (jakobián téhle transformace je jedna) a zápisu integrace $d^3y = r^2 dr d\Omega$ a zavedení funkce $\Phi(\vec{y}) = \psi(\vec{y} + \vec{x}') = \psi(\vec{x})$ se ukáže, že skalární součin gradientu ψ a radiálního vektorového pole $\vec{y}/|\vec{y}|^3$ dá součin radiální derivace $(\partial_r \Phi)$ a velikosti zmíněného vektorového pole, tj. r^{-2} . Proto můžeme psát

$$= -\frac{q'}{4\pi} \int \partial_r \Phi(r, \theta, \phi) \cdot dr d\Omega = -\frac{q'}{4\pi} \int \partial_r \Phi(r, \theta, \phi) dr \int d\Omega = -q' [\Phi(r)]_0^{\infty} = q' \psi(\vec{x}') \quad (25)$$

Protože se tedy oba integrály rovnají pro všechny hezké funkce $\psi(\vec{x})$ (jež splňují $\psi(\infty) = 0$), představují obě strany (20) tutéž zobecněnou funkci. *Pozn.* Povšimněte si význam důkazu, když ve všech vztazích položíte $q' = 1$ a $\psi(\vec{x}) = \rho(\vec{x})/\epsilon_0$.

Aplikací divergence na (14) pak za použití rovnosti (20) dostáváme potvrzení splnění polních rovnic

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) &= \operatorname{div} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\vec{x}') \operatorname{div} \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\vec{x}') \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x}) .\end{aligned}$$

Jinak řečeno, zjištění, že divergence pole bodového náboje je distribuce úměrná δ -funkci nám umožňuje proházet diferenciální operátor div a integrační znaménko.

Obdobně bychom zjištěním, že elektrické pole bodového náboje má nulovou rotaci *ve smyslu distribucí* dokázali, že i druhá polní rovnice je řešením (14) splněna.

Potenciál elektrostatického pole

Rovnice $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ znamená, že elektrostatické pole je gradientem nějaké skalární funkce. S přihlédnutím ke konvenci se zavádí

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\operatorname{grad} \Phi(\vec{x}) \quad (26)$$

Toto tvrzení je silnější než pouhá identita $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u(\vec{x}) \equiv 0$, protože říká, že v elektrostatice lze každé elektrické pole psát jako gradient jisté skalární funkce. Zda je to opravdu možno učinit v celém prostoru je nelehká otázka, jejíž vyjasnění spadá do pokročilé matematiky. Budeme zatím předpokládat, že v rámci elektrostatiky jsou příslušné matematické požadavky splněny a při výkladu elektromagnetické indukce si ukážeme, jak tyto požadavky souvisí s fyzikou.

Samozřejmě také vidíme, že rovnice (26) neurčuje potenciál $\Phi(\vec{x})$ jednoznačně, při jeho výpočtu z \vec{E} máme dán jen rozdíl potenciálu mezi libovolnými body vztahem

$$\Phi(\vec{x}_2) - \Phi(\vec{x}_1) = - \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} . \quad (27)$$

Libovůle budeme využívat k tomu, že důležitým místům, jako je nekonečno nebo povrch jistého vodiče přiřadíme nulový potenciál.

Výše uvedenou přímou integrací elektrické intenzity lze nalézt, že potenciál elektrostatického pole bodového náboje je

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} . \quad (28)$$

Zavedením potenciálu jsme jednu polní rovnici splnili automaticky (tu homogenní), z druhé pak dosazením za \vec{E} podle (26) dostáváme rovnici Poissonovu

$$\Delta \Phi(\vec{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x}) . \quad (29)$$

Protože víme, že nábojová hustota bodového náboje je úměrná δ -funkci, nepřekvapí Laplaceův operátor $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ působící na $1/|\vec{x} - \vec{x}'|$ je opět distribuce a že platí následující důležitý vztah

$$\Delta \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -4\pi \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') . \quad (30)$$

Stojí za to pochopit tento vztah z hlediska limitního procesu. Především s využitím translační invariance operátoru Δ stačí když budeme zkoumat působení laplaciánu na funkci $1/r$. Abychom se vyhnuli nekonečnu v bodě $r = 0$ nahradíme v blízkosti počátku souřadnic (uvnitř koule o poloměru a) funkci $1/r$ kvadratickou funkcí tak, abychom mohli bez potíží spočítat druhé derivace obsažené v laplaciánu

$$u(r) = \begin{cases} \frac{3a^2 - r^2}{2a^3} & r < a \\ \frac{1}{r} & r \geq a \end{cases} . \quad (31)$$

Takto definované vylepšení (funkce $u(r)$ má spojité funkční hodnoty a první derivace) přejde pro $a = 0$ ve funkci $1/r$. Víme-li, že $\Delta u(r) = (ru(r))''/r$, snadno spočteme, že

$$\Delta u(r) = \begin{cases} \frac{-3}{a^3} = -4\pi \frac{1}{V_k(a)} & r < a \\ 0 & r \geq a \end{cases} , \quad (32)$$

kde $V_k(a)$ označuje objem koule o poloměru a , tedy oblasti, kde je $\Delta u(r)$ nenulové a nabývá konstantní hodnoty $-4\pi/V_k(a)$. Z toho je vidět, že tato funkce představuje přiblížení funkce $-4\pi \delta^3(\vec{x})$. Na cvičení tentýž příklad řešíme jako problém průběhu potenciálu $\Phi(r) = -\frac{Q}{4\pi}u(r)$ rovnoměrně nabitě koule a její limity jako bodového náboje – při zachování celkového náboje Q musí jít v této limitě nábojová hustota do nekonečna jako $Q/V_k(a)$.

S použitím (30) v souladu s představou o spojitým nábojovém rozložení jako soustavě bodových nábojů dostáváme z potenciálu jednoho bodového náboje potenciál buzený spojitým rozložením náboje

$$\Phi(\vec{x}) = \int \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \int \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' . \quad (33)$$

Místo integrálu z vektorové veličiny nyní stačí při hledání pole buzeného nábojovou hustotou ρ počítat již jen jediný trojný integrál. Přesto je díky přítomnosti odmocnin ve jmenovateli jeho analytické nalezení vzácné. A to i v případě, kdy uvažujeme plošné (a někdy dokonce jen lineární) nábojové hustoty.

Metoda Greenovy funkce

Ačkoli (33) představuje známý vztah, je vhodné zmínit, že patří do jisté důležité třídy formulek. V lineární algebře se zkoumá řešení konečně-rozměrné úlohy

$$A\vec{y} = \vec{b} \quad (34)$$

mimo jiné lze tuto úlohu řešit tak, že pro všechny bázové vektory \vec{e}_i nalezneme konkrétní řešení úlohy

$$A\vec{g}_i = \vec{e}_i . \quad (35)$$

Roložíme-li pak vektor $\vec{b} = b_i\vec{e}_i$, kde b_i představují koeficienty \vec{b} v dané bázi, můžeme pro řešení psát

$$\vec{y} = b_i \vec{g}_i . \quad (36)$$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{A} \vec{y} = \vec{b} & -\Delta \phi(\vec{x}) = \tilde{\rho} \\ \mathbf{A} \vec{g}_k = \vec{e}_k & -\Delta G(\vec{x}; \vec{x}') = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \\ \vec{b} = \sum b_k \vec{e}_k & \tilde{\rho} = \int \rho(\vec{x}') \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') d^3x' \\ \mathbf{A} \sum b_k \vec{g}_k = \sum b_k \vec{e}_k & -\Delta \int \tilde{\rho}(\vec{x}') G(\vec{x}; \vec{x}') d^3x' = \int \tilde{\rho}(\vec{x}') \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') d^3x' \\ \vec{y} = \sum b_k \vec{g}_k & \phi(\vec{x}) = \int \tilde{\rho}(\vec{x}') G(\vec{x}; \vec{x}') d^3x' \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} A_{ij} y_j = b_i & -\Delta \phi(\vec{x}) = \tilde{\rho} \\ A_{ij} (g_k)_j = \delta_{ki} & -\Delta G(\vec{x}; \vec{x}') = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \\ b_i = \sum b_k \delta_{ki} & \tilde{\rho} = \int \rho(\vec{x}') \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') d^3x' \\ A_{ij} \sum b_k (g_k)_j = \sum b_k \delta_{ki} & -\Delta \int \tilde{\rho}(\vec{x}') G(\vec{x}; \vec{x}') d^3x' = \int \tilde{\rho}(\vec{x}') \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') d^3x' \\ y_i = \sum b_k (g_k)_i & \phi(\vec{x}) = \int \tilde{\rho}(\vec{x}') G(\vec{x}; \vec{x}') d^3x' \end{array}$$

Tabulka 1: Porovnání řešení soustavy rovnic a Poissonovy rovnice. Ve spodní části předpokládáme $(e_k)_i = \delta_{ki}$, takže $(g_k)_j$ je trasponovaná inverzní matice k A_{kj} . Pro přehlednost je $\tilde{\rho} = \rho/\epsilon_0$. Vztah $\Delta(1/r) = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r})$ vede na $G(\vec{x}; \vec{x}') = (4\pi)^{-1}/|\vec{x} - \vec{x}'|$ a tato funkce hraje stejnou roli, jako inverzní matice u soustavy rovnic, kde spojitá proměnná \vec{x} hraje roli indexu a sčítání je nahrazeno integrací.

Řešíme-li v elektrostatice úlohu (29), představují funkce $\rho_{\vec{x}'}(\vec{x}) = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$ obdoby bázových vektorů \vec{e}_i s tím, že diskrétní index i je pro tento problém nahrazen “spojitým indexem” \vec{x}' . Rozklad pravé strany do báze má pak místo sumy tvar integrálu

$$\rho(\vec{x}) = \int \rho(\vec{x}') \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') d^3x' \quad (37)$$

Za povšimnutí stojí, že bázové funkce $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ jsou jistou obdobou diskrétního δ_{ij} , neboť koeficienty v této bázi jsou rovny přímo funkčním hodnotám. Nalezneme-li pro každou bázovou funkci $\rho_{\vec{x}'}(\vec{x})$ příslušný potenciál $\Phi_{\vec{x}'}(\vec{x})$ takový, že

$$\Delta \Phi_{\vec{x}'}(\vec{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\vec{x}'}(\vec{x}), \quad (38)$$

můžeme jejich složením získat řešení Poissonovy rovnice

$$\Phi(\vec{x}) = \int \rho(\vec{x}') \Phi_{\vec{x}'}(\vec{x}) d^3x' = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (39)$$

Funkce

$$\Phi_{\vec{x}'}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (40)$$

tedy potenciál buzený jednotkovým bodovým nábojem se proto též nazývá Greenovou funkcí (diferenciálního) operátoru $-\epsilon_0\Delta$. Později uvidíme, že různé hraniční podmínky povedou k jeho různým Greenovým funkcím.

Plošné a lineární nábojové hustoty

V integrálech, které jsme doposud napsali je mírou příspěvku k integraci množství náboje, nikoli samotný objem a tak kromě nábojové hustoty ρ zavádíme ještě hustotu plošnou σ a lineární λ vztahem

$$dq' = \rho(\vec{x}')dV(\vec{x}') = \sigma(\vec{x}')dS(\vec{x}') = \lambda(\vec{x}')dl(\vec{x}'). \quad (41)$$

Například plocha nabitá danou plošnou nábojovou hustotou budí pole

$$\Phi(\vec{x}) = \int \frac{\sigma(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dS'. \quad (42)$$

Pole buzené soustavou objemových, plošných, lineárních a bodových nábojů tak dostaneme jako součet příslušných tří, dvo, jednorozměrných integrálů a potenciálů příslušných bodových nábojů. Pojem distribuce jsme zavedli abychom dokázali reprezentovat bodové náboje jako zvláštní druh objemové nábojové hustoty $\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$. Podobně je možno distribucemi popsat i plošné a lineární nábojové hustoty. Ukážeme si, jak to vypadá pro plošné rozložení náboje.

Plocha na níž je náboj rozložen nechť je pro jednoduchost popsána explicitní rovnicí $r = a$ tedy plocha je totožná se souřadnicovou plochou v nějakých křivočarých souřadnicích (pro jednoduchost si vybereme souřadnice sférické). Nábojová hustota je pak popsána distribucí $\sigma(\theta, \phi)\delta(r - a)$, tedy nula všude kromě sféry $r = a$. S využitím vztahu $\int \delta(x - a)f(x)dx = f(a)$ ¹ můžeme pro celkový náboj psát

$$Q = \int \rho(\vec{x}') d^3x' = \int \rho(r, \theta, \phi) r^2 dr d\Omega = \int \sigma(\theta, \phi)\delta(r - a) r^2 dr d\Omega \quad (43)$$

$$= \int \sigma(\theta, \phi) d\Omega \int \delta(r - a) r^2 dr = a^2 \int \sigma(\theta, \phi) d\Omega = 4\pi a^2 \bar{\sigma}, \quad (44)$$

tedy náboj je (samozřejmě) roven součinu povrchu koule a průměrné nábojové hustoty $\bar{\sigma}$. Pokud je plocha popsána implicitní rovnicí např. $f(x, y, z) = 0$ je výpočet komplikovanější (viz Proseminář teoretické fyziky).

Ještě jedna vlastnost jednorozměrných δ -funkcí nám přijde vhod – jsou to totiž derivace skokových funkcí. Ve smyslu distribucí totiž platí

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \operatorname{sgn}(x - a) = \frac{d}{dx} \Theta(x - a) = \delta(x - a). \quad (45)$$

Provést důkaz této rovnosti opět znamená ukázat rovnost obou stran pod integračním znaménkem

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \frac{d}{dx} \Theta(x - a) dx &= [\psi(x) \Theta(x - a)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{dx} \psi(x) \right] \Theta(x - a) dx \\ &= 0 - \int_a^{\infty} \left[\frac{d}{dx} \psi(x) \right] dx = \psi(a), \end{aligned} \quad (46)$$

pro pochopení je ale lepší studovat limitu spojitých aproximací skokové funkce a jejích derivací, (chápána jako limita plošného náboje popisuje tento limitní proces ztenčování nabitě oblasti při zachování celkového náboje).

¹Vztahy platící pro jednorozměrné δ -funkce jsou přehledně uvedeny v dodatku II v [Kvas]

Víme-li, že nábojová hustota nabitě roviny $z = 0$ je $\sigma\delta(z)$, vidíme, že elektrické pole nabitě roviny uvedené v následujícím odstavci má divergenci rovnou této zobecněné funkci.

Nabitá rovina $z = 0$ s konstantní nábojovou hustotou σ budí v prostoru pole popsané

$$\Phi(\vec{x}) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}|z|, \quad \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \operatorname{sgn}(z) \vec{e}_z. \quad (47)$$

Protože rozumnou plochu a na ní sídlící nábojovou hustotu si v dostatečné blízkosti můžeme nahradit rovinou s konstantní nábojovou hustotou má předcházející řešení širší význam. Speciálně je ilustrací známého důsledku Gaussovy věty: elektrický potenciál při přechodu nabitou plochou je spojitá funkce, jeho derivace se ale skokem mění o σ/ϵ .

V úvodní přednášce Elektřina a Magnetismus jste zavedli plošnou divergenci

$$\operatorname{Div} \vec{E} = \vec{n} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1), \quad (48)$$

kde \vec{n} je jednotková normála k ploše oddělující oblasti 1 a 2 mířící z oblasti 1 do 2. S její pomocí se pak píše

$$\operatorname{Div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma. \quad (49)$$

I v případně plošných nábojů zůstává v platnosti vztah $\vec{E}(\vec{x}) = -\operatorname{grad} \Phi(\vec{x})$ pouze je výsledná elektrická intenzita nespojitá. Podrobněji se budeme zabývat nespojitostmi polí při studiu chování Maxwellových rovnic na rozhraní dvou prostředí. V přednášce se naopak nesetkáme s nespojitým elektrickým potenciálem, který si názorně můžeme představit jako limitu kondenzátoru s nekonečně tenkým dielektrikem, kdy při přibližování elektrod neměníme napětí, a tedy zvyšujeme náboj. Výsledkem je nekonečná elektrická intenzita v místě skoku potenciálu – více např. v [SeSt, odst. Elektrická dvojrůstka].

Lineární náboje jsou na rozdíl od plošných obklopeny nekonečně silným polem. V jistém přiblížení můžeme na lineární náboj zblízka pohlížet jako na přímkou s konstantní nábojovou hustotou a tak stojí uvést vlastnosti polí zde.

Nabitá přímková tvořená osou z na níž je rozprostřena konstantní nábojová hustota λ je obklopena polem

$$\Phi(\vec{x}) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln R, \quad \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \vec{e}_R. \quad (50)$$

Oba vztahy lze snadno získat z Gaussovy věty zvolíme-li integrační objemy respektující symetrii problému. Oproti bodovému náboji $E \sim r^{-2}$ ubývá intenzita pole okolo nekonečna s převrácenou hodnotou vzdálenosti od přímky. Protože ale celkový náboj přímky je nekonečný nelze v nekonečnu dosáhnout nulového potenciálu.

Na cvičeních spočteme za použití přímé integrace potenciál rovnoměrně nabitě úsečky a kružnice, tato pole nám při výkladu multipólového rozvoje poslouží jako příklady axiálně symetrických polí.

Symetrie

Symetrie daného problému je dána operacemi, které může někdo s poli a zdroji učinit, když na chvíli přestaneme dávat pozor, aniž bychom to mohli poznat. Tolik definice symetrie dle Prof. Kvasnici. Z této definice je zřejmé, že symetrie problému tvoří grupu – lze neudělat nic, učiněnou změnu mohu vrátit a nebo k ní přidat další. Pro naše potřeby nebude příliš významná sama struktura symetrií, spíše dopad jistých symetrií na tvar polí. Víme, že pole můžeme znázorňovat pomocí ekvipotenciálních ploch a siločar. Symetrie se pak projeví tím, že tyto geometrické útvary přecházejí příslušnou transformací samy na sebe.

V této přednášce vystačíme s několika symetriemi: translační, axiální a sférickou.

Translační symetrie odpovídá situaci, kdy po posunutí zdrojů a polí o libovolný násobek jistého směru \vec{n} dostaneme tutéž situaci. Jde o případ, kdy je pole vytvářeno objemovou nábojovou hustotou splňující podmínku $\rho(\vec{x} + s\vec{n}) = \rho(\vec{x})$, což je mj. případ pole buzeného soustavou navzájem rovnoběžných vodičů neměnného průřezu. Výsledné pole (nevnucují-li nám okrajové podmínky něco jiného) bude mít podobnou vlastnost. Zapišeme ji snadno jak pro potenciál $\Phi(\vec{x} + s\vec{n}) = \Phi(\vec{x})$, tak pro elektrickou intenzitu $\vec{E}(\vec{x} + s\vec{n}) = \vec{E}(\vec{x})$. Rovnost dvou vektorů v různých bodech znamená mj. rovnost jejich kartézských komponent. Obvykle volíme směr $\vec{n} = \vec{e}_z$ a tak můžeme psát $\rho(x, y)$, $\Phi(x, y)$ a $\vec{E}(x, y)$, tedy, že žádná veličina nezávisí na souřadnici z . Zde je vidět význam tzv. *adaptace souřadnic*: Při volbě souřadnic jsme vzali v úvahu symetrii problému, což se odrazilo ve snížení počtu souřadnic, na nichž pole závisí. Navíc – méně proměnných znamená méně netriviálních parciálních derivací v polních rovnicích a to usnadňuje jejich řešení.

Axiální symetrie odpovídá situaci, kdy po otočení zdrojů a polí o libovolný úhel kolem dané osy dostaneme tutéž situaci. Tentokrát je pole vytvářené nábojovou hustotou, která splňuje $\rho(R_s\vec{x}) = \rho(\vec{x})$,

kde R_s představuje otočení koncového bodu průvodiče $\vec{x}' = R_s \vec{x}$ o úhel s kolem dané osy. Potenciál splňuje stejnou rovnici, ovšem symetrie vektorového pole elektrické intenzity je nyní popsána vztahem $\vec{E}(R_s \vec{x}) = R_s \vec{E}(\vec{x})$ – vektor pole je třeba při přechodu z bodu do bodu otočit. Hned vidíme, že věci se velmi komplikují neprochází-li osa počátkem souřadnic – jen tehdy je otáčení koncového bodu průvodiče $R_s \vec{x}$ totožné s operací otáčení vektorů $R_s \vec{E}$.

Adaptací souřadnic tak aby respektovaly axiální symetrii si opět můžeme zjednodušit práci. Osu otáčení ztotožníme s osou z a jako souřadnice použijeme souřadnice válcové R, ϕ a z . Pak pro skalární veličiny podmínka symetrie zní $\Phi(R, \phi + s, z) = \Phi(R, \phi, z)$, a říká, že skalární veličina nezávisí na souřadnici ϕ , tj. píšeme $\Phi(R, z)$.

Pro snadné zapsání symetrických vlastností vektorových polí ale musíme učinit o krok víc. Není totiž pravda, že \vec{E} nezávisí na ϕ . Zde pomůže *adaptace báze vektorů*: zvolíme bázi, jež respektuje axiální symetrii, v níž složky axiálně symetrického pole nebudou záviset na ϕ . Například ve válcových souřadnicích (lze použít i souřadnice sférické) má obecné axiálně symetrické pole tvar

$$\vec{E}(R, \phi, z) = E_R(R, z) \vec{e}_R(R, \phi) + E_\phi(R, z) \vec{e}_\phi(R, \phi) + E_z(R, z) \vec{e}_z . \quad (51)$$

(Více o báze vektorech jako je např. \vec{e}_R a o souvislosti polí báze vektorů a příslušných souřadnic ve výkladu o křivočarých souřadnicích). Vidíme, že důsledky obou výše uvedených symetrií lze shrnout tak, že vedou ke zmazení závislosti polí na jedné, vhodně zvolené souřadnici.

Sférická symetrie, která připouští libovolné otočení polí a zdrojů okolo středu symetrie, se pak odrazí ve zmazení dvou souřadnic. Tedy alespoň pokud zvolíme souřadnice vhodné pro popis takto symetrických polí – souřadnice sférické. Skalární sféricky symetrická funkce je pouze funkcí radiální souřadnice r , tj. např. potenciál $\Phi(r)$, její isoplochy jsou koncentrické sféry. Sféricky symetrická vektorová pole pak jsou obzvláště jednoduchá

$$\vec{E}(r, \theta, \phi) = E_r(r) \vec{e}_r(r, \theta, \phi) , \quad (52)$$

neboť existuje jen jediné sféricky symetrické báze pole $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ – radiální báze pole sférických souřadnic. zbylá dvě sférická báze pole \vec{e}_θ a \vec{e}_ϕ jsou pouze axiálně symetrická. Ani žádné jiné pole tečných vektorů ke sféře nemůže tvořit sféricky symetrickou bázi (lze snadno nahlédnout z *Hairy Ball Theorem* – každé spojitě pole tečných vektorů na sféře je někde nulové, sféricky symetrické musí být nulové všude a není to tedy báze).

Vodiče v elektrostatice

Vymizení magnetických polí v elektrostatice je svázáno s vymizením proudů. Proto v elektrostatice musí uvnitř vodivého tělesa být elektrická intenzita nulová. Po zavedení elektrického potenciálu tak máme uvnitř a na povrchu vodičů

$$\Phi(\vec{x}) = U_A \quad \vec{x} \in V_A . \quad (53)$$

Jednotlivé, navzájem izolované vodiče V_A jsou očíslovány indexem A . Poissonova rovnice zde nabývá nového smyslu – hledáme takový potenciál, aby jeho hodnota byla na povrchu vodičů konstantní (rozšíření tohoto konstantního potenciálu dovnitř vodičů nestojí za řeč). I při jinak nepřítomné nábojové hustotě mezi vodiči přestává být metoda přímé integrace užitečná – nevíme jak se náboje po povrchu vodičů rozdělí. To, že povrch vodiče je ekvipotenciální plocha znamená, že $d\Phi = \text{grad } \Phi \cdot d\vec{l} = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ pro všechna posunutí $d\vec{l}$ po povrchu vodiče, tedy, že elektrická intenzita je kolmá k povrchu (známá relace siločar a ekvipotenciál). Z Gaussovy věty pak za uvážení nulového pole uvnitř vodiče vyplývá

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} , \quad (54)$$

kde \vec{n} je vnější normála k povrchu vodiče. S výjimkou dostatečně jednoduchých situací lze pole nabitými vodiči hledat jen přibližnými (obzvláště numerickými) metodami. Na této přednášce se soustředíme na výše uvedené výjimky. Půjde obvykle o “kulatá” tělesa, a řešení nedokážeme nalézt s použitím kartézských souřadnic.

Příklad: Koncentrické vodivé sféry s využitím $\Delta\Phi(r) = r^{-1}(r\Phi(r))''$. Význam integračních konstant.

Křivočaré souřadnice

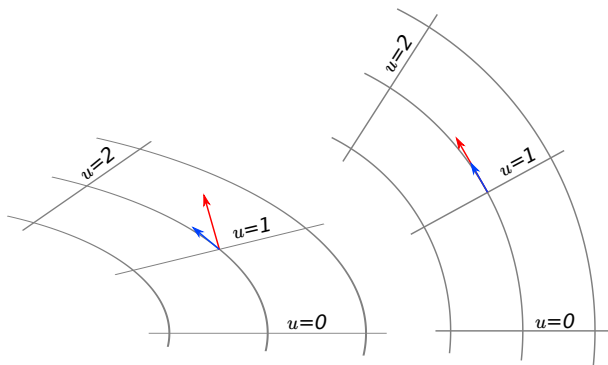
Polohu bodu můžeme udávat pomocí vhodné trojice souřadnic – ne nezbytně kartézských (např. zeměpisné souřadnice + “nadmořská” výška tvoří docela komplikované, nicméně praktické souřadnice). V elektrodynamice až na výjimky vystačíme se souřadnicemi kartézskými, válcovými a sférickými. Protože budeme potřebovat v daných souřadnicích vyjadřovat i vektorové veličiny a také umět počítat s nabla, nevystačíme s pouhým zavedením souřadnic. Nejdříve připomeneme zavedení válcových a sférických souřadnic kde uvedeme i veličiny jejichž význam se vyjasní až poté, co se vrátíme k vektorové analýze v libovolných ortogonálních křivočarých souřadnicích.

Vektory a křivočaré souřadnice

Víme, že přizpůsobení souřadnic symetrii problému vede k zjednodušení rovnic. Protože v našich rovnicích vystupují také vektorová pole, je potřeba zavést bázová vektorová pole a symetrická vektorová pole popisovat koeficienty vzhledem k této bázi.

Důležitým poznatkem bude skutečnost, že na rozdíl od kartézských bázových vektorových polí bázová pole respektující symetrie nemusí být konstantní vektory, jen jejich velikost budeme požadovat rovnou jedné. V důsledku toho pole s konstantními koeficienty v křivočaré bázi není konstantní vektorové pole!

Označme křivočaré souřadnice obecně q_1, q_2, q_3 . Jaké máme kandidáty na naše bázová pole v křivočarých souřadnicích?



Obrázek 4: Vektory ∇u (červená) a $\partial\vec{x}/\partial u$ (modře) v křivočarém souřadném systému obecném (vlevo) a ortogonálním (vpravo).

(1) Měníme-li vybranou souřadnici q_i opisuje bod příslušnou souřadnicovou čáru. Pro trojici souřadnic tak máme v každém bodě 3 tečné vektory k souřadnicovým čarám procházejícím tímto bodem $\frac{\partial\vec{x}}{\partial q_1}, \frac{\partial\vec{x}}{\partial q_2}, \frac{\partial\vec{x}}{\partial q_3}$

(2) Protože souřadnice q_1, q_2, q_3 lze chápat jako skalární pole máme tu i druhou sadu vektorů – gradienty křivočarých souřadnic $\nabla q_1, \nabla q_2, \nabla q_3$.

Jak spolu obě sady vektorů souvisí objasní jejich zápis ve složkách

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad \text{vs.} \quad \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \quad (55)$$

tedy jde o Jakobiány navzájem inverzních transformací $q_1, q_2, q_3 \rightarrow x, y, z$ resp. $x, y, z \rightarrow q_1, q_2, q_3$, tedy

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_1} & \frac{\partial x_3}{\partial q_2} & \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \end{bmatrix} \quad \text{vs.} \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial q_1}{\partial x_2} & \frac{\partial q_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial q_2}{\partial x_1} & \frac{\partial q_2}{\partial x_2} & \frac{\partial q_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial q_3}{\partial x_1} & \frac{\partial q_3}{\partial x_2} & \frac{\partial q_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}. \quad (56)$$

To, že jde o navzájem inverzní matice se dá zapsat též jako $\nabla q_i \cdot \partial\vec{x}/\partial q_j = \delta_{ij}$. Z tohoto vztahu vyplývající kolmost, řekněme, ∇q_1 a $\partial\vec{x}/\partial q_2$ neříká ovšem nic o tom jestli vektory ∇q_1 a $\partial\vec{x}/\partial q_1$ jsou navzájem rovnoběžné. Abychom vektory vzniklé derivací polohy podle parametru (třeba rychlost) a vektory (formy) vzniklé derivací podle polohy (gradient potenciálu) nemuseli odlišovat a mohli je vyjadřovat pohodlně ve stejné bázi budeme požadovat aby i v křivočarých souřadnicích zůstala přece jen zachována nějaká vlastnost kartézských souřadnic – rovnoběžnost gradientů souřadnic a tečen k souřadnicovým čarám. Abychom toho dosáhli, potřebujeme aby souřadnicové čáry byly na sebe navzájem kolmé. Platí totiž, že jsou-li $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \perp \vec{v}_3 \perp \vec{v}_1$ pak pro matici složenou z vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ platí

$$[\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{|\vec{v}_1|^2} \vec{v}_1 \\ \frac{1}{|\vec{v}_2|^2} \vec{v}_2 \\ \frac{1}{|\vec{v}_3|^2} \vec{v}_3 \end{bmatrix}, \quad (57)$$

z čehož je srovnáním s výše uvedenými Jacobiho maticemi zřejmé, že v *ortogonálních křivočarých souřadnicích*, pro něž platí, že v každém bodě jsou souřadnicové čáry na sebe navzájem kolmé $\partial\vec{x}/\partial q_1 \perp \partial\vec{x}/\partial q_2 \perp \partial\vec{x}/\partial q_3 \perp \partial\vec{x}/\partial q_1$ se vektory $\partial\vec{x}/\partial q_i$ a ∇q_i liší jen svou velikostí. Jejich shodný směr označíme \vec{e}_i a zvolíme jej za bázový vektor. Píšeme

$$\frac{\partial\vec{x}}{\partial q_i} = h_i \vec{e}_i \quad \nabla q_i = \frac{1}{h_i} \vec{e}_i \quad (58)$$

a těmito vztahy zavádíme Laméovy koeficienty h_i , které určují skutečnou velikost posunutí při změně křivočaré souřadnice o dq_i . (Také platí, že pokud je nějaká křivočará souřadnice bezrozměrná, má příslušný Laméův koeficient rozměr délky.)

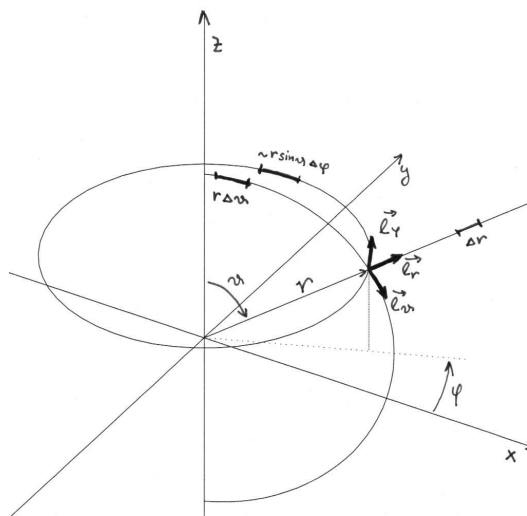
Pro vektor posunutí při změně křivočarých souřadnic platí

$$\vec{dl} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_3} dq_3 = h_1 \vec{e}_1 dq_1 + h_2 \vec{e}_2 dq_2 + h_3 \vec{e}_3 dq_3, \quad (59)$$

a pro kvadrát velikosti tohoto posunutí pak

$$dl^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2. \quad (60)$$

Na tomto vztahu je pozoruhodné, že chápeme-li Laméovy koeficienty jako funkce křivočarých souřadnic, nejsou v tomto vztahu patrné žádné pozůstatky kartézského souřadného systému z nějž jsme vycházeli a přitom popisuje vzdálenosti v prostoru. V kontextu této přednášky tato *metrika* třírozměrného euklidovského prostoru v křivočarých souřadnicích představuje především nejkompaktnější způsob jak si pro dané souřadnice zapamatovat jejich Laméovy koeficienty.



Obrázek 5: Bázové vektory a délky oblouků souřadnicových čar ve sférických souřadnicích.

Vztah (59) přímo použijeme při výpočtu integrálních veličin. Např pro vektorové pole \vec{U} je cirkulace přes křivku $\gamma : \{\vec{x}(s) | s \in (s_1, s_2)\}$

$$\oint_{\gamma} \vec{U} \cdot d\vec{l} = \int_{s_1}^{s_2} \vec{U} \cdot \frac{d\vec{l}}{ds} ds = \int_{s_1}^{s_2} \vec{U} \cdot \left(h_1 \vec{e}_1 \frac{dq_1}{ds} + h_2 \vec{e}_2 \frac{dq_2}{ds} + h_3 \vec{e}_3 \frac{dq_3}{ds} \right) ds \quad (61)$$

Podobně se v plošném integrálu objeví

$$d\vec{S} = \frac{\partial \vec{l}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{l}}{\partial v} du dv. \quad (62)$$

Samozřejmým důsledkem ortogonalit souřadnic je také možnost transformovat vektory z jedné báze do druhé prostřednictvím skalárního součinu s bázovými vektory – skalární součiny bázových vektorů s rozkládaným vektorem totiž dávají příslušné koeficienty, například

$$\vec{e}_z = (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r + (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\theta) \vec{e}_\theta + (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\phi) \vec{e}_\phi = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta + 0 \vec{e}_\phi. \quad (63)$$

Samozřejmá vlastnost křivočarých bázových polí – to, že nejsou konstantní, ale jde o funkce souřadnic – způsobí že bázové vektory nemůžeme vytýkat před derivace a integrály, jak jsme zvyklí u báze kartézské. V případě derivací nám toto nepohodlí vynahradí dále uvedené vzorce pro výpočet gradientu, divergence atd., při integraci vektorové veličiny nám ovšem nezbyde než se tím či oním způsobem vrátit k integraci složek vzhledem k nějaké konstantní bázi.

Příklad: Pokud při výpočtu polohy těžiště polokoule počítáme $\int \vec{r} dV = \int (r \vec{e}_r) r^2 dr d\Omega = \vec{e}_r 2\pi \int r^3 dr = \dots$ dospějeme rychle k výsledku, ovšem špatnému. Pole \vec{e}_r mění v objemu tělesa (i mimo něj) směr.

$x = r \sin \theta \cos \phi$	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$r \in \langle 0, \infty \rangle$
$y = r \sin \theta \sin \phi$	$\theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$	$\theta \in \langle 0, \pi \rangle$
$z = r \cos \theta$	$\phi = \arg(x + iy)$	$\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$
$d\vec{l} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} d\phi = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{e}_\phi$		
$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$		
$h_r = 1$	$\vec{e}_r = [\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta]$	
$h_\theta = r$	$\vec{e}_\theta = [\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta]$	
$h_\phi = r \sin \theta$	$\vec{e}_\phi = [-\sin \phi, \cos \phi, 0]$	
$\text{grad } \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \vec{e}_\phi$		
$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} E_\phi$		
$\Delta \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \Phi \right]$		

Tabulka 2: Sférické souřadnice a související vztahy.

V následujících tabulkách jsou pro **sférické souřadnice** a **válcové souřadnice** shrnuty transformace mezi těmito souřadnicemi a souřadnicemi kartézskými, kartézské komponenty bázových vektorů, Laméovy koeficienty a vztahy pro výpočet gradientu, divergence a Laplaceova operátoru na skalární funkci.

Pro úplnost je ještě třeba uvést, že často budeme ve sférických souřadnicích počítat plošné integrály přes plochu sféry $r = \text{konst.}$, kde má plošný element směr a velikost $d\vec{S} = dS \vec{e}_r = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \vec{e}_r$.

Objemový element ve sférických souřadnicích je $dV = r^2 dr d\Omega = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$. Ve válcových souřadnicích jsou plošné elementy na ploše $R = \text{konst.}$ případně $z = \text{konst.}$ rovny $d\vec{S} = dS \vec{e}_R = R d\phi dz \vec{e}_R$, resp. $d\vec{S} = dS \vec{e}_z = R d\phi dR \vec{e}_z$.

Gradient

Operace označovaná grad se objevuje přirozeně v prvním diferenciálu skalární funkce souřadnic

$$f(\vec{x}_0 + d\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + dx_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0} = f(\vec{x}_0) + d\vec{x} \cdot \nabla \Phi = f(\vec{x}_0) + d\vec{x} \cdot \text{grad} \Phi \quad (64)$$

a tedy označuje-li \vec{n} jednotkový vektor má $\vec{n} \cdot \text{grad} \Phi$ význam derivace v tomto směru. V této přednášce neodlišujeme vektory a formy a tak $\nabla \Phi$ můžeme chápat jako vektorové pole vzniklé ze skalárního. V každém bodě má gradient směr největšího vzrůstu skalárního pole a velikost rovnou derivaci v tomto směru.

S využitím věty o úplném diferenciálu dostáváme výraz pro gradient v křivočarých souřadnicích

$$\nabla f(q_i(x_j)) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \nabla q_i = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \left(\frac{1}{h_i} \vec{e}_i \right) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \vec{e}_3 \quad (65)$$

Přítomnost Laméových koeficientů ve jmenovateli si zapamatujeme tak, že gradient je změna na jednotku délky ne na radián.

Příklad: Pro funkci $f = z = r \cos \theta$ dostáváme tato alternativní návod na transformaci $\vec{e}_z = \nabla z$ do sférických souřadnic

$$\vec{e}_z = \nabla(r \cos \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial \phi} \vec{e}_\phi = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta + 0 \vec{e}_\phi. \quad (66)$$

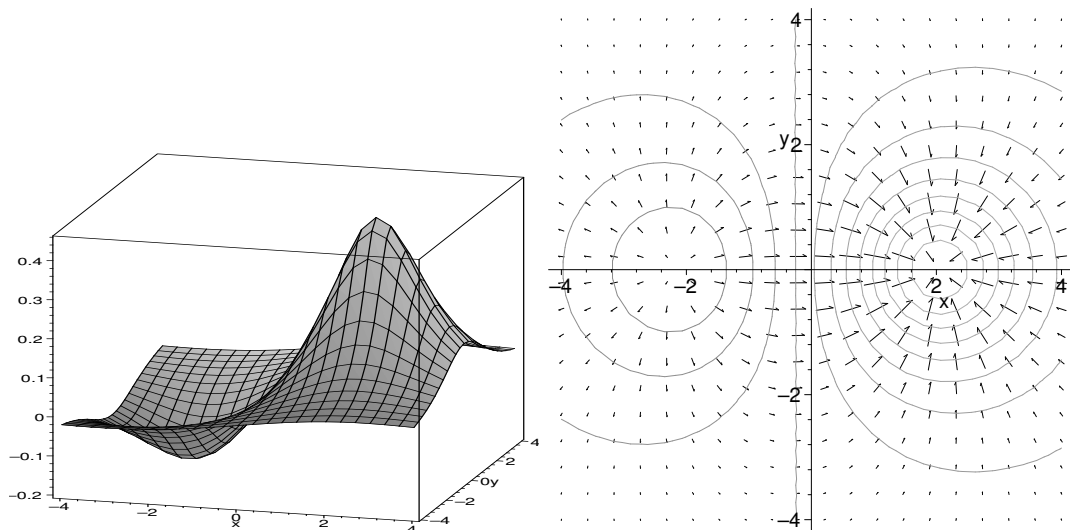
Divergence

Divergenci je možno chápat jako objemovou hustotu výtoku pole z okolí nějakého bodu

$$\text{div } \vec{E}(\vec{x}) = \lim_{V_\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{V_\Omega} \oint_{\partial \Omega_{\vec{x}}} \vec{E}(\vec{x}') \cdot d\vec{S}' \quad (67)$$

$x = R \cos \phi$	$R = \sqrt{x^2 + y^2}$	$R \in \langle 0, \infty \rangle$
$y = R \sin \phi$	$\phi = \arg(x + iy)$	$\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$
$z = z$	$z = z$	$z \in \langle -\infty, \infty \rangle$
$d\vec{l} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial R} dR + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial \vec{x}}{\partial z} dz = dR \vec{e}_R + R d\phi \vec{e}_\phi + dz \vec{e}_z$ $dl^2 = dR^2 + R^2 d\phi^2 + dz^2$		
$h_R = 1$	$\vec{e}_R = [\cos \phi, \sin \phi, 0]$	
$h_\phi = R$	$\vec{e}_\phi = [-\sin \phi, \cos \phi, 0]$	
$h_z = 1$	$\vec{e}_z = [0, 0, 1]$	
$\text{grad } \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial R} \vec{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{e}_z$ $\text{div } \vec{E} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R E_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} (E_\phi) + \frac{\partial}{\partial z} E_z$ $\Delta \Phi = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$		

Tabulka 3: Válcové souřadnice a související vztahy.



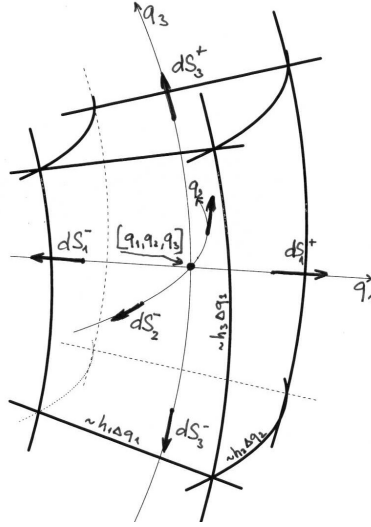
Obrázek 6: Příklad ve dvou dimenzích: funkce a vektorové pole jejího gradientu.

Za těleso V_Ω , jehož objem pošleme k nule zvolíme kvádřík $\langle q_1 - \frac{\Delta q_1}{2}, q_1 + \frac{\Delta q_1}{2} \rangle \times \langle q_2 - \frac{\Delta q_2}{2}, q_2 + \frac{\Delta q_2}{2} \rangle \times \langle q_3 - \frac{\Delta q_3}{2}, q_3 + \frac{\Delta q_3}{2} \rangle$ v prostoru křivočarých souřadnic u nějž se při limitním procesu nebude měnit poměr stran, tedy $\Delta q_1 = Q_1 \epsilon, \dots, \Delta q_3 = Q_3 \epsilon$ při $\epsilon \rightarrow 0$. Jemu v prostoru odpovídá objem ohraničený šesti (obecně křivými) souřadnicovými plochami $q'_i = q_i \pm \frac{\Delta q_i}{2}$. Normály k těmto plochám jsou právě vektory křivočaré báze a tak na každé ze stěn k toku vektorového pole přispěje právě jedna z (křivočarých) komponent vektorového pole \vec{E} . Pro takto zvolený objem bude přímo vidět geometrický význam vztahu pro divergenci vektorového pole v křivočarých souřadnicích.

Při odvození diferenciálního výrazu pro divergenci v ortogonálních křivočarých souřadnicích použijeme vlastnost střední hodnoty hladké funkce na obdélníku $\Omega = \langle x - \frac{\Delta x}{2}, x + \frac{\Delta x}{2} \rangle \times \langle y - \frac{\Delta y}{2}, y + \frac{\Delta y}{2} \rangle$ o stranách Δx a Δy se středem v bodě $[x, y]$

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = (f(x, y) + o(\epsilon)) \Delta x \Delta y \quad (68)$$

kde $o(\epsilon)$ popisuje limitní chování, když položíme $\Delta x = X\epsilon, \Delta y = Y\epsilon$ a jdeme s $\epsilon \rightarrow 0$.



Obrázek 7: K odvození divergence v křivočarých souřadnicích.

Při výpočtu toku pole podle (67) budeme integrovat přes šest stěn ohraničujících uvažovaný kvádr

$$\oint_{\partial\Omega_{\vec{x}}} \vec{E}(\vec{x}') \cdot d\vec{S}' = \int_{1^+} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1^+ + \int_{1^-} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1^- + \int_{2^+} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2^+ + \int_{2^-} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2^- + \int_{3^+} \vec{E} \cdot d\vec{S}_3^+ + \int_{3^-} \vec{E} \cdot d\vec{S}_3^- \quad (69)$$

Indexy u integrálu označují, která z souřadnicových čar k ní tvoří normálu a jak je orientovaná. Například

$$d\vec{S}_1^+ = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q'_2} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial q'_3} dq'_2 dq'_3 = h_2 \vec{e}_2 \times h_3 \vec{e}_3 dq'_2 dq'_3 = h_2 h_3 \vec{e}_1 dq'_2 dq'_3 \quad (70)$$

zatímco $d\vec{S}_1^- = -h_2 h_3 \vec{e}_1 dq_2 dq_3$ se liší orientací. Ovšem \int_{1^+} počítáme přes pravou stěnu kvádru, zatímco \int_{1^-} přes levou. Proto nesmíme zapomenout, že Laméovy koeficienty se různých koncích kvádru liší. V každém z bodů stěn 1^\pm je vnější normála rovna $\pm \vec{e}_1$ a tak jen první komponenta pole \vec{E} bude při integraci hrát roli. Pro integrandy můžeme psát

$$\vec{E} \cdot d\vec{S}_1^+ = (E_1 h_2 h_3 dq'_2 dq'_3)_{|\vec{x}=[q_1 + \frac{\Delta q_1}{2}, q'_2, q'_3]} \quad (71)$$

a výsledek integrace přes obdélník $[q'_2, q'_3] \in \langle q_2 - \frac{\Delta q_2}{2}, q_2 + \frac{\Delta q_2}{2} \rangle \times \langle q_3 - \frac{\Delta q_3}{2}, q_3 + \frac{\Delta q_3}{2} \rangle$ bude

$$\int_{1^+} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1^+ = \left[(E_1 h_2 h_3)_{|\vec{x}=[q_1 + \frac{\Delta q_1}{2}, q_2, q_3]} + o(\epsilon) \right] \Delta q_2 \Delta q_3 \quad (72)$$

a je tedy až na zanedbatelné opravy určen hodnotou $E_1 h_2 h_3$ ve středu stěny 1^+ . Podobně

$$\int_{1^-} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1^- = - \left[(E_1 h_2 h_3)_{|\vec{x}=[q_1 - \frac{\Delta q_1}{2}, q_2, q_3]} + o(\epsilon) \right] \Delta q_2 \Delta q_3 \quad (73)$$

je určeno hodnotou $E_1 h_2 h_3$ ve středu stěny 1^- . Cyklickou záměnou pak dostáváme hodnoty toku pole přes zbylé stěny kvádrů

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = [E_1 h_2 h_3]_{[q_1 - \frac{\Delta q_1}{2}, q_2, q_3]}^{[q_1 + \frac{\Delta q_1}{2}, q_2, q_3]} \Delta q_2 \Delta q_3 + [E_2 h_1 h_3]_{[q_1, q_2 - \frac{\Delta q_2}{2}, q_3]}^{[q_1, q_2 + \frac{\Delta q_2}{2}, q_3]} \Delta q_1 \Delta q_3 + [E_3 h_1 h_2]_{[q_1, q_2, q_3 - \frac{\Delta q_3}{2}]}^{[q_1, q_2, q_3 + \frac{\Delta q_3}{2}]} \Delta q_1 \Delta q_2. \quad (74)$$

Pro určení hustoty potřebujeme znát hodnotu objemu kvádríku, která je jak snadno nahlédneme

$$V_\Omega = \int dV = \int h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 = \left[(h_1 h_2 h_3)_{|\vec{x}=[q_1, q_2, q_3]} + o(\epsilon) \right] \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 \quad (75)$$

Nyní se ukáže proč je možno v limitě přiblížit tok stěnami hodnotou součinu délky stran a normálové složky pole. Po vydělení objemem tělesa je třeba zanedbat výraz

$$\frac{o(\epsilon) \Delta q_2 \Delta q_3}{[(h_1 h_2 h_3) + o(\epsilon)] \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3} \sim \frac{o(\epsilon)}{\Delta q_1} \sim \frac{o(\epsilon)}{\epsilon} \rightarrow 0, \quad (76)$$

kde je použit předpoklad o stejnoměrném smršťování kvádrů ve všech směrech. Za použití definice parciální derivace

$$\frac{f(q_1 + \frac{\Delta q_1}{2}, q_2, q_3) - f(q_1 - \frac{\Delta q_1}{2}, q_2, q_3)}{\Delta q_1} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial q_1} \Big|_{\vec{x}=[q_1, q_2, q_3]} \quad (77)$$

dostaneme limitu střední hodnoty toku pole z objemu Ω jako

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} (E_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (E_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (E_3 h_1 h_2) \right\} \quad (78)$$

Tento vzorec vyjadřuje návod ke spočtení divergence vektorového pole známe-li složky pole v křivočaré a nikoli kartézské bázi. Samozřejmě v případě kartézských souřadnic s $h_x = h_y = h_z = 1$ přejde na $\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z$.

Příklad: Divergenci vektorového pole \vec{e}_r můžeme spočítat jak přímo

$$\operatorname{div} \vec{e}_r = \nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \nabla \cdot \left(\vec{r} \frac{1}{r} \right) = \nabla \cdot \left(\vec{r} \right) \frac{1}{r} + (\vec{r}) \cdot \nabla \frac{1}{r} = \frac{3}{r} + \vec{r} \cdot \frac{-\vec{e}_r}{r^2} = \frac{2}{r} \quad (79)$$

a nebo s použitím právě odvozeného vztahu

$$\operatorname{div} \vec{e}_r = \frac{1}{h_r h_\theta h_\phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (1 h_\theta h_\phi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (0 h_r h_\phi) + \frac{\partial}{\partial \phi} (0 h_r h_\theta) \right\} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta) = \frac{2}{r} \quad (80)$$

Rotace

Vyjdeme ze Stokesovy věty

$$\int_\Sigma \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial \Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (81)$$

Pokud plochu Σ rozdělíme na mnoho “čtverečků” tak, že ty sousední spolu sdílejí opačně orientované strany, je možno Stokesovu větu chápat jako důsledek vyloučení se všech příspěvků k cirkulaci pole \vec{E} přes tyto sdílené strany. Jen ty strany čtverečků, jež leží na hranici Σ se nemají s čím vyloučit a “pospojování” dají cirkulaci \vec{E} přes hranici Σ .

Projekci rotace do směru \vec{n} pole tedy můžeme spočítat jako plošnou hustotu cirkulace pole

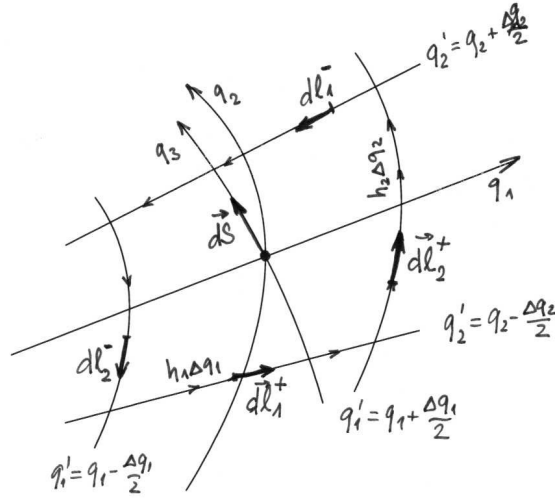
$$\vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{x}) = \lim_{S_\Sigma \rightarrow 0} \frac{1}{S_\Sigma} \oint_{\partial S_\Sigma, \vec{n}} \vec{E}(\vec{x}') \cdot d\vec{l}' \quad (82)$$

kolem plošky $S_{\vec{x}, \vec{n}}$ s normálou ve směru \vec{n} , jež se v limitě smršťuje do bodu \vec{x} .

Pro nalezení (diferenciálního) výrazu pro rotaci pole v křivočarých souřadnicích zvolíme za ploškou S_Σ obdélník (v prostoru křivočarých souřadnic) $\Sigma = \langle q_1 - \frac{\Delta q_1}{2}, q_1 + \frac{\Delta q_1}{2} \rangle \times \langle q_2 - \frac{\Delta q_2}{2}, q_2 + \frac{\Delta q_2}{2} \rangle$ jež v prostoru leží na ploše $q_3 = \text{konst.}$, je ohraničen příslušnými úseky souřadnicových čar a v každém bodě má normálu $\vec{n} = \vec{e}_3$. Pro zjednodušení budeme opět předpokládat neměnný poměr stran během limitního procesu $\Delta q_i \sim \epsilon$.

Cirkulaci pole okolo této plochy vyjádříme jako součet

$$\oint_{\partial S_\Sigma} \vec{E}(\vec{x}') \cdot d\vec{l}' = \int_{1^+} \vec{E} \cdot d\vec{l}'_1 + \int_{1^-} \vec{E} \cdot d\vec{l}'_1 + \int_{2^+} \vec{E} \cdot d\vec{l}'_2 + \int_{2^-} \vec{E} \cdot d\vec{l}'_2 \quad (83)$$



Obrázek 8: K odvození rotace v křivočarých souřadnicích.

Protože $d\vec{l}_1^\pm = \pm h_1 \vec{e}_1 dq_1$ je křivkový integrál podél protilehlých stran 1^\pm

$$\int_{1^\pm} \vec{E} \cdot d\vec{l}_1^\pm = \pm \left[(E_1 h_1)_{|\vec{x}=[q_1, q_2 \mp \frac{\Delta q_2}{2}, q_3]} + o(\epsilon) \right] \Delta q_1 \quad (84)$$

a podél protilehlých stran 2^\pm

$$\int_{2^\pm} \vec{E} \cdot d\vec{l}_2^\pm = \pm \left[(E_2 h_2)_{|\vec{x}=[q_1 \pm \frac{\Delta q_1}{2}, q_2, q_3]} + o(\epsilon) \right] \Delta q_2 \quad (85)$$

Po dosazení plošky obdélníčka $S_\Sigma = h_1 h_2 \Delta q_1 \Delta q_2 + o(\epsilon)$ máme plošnou hustotu ve směru \vec{e}_3

$$\vec{e}_3 \cdot \text{rot } \vec{E} = \frac{1}{h_1 h_2 \Delta q_1 \Delta q_2} \left\{ [E_1 h_1 \Delta q_1]_{+\frac{\Delta q_2}{2}}^- + [E_2 h_2 \Delta q_2]_{-\frac{\Delta q_1}{2}}^+ + o(\epsilon) \Delta q_1 + o(\epsilon) \Delta q_2 \right\} \quad (86)$$

tedy po limitě, která vede k parciálním derivacím, vložení jednotky ve tvaru $1 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3$ a rozšíření zlomku koeficientem h_3

$$\vec{e}_3 \cdot \text{rot } \vec{E} = \vec{e}_3 \cdot \frac{1}{h_1 h_2 h_3} h_3 \vec{e}_3 \left\{ -\frac{\partial}{\partial q_2} (E_1 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_1} (E_2 h_2) \right\} \quad (87)$$

Tento vztah můžeme zapsat s použitím determinantu jako

$$\vec{e}_3 \cdot \text{rot } \vec{E} = \vec{e}_3 \cdot \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & h_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & 0 \\ h_1 E_1 & h_2 E_2 & 0 \end{vmatrix} \quad (88)$$

a nepřekvapí, že všechny složky rotace získáme vyčíslením determinantu

$$\text{rot } \vec{E} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_1 & h_2 \vec{e}_2 & h_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 E_1 & h_2 E_2 & h_3 E_3 \end{vmatrix} \quad (89)$$

Tento vzorec také ilustruje axiální charakter pole $\nabla \times \vec{E}$ – prohozením souřadnic a příslušných vektorů báze změni rotace znaménko. Protože jsme při odvození předpokládali, že křivka na obrázku má orientovanou normálu ve směru \vec{e}_3 , platí tento vztah pouze pro orientovanou bázi splňující $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$. To znamená, že u souřadnic je důležité pořadí. Proto volíme q_1, q_2, q_3 jako x, y, z pro kartézské, r, θ, ϕ pro sférické a R, ϕ, z pro válcové souřadnice.

Laplaceův operátor na skalární funkci

V eletrostatice budeme pracovat především s operátorem Δ

$$\Delta \Phi = \nabla \cdot \nabla \Phi = \text{div grad } \Phi \quad (90)$$

složením již známého křivočarého vyjádření obou operátorů dostáváme

$$\Delta \Phi = \text{div grad } \Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial q_3} \right) \right\} \quad (91)$$

Příklad: Pole nabitého kruhového disku

Zavedeme zploštělé sferoidální souřadnice

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{s^2 + a^2} \sin v \cos \phi \\y &= \sqrt{s^2 + a^2} \sin v \sin \phi \\z &= s \cos v\end{aligned}$$

jejich jméno je dáno faktem, že plocha $s = \text{konst.}$ je rotační elipsoid s polárním poloměrem menším než rovníkový

$$\left(\frac{x}{\sqrt{s^2 + a^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{s^2 + a^2}}\right)^2 + \left(\frac{z}{s}\right)^2 = 1. \quad (92)$$

V nekonečnu, kde $\sqrt{s^2 + a^2} \sim s$ přecházejí v souřadnice sférické ($s \rightarrow r$, $v \rightarrow \theta$). Plocha $s = 0$ je disk o poloměru a . Inverzní transformace $s(x, y, z)$ resp. $\cos v(x, y, z)$ získáme sečtením resp. odečtením výrazů

$$\begin{aligned}\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)^2 + 4z^2 a^2} &= s^2 + a^2 \cos^2 v \\x^2 + y^2 + z^2 - a^2 &= s^2 - a^2 \cos^2 v\end{aligned}$$

Tečné vektory k souřadnicovým čarám jsou

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} = h_s \vec{e}_s = \left[\frac{s}{\sqrt{s^2 + a^2}} \sin v \cos \phi, \frac{s}{\sqrt{s^2 + a^2}} \sin v \sin \phi, \cos v \right] \quad (93)$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial v} = h_v \vec{e}_v = \left[\sqrt{s^2 + a^2} \cos v \cos \phi, \sqrt{s^2 + a^2} \cos v \sin \phi, -s \sin v \right] \quad (94)$$

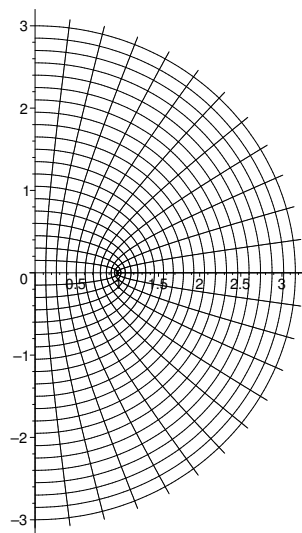
$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} = h_\phi \vec{e}_\phi = \left[-\sqrt{s^2 + a^2} \sin v \sin \phi, \sqrt{s^2 + a^2} \sin v \cos \phi, 0 \right] \quad (95)$$

Laméovy koeficienty jsou

$$h_s = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial s} \right| = \sqrt{\frac{s^2 + a^2 \cos^2 v}{s^2 + a^2}} \quad (96)$$

$$h_v = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right| = \sqrt{s^2 + a^2 \cos^2 v} \quad (97)$$

$$h_\phi = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} \right| = \sqrt{s^2 + a^2} \sin v \quad (98)$$



Obrázek 9: Sferoidální souřadnice v polorovině $x - z$. Souřadnice v prostoru vzniknou jejich rotací, tj přidáním souřadnice ϕ . Půlky elips na obrázku přejdou na rotační elipsoidy a pro $\Phi(s)$ tvoří ekvipotenciální plochy.

Budeme hledat obdobu pole bodového náboje ve sférických souřadnicích, kde $\Phi(r)$, tedy potenciál $\Phi(s)$ závisí jen na souřadnici s . Až uspějeme, získáme pole tvořené vodiči ve tvaru zploštělého rotačního

elipsoidu, případně kruhového disku, protože to je tvar ploch $s = \text{konst.}$ a potenciál, jenž závisí jen na této souřadnici musí mít ekvipotenciální plochy stejné.

Laplaceova rovnice pro potenciál $\Phi(s)$ má tvar

$$0 = \Delta\Phi(s) = \frac{1}{h_s h_v h_\phi} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{h_v h_\phi}{h_s} \frac{\partial}{\partial s} \Phi(s) \right] \quad (99)$$

tedy po dosazení Laméových koeficientů a vykrácení faktoru $h_s h_v h_\phi$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[(s^2 + a^2) \frac{\partial}{\partial s} \Phi(s) \right] = 0. \quad (100)$$

Protože uvažujeme závislost potenciálu na jediné souřadnici musíme řešit jen obyčejnou diferenciální rovnici a její řešení s dvěma integračními konstantami α a β je

$$\Phi(s) = \alpha \left(\arctan \frac{s}{a} + \beta \right) \quad (101)$$

Hodnotu $\beta = -\pi/2$ určíme z podmínky $\Phi(s = \infty) = 0$. Určit hodnotu α můžeme několika způsoby. Jednou možností je spočítat náboj jako tok elektrického pole skrze plochu $s = \text{konst.}$. Zde je $d\vec{S} = (h_v dv) (h_\phi d\phi) \vec{e}_s$ a elektrické pole spočteme známým vztahem pro gradient a získáme tak

$$Q = - \oint (\epsilon_0 \nabla \Phi) \cdot d\vec{S} = \dots = \int -a \epsilon_0 \alpha \sin v \, dv \, d\phi = -4\pi \epsilon_0 a \alpha \quad (102)$$

Druhou možností je rozvinout v okolí nekonečna funkci

$$\begin{aligned} \arctan x &= \int^x \frac{dx}{x^2 + 1} = \int^x dx \frac{1}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} \\ &= \int^x \frac{dx}{x^2} \left[1 - \frac{1}{x^2} \pm \dots \right] = \int^x dx \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} \pm \dots \right] = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} \mp \dots \end{aligned} \quad (103)$$

tedy

$$\Phi(s) \sim \alpha \left(\beta + \frac{\pi}{2} - \frac{a}{s} + \dots \right) \quad (104)$$

a uvážit, že potenciál se zde musí chovat jako $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{s}$ neboť pro velká s tato souřadnice splývá se sférickou souřadnicí r . Tedy výsledný potenciál má tvar

$$\Phi(s) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s}{a} \right) \quad (105)$$

Budeme-li uvažovat, že plocha $s = s_0$ je vyplněna vodičem a spočteme skok elektrické intenzity na jeho povrchu dostáváme plošnou nábojovou hustotu

$$\sigma = \epsilon_0 \text{Div } \vec{E} = \epsilon_0 \vec{e}_s \cdot \vec{E}_{vně} = -\epsilon_0 \frac{1}{h_s} \frac{\partial}{\partial s} \Phi(s)_{s=s_0} = \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{s_0^2 + a^2}} \frac{1}{\sqrt{s_0^2 + a^2} \cos^2 v} \quad (106)$$

Případ $s_0 \neq 0$ popisující pole nabitého rotačního elipsoidu nabízí cvičení: jak souvisí plošná nábojová hustota na rovníku a na pólech s poloosami elipsoidu? Zde si všimneme situace, kdy se pro $s_0 = 0$ elipsoid redukuje na nabitý vodivý disk. Tehdy roste nábojová hustota na kraji disku do nekonečna

$$\sigma(x, y) = \frac{Q}{4\pi a} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \quad (107)$$

Integrací můžeme ověřit, že celkový náboj na disku je stále Q , přičemž tak jak disk vznikl zploštěním tělesa, je uvedená nábojová hustota přítomna z obou stran disku.

Kapacitu kruhového disku dostáváme

$$C = \frac{Q}{\Phi(s = s_0)} = 8\epsilon_0 a \quad (108)$$

tedy $\pi/2$ krát menší než je kapacita koule stelného průměru. Cavendish roku 1773 experimentálně určil tento poměr jako 1.541 ! (Zájemci o zavedení co nejuvěrnější repliky toho experimentu do praktika necht' kontaktují příslušná vyšší místa.)

Greenovy věty

Když v identitě $\operatorname{div} f\vec{A} = \vec{A}\cdot\operatorname{grad} f + f\operatorname{div} \vec{A}$ položíme $\vec{A} = \operatorname{grad} g$ dostáváme

$$f\Delta g = \nabla\cdot(f\nabla g) - \nabla f \cdot \nabla g \quad (109)$$

s použitím Gaussovy věty pak první Greenovu větu (identitu) $\operatorname{IGV}[f,g]$

$$\int_{\Omega} f\Delta g \, d^3x = \oint_{\partial\Omega} f\nabla g \cdot d\vec{S} - \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, d^3x. \quad (110)$$

Druhá Greenova věta vznikne jako rozdíl $\operatorname{IGV}[f,g] = \operatorname{IGV}[f,g] - \operatorname{IGV}[g,f]$

$$\int_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f) \, d^3x = \oint_{\partial\Omega} (f\nabla g - g\nabla f) \cdot d\vec{S}. \quad (111)$$

Střední hodnota řešení Laplaceovy rovnice

Nechť funkce Φ splňuje Laplaceovu rovnici $\Delta\Phi = 0$. S použitím druhé Greenovy identity dokážeme, že hodnota Φ ve středu koule $\Omega = K_a(0)$ je rovna průměru hodnot na jejím povrchu, tedy sféře $\partial\Omega = S_a(0)$. Pak $\operatorname{IGV}[1/r, \Phi]$ dává

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{r}\Delta\Phi - \Phi\Delta\frac{1}{r}\right) d^3x = \oint_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{r}\nabla\Phi - \Phi\nabla\frac{1}{r}\right) \cdot d\vec{S}. \quad (112)$$

Príslušné čtyři integrály (zleva doprava) jsou 0, $+4\pi\Phi(0)$ (proto jsme volili funkci $1/r$), 0 (důsledek nepřítomnosti náboje v kouli) a $\frac{1}{a^2} \int \Phi dS$, a tedy platí

$$\Phi(0) = \oint_{S_a(0)} \Phi \frac{dS}{4\pi a^2}. \quad (113)$$

Samozřejmě tato zajímavá vlastnost řešení Laplaceovy rovnice platí i pro sféry se středem mimo počátek souřadnic a má za důsledek, že řešení Laplaceovy rovnice na nějaké oblasti může nabývat extrému jen na její hranici. (Jednoduchý důkaz sporem).

Formulace úlohy v elektrostátice

Protože předem nevíme jak se náboje ve vodiči rozmístí, vyjmeme oblast vyplněnou vodičem z prostoru a Poissonovu rovnici řešíme jen na zbytku, oblasti Ω , kde je nábojová hustota známa. Na hranici (okraji) této oblasti, již tvoří nekonečno (nebeská sféra) a hranice jednotlivých vodičů pak předepíšeme hodnoty potenciálu – určíme *okrajové podmínky*.

Existence řešení takto zadané úlohy není samozřejmá. Jako příklad špatně zadané úlohy může posloužit hledání potenciálu jež v nekonečnu vymizí ale v počátku souřadnic má konečnou hodnotu. Protože symetrie úlohy dává řešení $\Phi(r) = A + B/r$, vidíme, že pro $B \neq 0$ nemůže být v počátku souřadnic řešení konečné. Podobně ze cvičení známé řešení popisující pole protáhlého rotačního elipsoidu jasně říká, že ani úsečka není dobrou oblastí, kde bychom mohli určit potenciál. Jako poučení z toho plyne, že z ploch, jež tvoří hranici oblasti Ω a na nichž chceme zadat potenciál (obvykle to jsou povrchy vodičů), nesmějí vychuhovat úsečkám podobné hroty.

Jednoznačnost

Máme-li dvě řešení Φ_1 a Φ_2 stejné elektrostatické úlohy, víme že jejich rozdíl splňuje Laplaceovu rovnici a vymizí na hranici. Tyto dvě vlastnosti anulují dva ze tří integrálů v první Greenově větě $\operatorname{IGV}[\Phi_1 - \Phi_2, \Phi_1 - \Phi_2]$ a tak platí, že integrál kvadrátu gradientu rozdílu obou potenciálů přes objem oblasti $\int |\nabla(\Phi_1 - \Phi_2)|^2 d^3x$ je nulový. Protože se oba potenciály hranici shodují, jsou tedy stejné i kdekoli uvnitř.

Matice kapacit soustavy vodičů

Pokud se mimo povrch vodičů nenacházejí žádné náboje jsou při daném tvaru a poloze vodičů jediným volným parametrem hodnoty potenciálu na povrchu vodičů V_A . Každé z řešení Φ můžeme složit kombinací $\sum_A U_A \Psi_A$ "bázových" řešení $\Psi_A(\vec{x})$ splňujících okrajové podmínky $\Psi_A(\vec{x} \in \partial V_B) = \delta_{AB}$. Samozřejmě, nalézt tato bázová řešení je stejně obtížné jako vyřešit původní zadání. Pomohou nám ale pochopit význam matice kapacit. Ta popisuje souvislost napětí na vodičích a nábojů na nich.

$$Q_B = \oint_{\partial V_B} (-\epsilon_0 \nabla \Phi) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial V_B} (-\epsilon_0 \nabla \sum_A U_A \Psi_A) \cdot d\vec{S} = \sum_A U_A \oint_{\partial V_B} (-\epsilon_0 \nabla \Psi_A) \cdot d\vec{S} = \sum_A C_{BA} U_A, \quad (114)$$

kde jsme zavedli matici kapacit $C_{BA} = \oint_{\partial V_B} (-\epsilon_0 \nabla \Psi_A) \cdot d\vec{S}$. A -tý sloupec matice kapacit udává, jaký náboj je třeba umístit na vodiče určené indexem B , aby na vodiči V_A byl jednotkový potenciál a na ostatních nula. Tato souvislost koeficientů matice kapacit a funkcí Ψ_A umožňuje nahlédnout, že diagonální koeficienty musejí být kladné, zatímco koeficienty nediagonální musejí být záporné, případně nulové. To proto, že řešení Laplaceovy rovnice Ψ_A nabývá extrému na vodičích. V okolí toho z vodičů, na němž je jednotkový potenciál, je potenciál nižší než na jeho povrchu a nábojová hustota na jeho povrchu musí být kladná, v okolí vodičů s nulovým potenciálem je naopak vyšší potenciál než na jejich povrchu a nábojová hustota zde musí být záporná (příp. nulová, je-li celý obklopen jiným uzemněným vodičem). Jinými slovy, siločáry pole Ψ_A vedou z jediného vodiče s nenulovým potenciálem V_A do nekonečna nebo na některý z jiných vodičů. Pokud některé ze siločar končí na vodiči B , musí tento být nabit záporně. Nulový potenciál tedy automaticky nezmená nulový váboj.

S využitím vztahu $\Psi_A(\vec{x} \in \partial V_B) = \delta_{AB}$ a druhé Greenovy identity je vidět, že matice kapacit je symetrická

$$C_{BA} - C_{AB} = \oint_{\partial V_B} (-\epsilon_0 \nabla \Psi_A) \cdot d\vec{S} - \oint_{\partial V_A} (-\epsilon_0 \nabla \Psi_B) \cdot d\vec{S} = \quad (115)$$

$$\oint_{\bigcup \partial V_X} \Psi_B (-\epsilon_0 \nabla \Psi_A) \cdot d\vec{S} - \oint_{\bigcup \partial V_X} \Psi_A (-\epsilon_0 \nabla \Psi_B) \cdot d\vec{S} = +\epsilon_0 \int_{\Omega} (\Psi_B \Delta \Psi_A - \Psi_A \Delta \Psi_B) d^3x = 0,$$

přičemž změna znaménka před objemovým integrálem je zapříčiněna opačnou orientací hranice oblasti $\partial\Omega$ a hranice vodičů $\bigcup \partial V_X$.

Energie elektrostického pole

Energie soustavy bodových nábojů se v rámci elektrostiky konstruuje jejich postupným stěhováním z nekonečna, kde předpokládáme, že jsou od sebe natolik vzdáleny abychom mohli počáteční energii takto rozptýlené soustavy zanedbat. Při stěhování A -tého náboje z nekonečna do bodu x_A na něj působí již přestěhovaných $A - 1$ nábojů a vykonáme práci (díky $\text{rot } \vec{E} = 0$ nezávislou na cestě) proti silám pole na náboj jenž stěhujeme

$$W_A = - \int_{\infty}^{x_A} q_A \vec{E}_A \cdot d\vec{l} = \int_{\infty}^{x_i} q_A (+\text{grad } \Phi_{A-1}) \cdot d\vec{l} = \int_{\infty}^{x_i} q_A d\Phi_{A-1} = q_A \Phi_{A-1}. \quad (116)$$

Pro přestěhování všech nábojů je potřeba vykonat práci

$$W = \sum_A q_A \sum_{B < A} \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}_A - \vec{x}_B|} = \frac{1}{2} \sum_A \sum_{B \neq A} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}_A - \vec{x}_B|} q_A q_B \quad (117)$$

Tentýž vztah lze psát

$$W = \frac{1}{2} \sum_A q_A \Phi'_A(\vec{x}_A) \quad (118)$$

kde $\Phi'_A(\vec{x}_A)$ označuje elektrický potenciál v bodě \vec{x}_A pokud by tam nebyl náboj q_A .

Vyjádřit energii elektrostického pole spojitěho rozložení nábojů můžeme po náhradě $q_A \rightarrow \rho(\vec{x}') d^3x'$

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{x}') \Phi(\vec{x}') d^3x' = \frac{1}{2} \iint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{x}') \rho(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' d^3x \quad (119)$$

přičemž pro spojitě rozložení nemáme zapotřebí vynechávat z potenciálu $\Phi(\vec{x}')$ vliv nábojové hustoty v bodě \vec{x}' . Toto nevynechání je ovšem zdrojem rozdílů mezi tímto vztahem a výše uvedeným vztahem pro soustavu bodových nábojů. Například soustava tvořená jediným náboje má kvůli $\sum_{A \neq B}$ nulovou energii. Ovšem, pokusíme-li se spočítat energii tohoto jediného náboje integrací (singulární) nábojové hustoty $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$, neuspějeme.

Pokud místo bodového náboje zkoumáme pole rovnoměrně nabitě kuličky o poloměru a a náboji Q budící okolo sebe pole

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{3a^2 - r^2}{2a^3} & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & r \geq a \end{cases}, \quad (120)$$

dostáváme pro $a \rightarrow 0$ energii rostoucí do nekonečna $W = \frac{1}{2} \int \Phi \rho d^3x = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\frac{4}{3}\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \rightarrow \infty$.

Bodové náboje tedy podle tohoto vztahu mají nekonečnou *vlastní energii* a to i když sedí opuštěny v nekonečnu. Tak lze chápat nesoulad mezi spojitým a diskretním vztahem pro energii v elektrostice. Protože proces vzniku reálných protějšků bodových nábojů – třeba elektronů – nespadá do elektrostiky nepředstavuje zde nekonečná vlastní energie vážnější komplikaci. Upozorňuje ale na fakt, že bodový náboj

by měl především sloužit jako pomůcka při řešení lineárních rovnic pole, např. $\Delta POLE = ZDROJ$, kde jej ještě navíc můžeme nazývat Greenovou funkcí – ale do nelineárních vztahů, např. $\int(ZDROJ * POLE)$ nezapadá.

V místě bodových a lineárních nábojů je hodnota potenciálu nekonečná a tak můžeme očekávat nekonečnou energii takovýchto objektů. Energie plošného rozložení náboje již může být konečná. Dobře to vidíme u energie soustavy vodičů popsanych maticí kapacity

$$W = \frac{1}{2} \int \Phi \rho d^3x = \frac{1}{2} \sum_A \sum_B C_{AB} U_A U_B = \frac{1}{2} \sum_A \sum_B C_{AB}^{-1} Q_A Q_B \quad (121)$$

Energie elektrostatického pole. Prozatím jsme mluvili o *energii nábojů*. S použitím Poissonovy rovnice a IGV $[\Phi, \Phi]$ dostáváme

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi \rho d^3x = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi (-\epsilon_0 \Delta \Phi) d^3x = \frac{1}{2} \int_{\partial \mathbb{R}^3} \Phi (-\epsilon_0 \nabla \Phi) \cdot d\vec{S} - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \Phi \cdot (-\epsilon_0 \nabla \Phi) d^3x . \quad (122)$$

Pokud platí, že $\Phi(\infty) = 0$, vymizí příslušný plošný integrál a energii můžeme vyjádřit jako objemový integrál *hustoty energie elektrostatického pole* $w = \epsilon_0 |\vec{E}|^2$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \Phi|^2 d^3x \quad (123)$$

V rámci elektrostatiky nelze rozhodnout, zda tato energie pole má samostatný význam – pole bude v každém okamžiku svázáno s náboji.

Zajímavá je tato rovnost například pro soustavu vodičů, kdy energie je popsána jednak kvadratickou formou potenciálů na vodičích (121), jednak integrálem z hustoty energie elektrického pole – nabízí se tu analogie z mechaniky, kde energie deformace tělesa $\int(\text{deformace})^2 dV$ dává potenciální energii soustavy pružinami pospojovaných těles $\sum V_{AB} x_A x_B$ charakterizovanou posunutími z rovnovážné polohy x_A .

Příklad: Spočítejte energii pole nabitě sféry oběma způsoby. Můžete zkusit i pro pole nabitěho disku.

Příklad: Síla mezi deskami konenzátoru (kde se vezme faktor 1/2, pole jedné nabitě desky a jeho působení na druhou desku).

Nehomogenní úloha

Vložíme-li do blízkosti vodiče náboj, přeskupí se nosiče náboje ve vodiči tak aby jejich pole vyrušilo tečnou složku elektrického pole buzeného nábojem. Proto je za přítomnosti vodičů řešení Poissonovy úlohy mnohem obtížnější. Pokud bychom znali hodnoty pole $G(\vec{r}, \vec{r}')$ v bodě \vec{r} , jaké budí jednotkový bodový náboj $\rho = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$ umístěný do bodu \vec{r}' , můžeme výsledné pole popsat jako jejich superpozici. Potenciál bodového náboje $G(\vec{r}, \vec{r}')$ splňuje Poissonovu (Greenovu) rovnici

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \quad (124)$$

s nulovými okrajovými podmínkami $G(\vec{r} \in \partial\Omega, \vec{r}') = 0$. Řešení Poissonovy rovnice s hustotou $\rho(\vec{x})$ pak získáme jako

$$\Phi(\vec{r}) = \int \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') d^3r' , \quad (125)$$

což představuje obdobu vztahu (33), přičemž ovšem takto spočtený potenciál nyní navíc splňuje nulové okrajové podmínky na hranici uvažované oblasti.

Problém: Jaká zajímavá vlastnost vyplyne z IGV $[G(\vec{r}, \vec{a}), G(\vec{r}, \vec{b})]$?

O funkci G víme, že protože jde o pole bodového náboje ovlivněné přítomností nábojů vně Ω je možno psát

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}') \quad (126)$$

kde $F(\vec{r}, \vec{r}')$ popisuje pole od nábojů ve vodičích.

Metoda zrcadlení

Hledání funkce F není snadné a analytické výsledky je možné získat jen pro speciální tvar vodičů. V případě bodového náboje v blízkosti nekonečné uzemněné roviny $z = 0$ je možné za funkci F zvolit pole

bodového z náboje s opačným znaménkem v místě zrcadlového obrazu bodu \vec{r}' , $\vec{r}'' = [x', y', -z']$. Takto zvolená poloha fiktivního náboje způsobí, že

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right] \quad (127)$$

jen nulová v $z = 0$ nezávisle na \vec{x}' .

Cvičení: ukažte, že na povrchu roviny sídlí nábojová hustota

$$\sigma(x, y) = -\frac{Q}{4\pi} \frac{2z'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2]^{3/2}} \quad (128)$$

umístíme-li do bodu \vec{r}' náboj Q .

Kulová inverze

Ještě jeden tvar vodiče umožňuje explicitně nalézt $G(\vec{r}, \vec{r}')$ – koule. Máme-li funkci $\Psi(r, \theta, \phi)$ splňující rovnici

$$\Delta \Psi = \chi \quad (129)$$

splňuje funkce

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{a}{r} \Psi\left(\frac{a^2}{r}, \theta, \phi\right) \quad (130)$$

rovnici

$$\Delta \Phi(r, \theta, \phi) = \frac{a^5}{r^5} \chi\left(\frac{a^2}{r}, \theta, \phi\right) \quad (131)$$

Speciálně tak kulovou inverzí

$$\vec{r}'' = \left(\frac{a}{|\vec{r}'|}\right)^2 \vec{r}' \quad (132)$$

přechází jedno řešení Laplaceovy rovnice na druhé tak, že vnitřek přejde na vnějšek a naopak a navíc se hodnoty na povrchu koule nezmění (proto faktor a/r).

Příklad: Funkce $\Psi = 1$ je triviální řešení Laplaceovy rovnice, jeho kulová inverze $\Phi = a/r$ pak představuje Coulombické pole. Zatímco funkce $\Psi = z = r \cos \theta$ popisuje homogenní elektrické pole. Její kulová inverze $\Phi \sim \cos \theta / r^2$ je potenciál elektrického dipólu.

Cvičení: Všimněte si, že rozdíl $\Psi - \Phi$ je nulový na sféře o poloměru a . Nenechají-li se zdroje potenciálu Ψ ovlivnit vložením vodivé koule, lze výsledný potenciál nalézt právě jako tento rozdíl. Ukáže, že po vložení vodivé koule o poloměru a do homogenního pole $\Psi = Er \cos \theta$ má výsledný potenciál tvar $\Psi - \Phi = E(r - a^3/r^2) \cos \theta$. Spočítejte plošnou nábojovou hustotu na povrchu této vodivé koule.

Je zajímavé, že kulovou inverzí pole bodového náboje vznikne též pole bodového náboje a tak

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\frac{a}{|\vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}''|} \right] \quad \vec{r}'' = \left(\frac{a}{|\vec{r}'|}\right)^2 \vec{r}' \quad (133)$$

kde \vec{r}'' je poloha fiktivního náboje nacházejícího se uvnitř koule. S rostoucí vzdáleností od vodiče klesá i jeho náboj $\frac{a}{|\vec{r}'|}$. To lze popsat tak, že s rostoucí vzdáleností od vodiče klesá počet siločar, které skončí na vodiči s nulovým potenciálem a roste počet těch, které skončí v nekonečnu.

Řešení Laplaceovy rovnice ve sférických souřadnicích

Velký praktický význam má studovat pole vytvářené zdrojem s omezeným objemem. Tušíme, že daleko od zdroje si takové můžeme představit jako známé řešení Laplaceovy rovnice – pole bodového náboje $1/r$. Jako proměnná charakterizující vzdálenost od tělesa se zde přirozeně objeví sférické souřadnice. Než zjistíme jak vypadá další člen, jehož přítomnost můžeme v potenciálu daleko od zdroje očekávat, zkusíme se blíže seznámit s prostorem funkcí, které představují další řešení Laplaceovy rovnice ve sférických souřadnicích.

Úloha s předepsaným potenciálem na sféře

Předpokládejme, že uvnitř jednotkové koule splňuje pole Φ Laplaceovu rovnici. Víme, že zadáme-li jeho hodnoty na její hranici – jednotkové sféře, máme nejvýše jedno řešení. Předpokládejme, že hraniční podmínka zní

$$\Phi(\theta, \phi) = U \cos^2 \theta, \quad (134)$$

tedy zvolili jsme konkrétní hladkou funkci na sféře. Platí, že na sféře je zadaný potenciál roven

$$\Phi(\theta, \phi) = Uz^2, \quad (135)$$

tedy je úměrný kvadrátu souřadnice z . Za pokus tedy stojí hledat řešení $\Phi(x, y, z)$ na prostoru polynomů stupně ≤ 2 v kartézských souřadnicích. Vyřešení téhle úlohy vyžaduje nalézt všechny rovnice pro neznámé koeficienty. Pro polynomy takto nízkého stupně vyjde jen jedna rovnice z podmínky $\Delta\Phi = 0$, zatímco zbylé jsou dány průběhem hodnoty potenciálu na hranici, kde je třeba sféru parametrizovat pomocí θ a ϕ a požadovat rovnost koeficientů u všech nezávislých trigonometrických funkcí. Po určení všech koeficientů jako řešení soustavy lineárních rovnic nalezneme řešení uvnitř koule

$$\Phi(x, y, z) = \frac{U}{3}(1 + 2z^2 - x^2 - y^2). \quad (136)$$

Protože kulovou inverzí se vše, co bylo uvnitř dostane ven a zároveň se hodnoty na povrchu koule nezmění, tento invertovaný potenciál

$$\Phi(x, y, z)' = \frac{U}{3} \left(\frac{1}{|r|} + \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{|r|^5} \right) \quad (137)$$

popisuje pole vně koule s výše předepsanými okrajovými podmínkami.

Počet polynomů ve třech proměnných x, y a z stupně právě L je $n_L = (L+1)(L+2)/2$. Například máme 6 polynomů stupně právě 2 – x^2, y^2, z^2, xy, yz a zx . Počet polynomů stupně $\leq L$ je $N_L = \sum n_L = (L+1)(L+2)(L+3)/6$. Laplaceův operátor snižuje řád polynomu od dva, a tak Laplaceova rovnice představuje n_{L-2} resp. N_{L-2} podmínek. Uvažujeme-li polynomy stupně právě L , bude mezi nimi právě $n_L - n_{L-2} = 2L + 1$ nezávislých polynomů řešících Laplaceovu rovnici. Působení Laplaceova operátoru na kvadratické polynomy dává konstantu a tedy dimenze oboru hodnot na tomto prostoru je 1. Proto máme $6 - 1 = 5$ nezávislých kvadratických polynomů splňujících Laplaceovu rovnici, např. $2z^2 - x^2 - y^2, x^2 - y^2, xy, yz$ a zx . Uvažujeme-li polynomy stupně $\leq L$ bude mezi nimi

$$(L+1)^2 = \sum_{l=0}^L (2l+1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2L+1) \quad (138)$$

nezávislých řešení Laplaceovy rovnice.

Tato řešení nelze katalogizovat ve tvaru s rovnoprávně zastoupenými souřadnicemi x, y a z . Například tři funkce $x^2 + y^2 - 2z^2, y^2 + z^2 - 2x^2$ a $z^2 + x^2 - 2y^2$ dají nulový součet a při vylučování “té závislé” vneseme do seznamu asymetrii. Nejúspornější je pak následující zápis katalogu polynomiálních řešení Laplaceovy rovnice

$$\begin{aligned} \phi_{00} &= 1 \\ \phi_{10} &= z & \phi_{1\pm 1} &= x \pm iy \\ \phi_{20} &= 2z^2 - x^2 - y^2 & \phi_{2\pm 1} &= z(x \pm iy) & \phi_{2\pm 2} &= (x \pm iy)^2 \\ &\dots \end{aligned} \quad (139)$$

v němž je využito komplexní kombinace $x \pm iy$ pro dosažení co nejjednoduššího zápisu. Samozřejmě $\text{Re } \phi_{lm}$ a $\text{Im } \phi_{lm}$ představují alternativu k ϕ_{lm} a $\bar{\phi}_{lm} = \phi_{l-m}$. Komplexní zápis ale přijde vhod při počítání $\Delta\phi_{lm}$, protože $\Delta u(x + iy) = 0$ pro každou holomorfní funkci u , tedy i m -tou mocninou $(x + iy)^m$. Navíc v takto uspořádaném seznamu je tvar každé z bázevých funkcí ϕ_{lm} až na její normování jednoznačně určen, protože má tvar součinu polynomu $(x + iy)^{|m|}$ stupně $|m|$ a polynomu $Q_l^{|m|}(z, x^2 + y^2)$ stupně $l - |m|$ a pro takovéto funkce představuje Laplaceova rovnice právě odpovídající počet rovnic pro neznámé koeficienty polynomu $Q_l^{|m|}$.

Separace Laplaceovy rovnice ve sférických souřadnicích

Laplacián ve sférických souřadnicích má tvar

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \Phi \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \Phi \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega \Phi, \quad (140)$$

zde definujeme úhlovou část Laplaceovu Δ_Ω . Oddělíme závislost na jednotlivých proměnných do tvaru součinu

$$\Phi(r, \theta, \phi) = f(r) g(\theta) h(\phi) . \quad (141)$$

čímž Laplaceova rovnice získá tvar

$$\Delta(f(r) g(\theta) h(\phi)) = \frac{1}{r}(rf)''gh + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta g')'fh + \frac{1}{\sin^2\theta}h''fg \right] = 0 . \quad (142)$$

Rovnici vydělíme součinem fgh a v souladu s principem separace proměnných funkcí $h(\phi)$ zvolíme tak, aby splňovala rovnici $h''/h = \text{konst.}$ tedy $h = e^{\lambda\phi}$. Pro nutně periodickou funkci $h(\phi)$ periodické souřadnice ϕ zvolíme $\lambda = im$, tedy $h(\phi) = e^{im\phi}$. Poté přepíšeme Laplaceovu rovnici $\Delta\Phi$ do tvaru

$$\frac{1}{f}r(rf)'' = -\frac{1}{g} \left[\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta g')' - \frac{m^2}{\sin^2\theta}g \right] . \quad (143)$$

Na levé straně vystupují pouze funkce (a derivace podle) r , na pravé straně pouze funkce (a derivace podle) θ , obě tedy musí představovat nějakou konstantu. Její zápis je zřejmý z faktu, že levá strana $\frac{1}{f}r(rf)'' = \text{konst.}$ představuje diferenciální rovnici s polynomiálními řešeními a tak tuto konstantu zapíšeme jako $l(l+1)$ a řešení i s integračními konstantami má tvar

$$f_l(r) = ar^l + \frac{b}{r^{l+1}} . \quad (144)$$

Očividně jde o dvě navzájem kulově inverzní funkce.

Naopak pravá strana (143) představuje netriviální Legendrovu diferenciální rovnici a nalézt a analyzovat její řešení není snadné. Proto mají svoje označení $P_l^m(\cos\theta)$. Výsledné separované řešení má tvar

$$\Phi = \left(ar^l + \frac{b}{r^{l+1}} \right) P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi} \quad (145)$$

Separovaná řešení a kulové funkce

Zatímco pro každé l existuje alespoň jedno v počátku regulární řešení $f_l(r)$, funkce $\sin\theta$ vystupující ve jmenovateli členů v Legendrově diferenciální rovnici je nulová na obou pólech $\theta = 0, \pi$. Ukazuje se, že požadavek, aby funkce $g(\theta)$ představovala regulární funkce, omezuje hodnoty l na celá nezáporná čísla a m na celá čísla taková, že $|m| \leq l$.

Připomeňme, že nalezení separovaného řešení má praktický význam. Bude-li množina řešení $f_l(r)$ tvořit hustou bázi ve vhodném prostoru funkcí jedné proměnné r , množina řešení $g_k(\vartheta)$ tvořit hustou bázi v prostoru funkcí jedné proměnné ϑ a podobně pro $h_m(\phi)$, budou funkce $\Psi_{klm}(\vec{r}) = f_l(r) g_k(\vartheta) h_m(\phi)$ tvořit hustou bázi v prostoru funkcí všech tří proměnných. Nalezení separovaných řešení Laplaceovy rovnice pak umožní pro každé l, m nalézt takové $k(l, m)$, že $\Phi_{klm}(\vec{r}) = f_l(r) g_{klm}(\vartheta) h_m(\phi)$ je hustou bází prostoru řešení Laplaceovy rovnice. V následujících odstavcích ukážeme, že tato separovaná řešení mají ještě hlubší matematický i fyzikální význam, speciálně, že koeficienty pole splňujícího Laplaceovu rovnici vně omezeného zdroje jsou přímo určeny rozložením náboje uvnitř zdroje.

Místo řešení diferenciální rovnice můžeme Legendrovu funkci $P_l^m(\cos\theta)$ až na normalizační faktor nalézt srovnáním separovaného řešení s již dříve nalezenými polynomiálními řešeními, jež odpovídají volbě $f(r) = r^l$. Například pro $l = 2, m = 1$ máme

$$\phi_{21} = z(x + iy) = (r \cos\theta) (r \sin\theta \cos\phi + ir \sin\theta \sin\phi) = (r^2)(\cos\theta \sin\theta)(\cos\phi + i \sin\phi) \quad (146)$$

kde můžeme jasně identifikovat funkce $f(r), g(\theta)$ a $h(\phi)$, tedy i hledaný tvar $P_2^1(\cos\theta) \sim \cos\theta \sin\theta$.

Je praktické sloučit závislost za úhlových proměnných do jedné funkce a separovaná řešení psát v podobě

$$\Phi = \left(ar^l + \frac{b}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \phi) . \quad (147)$$

Původ konkrétní volby normalizace funkcí $Y_{lm}(\theta, \phi)$ se vyjeví v zápětí, nejprve si ale ukažme jak některé vypadají zapsány v kartézských souřadnicích na jednotkové sféře $x^2 + y^2 + z^2 = 1$:

$$Y_{00} = \lambda_{00} \times 1$$

$$Y_{10} = \lambda_{10} z, \quad Y_{1\pm 1} = \lambda_{1\pm 1} (x \pm iy),$$

$$Y_{20} = \lambda_{20} (z^2 - x^2 - y^2), \quad Y_{2\pm 1} = \lambda_{2\pm 1} z(x \pm iy), \quad Y_{2\pm 2} = \lambda_{2\pm 2} (x \pm iy)^2,$$

$$Y_{30} \approx z(2z^2 - 3x^2 - 3y^2), Y_{3\pm 1} \approx (4z^2 - x^2 - y^2)(x \pm iy), Y_{3\pm 2} \approx z(x \pm iy)^2, Y_{3\pm 3} \approx (x \pm iy)^3.$$

Vidíme tedy onu strukturu funkcí ϕ_{lm} v podobě součinu polynomu $Q_l^{|m|}(z, x^2 + y^2)$ a faktoru $(x \pm iy)^{|m|}$. Normalizace zvolíme podobně jak je zvykem v úvodních kursech kvantové mechaniky $\int |Y_{lm}|^2 d\Omega = 1$, kde $d\Omega$ představuje plochu na jednotkové sféře, $\int d\Omega = 4\pi$. Proto $\lambda_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$. S použitím (147) a IIGV lze pak ukázat, že pro dvě různé kulové funkce musí střední hodnota jejich součinu přes sféru vymizet, přesněji

$$\int Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (148)$$

Takovou situaci známe z Fourierových řad, kde funkce $e_m(x) = e^{imx}/\sqrt{2\pi}$ nejen splňují $\int_0^{2\pi} e_m(x) e_{m'}^*(x) dx = \delta_{mm'}$, ale jejich sada $m \in \mathbb{Z}$ představuje úplnou bázi v prostoru vhodných funkcí na intervalu $(0, 2\pi)$. Podobně funkce $Y_{lm}(\theta, \phi)$ představují úplnou bázi funkcí na sféře, hezkou funkci $u(\theta, \phi)$ můžeme zapsat

$$u(\theta, \phi) = \sum_{\substack{l=0,1,2,\dots \\ m=-l,\dots,l}} u_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (149)$$

kde koeficienty příslušného rozvoje jsou

$$u_{lm} = \int u(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta, \phi) d\Omega. \quad (150)$$

Nyní čistě matematickým trikem ukážeme, že koeficienty rozvoje potenciálu na nějaké sféře S obklopující zdroje jsou přímo určeny vlastnostmi (momenty) rozložení náboje ve zdroji. Jako motivaci vezmeme skutečnost, že střední hodnota potenciálu na sféře okolo zdroje souvisí s celkovým nábojem, podle Gaussovy věty je

$$\int_{\text{int } S} \Delta \Phi d^3x = -\frac{Q}{\epsilon_0} = \oint_S \nabla \Phi d\vec{S}. \quad (151)$$

Pokud lze zapsat Φ v separovaném tvaru s $\Phi(r = \infty) = 0$, vidíme, že Q hraje roli koeficientu u členu $1/r$ (ostatní členy mj. ubývají s rostoucím poloměrem S rychleji, než roste plocha S).

Nyní využijeme toho, že známe řešení Laplaceovy rovnice $\Delta \Psi = 0$ v separovaném tvaru, a položíme $\Psi = r^l Y_{lm}^*(\theta, \phi)$. Předpokládáme-li, že potenciál Φ lze vně sféry zapsat v podobě rozvoje (147) s nulovými koeficienty u členů $\sim r^l$ (aby $\Phi \rightarrow 0$ v nekonečnu), tedy

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l q_{lm} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \phi)}{r^{l+1}}, \quad (152)$$

pak s použitím IIGV

$$\int_K (\Psi \Delta \Phi - \Phi \Delta \Psi) d^3x = \oint_S (\Psi \nabla \Phi - \Phi \nabla \Psi) \cdot \vec{e}_r dS, \quad (153)$$

kam na levé straně dosadíme $\Delta \Psi = 0$ a na pravé $\nabla \Psi \cdot \vec{e}_r = l r^{l-1} Y_{lm}^*$ a uvnitř sumy (152) $\nabla(Y_{lm}/r^{l+1}) \cdot \vec{e}_r = -(l+1)(Y_{lm}/r^{l+2})$ po vytknutí všeho, co nezávisí na úhlových proměnných, dostaneme na pravé straně integrál v podobě (148). Členy v podobě $\delta_{ll'} \delta_{mm'}$ pak z původně nekonečné sumy ponechají jen jediný člen a dostaneme

$$\int_K (-\rho/\epsilon_0) r^l Y_{lm}^* d^3x = -q_{lm} \frac{2l+1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}, \quad (154)$$

tedy po vyjádření

$$q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int_K \rho(r, \theta, \phi) r^l Y_{lm}^*(\theta, \phi) d^3x. \quad (155)$$

Tím jsme dosáhli cíle: má-li řešení vně nějaké sféry tvar rozvoje v podobě sumy separovaných řešení Laplaceovy rovnice (152), pak koeficienty tohoto rozvoje dokážeme spočítat podobně jako náboj jako jisté celkové vlastnosti zdroje (momenty náboje). Momenty proto, že členy $r^l Y_{lm}^*(\theta, \phi)$ násobící pod integrálem nábojovou hustotu v (155), jak víme, jsou polynomy v x, y, z .

Pole daleko od zdroje

Řešení Poissonovy rovnice v celém prostoru má známý tvar

$$4\pi\epsilon_0 \Phi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'. \quad (156)$$

V situaci, kdy jsou zdroje umístěny v ohraničené oblasti V , pro niž platí $|\vec{r}'| \gg |\vec{r}| \quad \forall \vec{r}' \in V$, se nabízí použít Taylorův rozvoj funkce $1/|\vec{r}' - \vec{r}|$

$$\frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|} = \frac{1}{|\vec{r}'|} + \frac{1}{1!} \left. \frac{\partial'_i}{|\vec{r}' - \vec{r}'|} \right|_{\vec{r}'=0} r'_i + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial'_{ij}}{|\vec{r}' - \vec{r}'|} \right|_{\vec{r}'=0} r'_i r'_j + \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial'_{ijk}}{|\vec{r}' - \vec{r}'|} \right|_{\vec{r}'=0} r'_i r'_j r'_k + \dots \quad (157)$$

Příslušné parciální derivace

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial'_i}{|\vec{r}' - \vec{r}'|} \right|_{\vec{r}'=0} &= \frac{M_i^{(1)}(\vec{r})}{r^3}, & M_i^{(1)}(\vec{r}) &= r_i, \\ \left. \frac{\partial'_{ij}}{|\vec{r}' - \vec{r}'|} \right|_{\vec{r}'=0} &= \frac{M_{ij}^{(2)}(\vec{r})}{r^5}, & M_{ij}^{(2)}(\vec{r}) &= 3r_i r_j - r^2 \delta_{ij}, \\ \left. \frac{\partial'_{ijk}}{|\vec{r}' - \vec{r}'|} \right|_{\vec{r}'=0} &= \frac{M_{ijk}^{(3)}(\vec{r})}{r^7}, & M_{ijk}^{(3)}(\vec{r}) &= 15r_i r_j r_k - 3(\delta_{ij} r_k + \delta_{jk} r_i + \delta_{ki} r_j) r^2 = 15r_i r_j r_k - 9 \delta_{(ij} r_k) r^2, \end{aligned}$$

přestávají být pro větší řády l použitelné pro praktické počítání. Protože jsou to úplně symetrické tenzory může být z jejich 3^l složek, nanejvýš $(l+1)(l+2)/2$ nezávislých. Navíc splňuje každý z polynomů-tenzorů $M_{ijk\dots}^{(l)}(\vec{r})$ podmínku nulové stopy, neboť v uvažované oblasti $|\vec{r}'| \gg |\vec{r}|$ je splňuje (157) Laplaceovu rovnici, což sníží počet nezávislých komponent tohoto tenzoru na pouhých $2l+1$. To je vidět nejnázne z toho, že kulovou inverzí funkce $M_{ijk\dots}^{(l)}(\vec{r})/r^{2l+1}$ dostáváme polynom $M_{ijk\dots}^{(l)}(\vec{r})$ stupně l . Počet nezávislých polynomů tohoto stupně, jež splňují Laplaceovu rovnici jsme již dříve určili jako $2l+1$.

Nulovost stop můžeme využít k tomu, že taylorovské polynomy např. $r'_i r'_j r'_k$ nahradíme $1/15 M_{ijk}^{(3)}(\vec{r}')$ atp., čímž rozvoj získá symetrický tvar

$$\frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{M_i^{(1)}(\vec{r}) M_i^{(1)}(\vec{r}')}{r^3} + \frac{1}{2! \cdot 3} \frac{M_{ij}^{(2)}(\vec{r}) M_{ij}^{(2)}(\vec{r}')}{r^5} + \frac{1}{3! \cdot 15} \frac{M_{ijk}^{(3)}(\vec{r}) M_{ijk}^{(3)}(\vec{r}')}{r^7} + \dots \quad (158)$$

Přestože pro vyšší řády jde o velmi neefektivní vzorec, můžeme rozvoj dosadit do (156). Zavedeme označení pro tenzorové momenty nábojové hustoty, tedy pro integrály součinu polynomů v souřadnicích a nábojové hustoty $Q_{ijk\dots}^{(l)} = \int M_{ijk\dots}^{(l)}(\vec{r}') \rho(\vec{r}') d^3 r'$ a poté pro potenciál daleko od zdroje můžeme psát

$$4\pi\epsilon_0 \Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{Q_i^{(1)} M_i^{(1)}(\vec{r})}{r^3} + \frac{Q_{ij}^{(2)} M_{ij}^{(2)}(\vec{r})}{r^5} + \frac{Q_{ijk}^{(3)} M_{ijk}^{(3)}(\vec{r})}{r^7} + \dots \quad (159)$$

Jde o součet, v němž l -tý člen ubývá do nekonečna jako $1/r^{l+1}$ a koeficienty v tomto rozvoji jsou:

- koeficient u členu s $l=0$ je skalár a má význam celkového náboje $Q = \int \rho(\vec{r}') d^3 r'$.
- koeficient u členu s $l=1$ je vektor a jde o celkový dipólový moment zdroje $Q_i^{(1)} = \int r'_i \rho(\vec{r}') d^3 r'$
- koeficient u členu s $l=2$ je tenzor druhého řádu (symetrický, bezstopý) a jde o tzv. kvadrupólový moment soustavy $Q_{ij}^{(2)} = \frac{1}{6} \int (3r'_i r'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{r}') d^3 r'$

Poznámka. členy všech výše uvedených rozvoju pro $1/|\vec{r}' - \vec{r}'|$ splňují Laplaceovu rovnici v \vec{r}' všude kromě počátku. Jak je možné, že jejich poskládáním vznikne funkce $1/|\vec{r}' - \vec{r}'|$, která nespĺňuje Laplaceovu rovnici pro $\vec{r}' = \vec{r}'$? Za tímto nesouladem stojí otázka konvergence uvažovaných řad. Jak mnohem zřetelněji uvidíme dále, rozvoje $1/|\vec{r}' - \vec{r}'|$ konvergují jen vně (či uvnitř) koule o poloměru $|\vec{r}'|$ a tedy rozvoje potenciálu mají smysl jen vně koule obsahující všechny náboje.

Multipólový rozvoj v kulových funkcích

Stále platí, že v rozvoji (159) jsou příslušné součiny tenzorů formálně součtem 3^n členů, i když se dá ukázat, že v každém takovém součtu je jen $2l+1$ nezávislých sčítanců. Při jejich hledání bychom museli učinit velkou spoustu objevů, abychom nakonec zjistili, že klíč leží v následující formuli, která představuje konečný dokonale optimalizovaný tvar Taylorova rozvoje funkce $1/|\vec{r}' - \vec{r}'|$

$$\frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^* \left(\frac{\vec{r}'}{r'}\right) Y_{lm} \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \quad (160)$$

kde kulová funkce $Y_{lm}(\vartheta, \phi)$ je až na normalizaci dána vztahem

$$\phi_{lm} = Q_{l-|m|}(z, x^2 + y^2) (x \pm iy)^{|m|} \sim r^l Y_{lm} \left(\frac{\vec{r}}{r}\right), \quad (161)$$

kde ϕ_{lm} jsou již dříve zmíněná báze polynomů v kartézských souřadnicích x, y, z stupně právě l , jež splňují Laplaceovu rovnici.

Integrací (160) s nábojovou hustotou dostáváme

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l q_{lm} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \phi)}{r^{l+1}} \quad (162)$$

s koeficienty q_{lm} udávajícími jak rozložené jsou náboje vytvářející pole

$$q_{lm} = \int_V \rho(\vec{r}') \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} r'^l Y_{lm}^*(\vartheta', \phi') d^3\vec{r}' \quad (163)$$

Význam tohoto rozvoje týž jako u (159), pouze místo tenzorových, ve vyšších řádech silně nadbytečných, koeficientů $Q_{ijk..}^{(l)}$ máme koeficienty multipólové q_{lm} . Díky vhodnému normování kulových funkcí je koeficient q_{00} roven celkovému náboji Q tělesa a první člen rozvoje tak říká, že $\Phi \approx Q/(4\pi\epsilon_0 r)$. Podobně s kvadrátem vzdálenosti ubývá příspěvek dipólového momentu náboje daného trojicí veličin $q_{1,-1}, q_{1,0}$ a $q_{1,1}$.

Kulové funkce

Především, kulové funkce jsou komplexní funkce reálných sférických proměnných ϑ a ϕ . Důvod je stejný, jako v případě fourierovské báze na intervalu $x \in \langle -1, 1 \rangle$, kterou v teoretických úvahách volíme e^{imx} spíše než $1, \sqrt{2} \cos(nx), \sqrt{2} \sin(nx)$ a to kvůli jednoduchosti. V případě kulových funkcí je to závislost tvaru $e^{im\phi}$.

Již v oddíle věnovaném separaci proměnných v kulových souřadnicích jsme viděli, že nalézt část řešení závislé na ϑ znamenalo zkoumat složitou diferenciální rovnici. Její řešení $P_l^m(\cos \theta)$ lze nalézt pomocí Rodrigesovy formule

$$P_l^m(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \quad (164)$$

Přidáním separované části závislé na ϕ a dodáním normovacího a fázového koeficientu dostáváme z přidruženého Legendera polynomu kulovou funkci

$$Y_{lm}(\vartheta, \phi) = (-1)^m \left(\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!} \right)^{1/2} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\phi} \quad (165)$$

Pro takto normované kulové funkce platí

$$Y_{l-m}(\vartheta, \phi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\vartheta, \phi) . \quad (166)$$

Pozn. Při hledání separovaného řešení Laplaceovy rovnice jsme zjistili že $P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\phi}$ je vlastní funkce úhlové části Laplaceovu rovnice Δ_Ω s vlastní hodnotou $-l(l+1)$. To má za následek, že kulové funkce tvoří ortonormální bázi na prostoru funkcí na sféře.

Příklad Použijeme předcházející vztahy k výpočtu tvaru funkce Y_{32} . Pro zjednodušení budeme počítat nejdříve Y_{3-2} k čemuž nám stačí jen jedenkrát derivovat při výpočtu P_l^m podle (164).

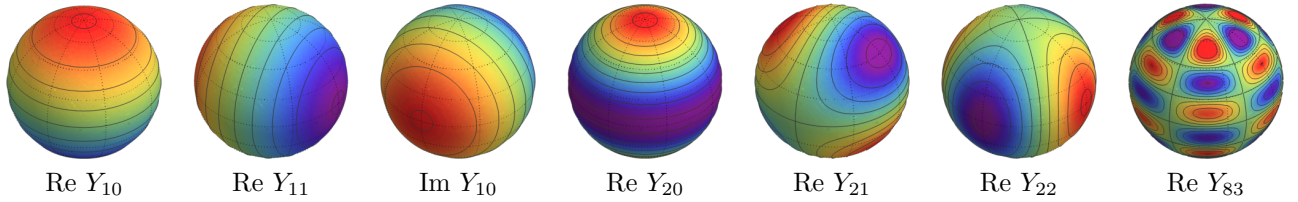
$$P_3^{-2} = \frac{(1-x^2)^{-1}}{2^3 3!} [(x^2-1)^3]' = \frac{1}{8}(x^2-1)x \quad (167)$$

$$Y_{3-2} = \sqrt{\frac{7 \cdot 5!}{4 \pi 1! 8}} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta e^{-2i\phi} = \sqrt{\frac{105}{32 \pi}} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta e^{-2i\phi} \quad (168)$$

Tedy

$$Y_{32} = \sqrt{\frac{105}{32 \pi}} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta (\cos \phi + i \sin \phi)^2 = \sqrt{\frac{105}{32 \pi}} \frac{z(x+iy)^2}{r^3} \quad (169)$$

Poznámka: Vykreslíme-li na povrch koule znaménko reálné či imaginární části této funkce uvidíme čtyři kladné a čtyři záporné oblasti. Uvažujeme-li řešení Laplaceovy rovnice $r^{-4} Y_{32}(\vartheta, \phi)$, víme, že nemá v oblasti $r > 0$ extrém. Proto z extrému na nějaké sféře po radiále dojdeme až do počátku, kde si můžeme představit natěsnané čtyři kladné a čtyři záporné náboje. Členům rozvoje s $l = 1, 2, 3$ se říká dipólové, kvadrupólové a oktopólové. Toto pojmenování souvisí s tím, že zdroje budící potenciál Y_{lm}/r^{l+1} si lze představit jako těsnou dvojici zdrojů s l o jednu menším, dipól jako dva monopóly, kvadrupól jako dva dipóly, atd. Pro větší l lze ale vystačit s menším počtem nábojů, než je 2^l . Zadání úlohy do sbírky



Obrázek 10: Hodnoty některých kulových funkcí. Poslední obrázek má ilustrovat, že reálná (ale i imaginární) část Y_{lm} odpovídá $2m \times (l + 1 - m)$ nábojům alternující polarity podél rovnoběžek \times poledníků.

Pěstujeme kulové funkce: Zkuste vymyslet kolik nábojů potřebujete aby bylo vzdálená pole popsáno $l = 4$ a proč je běžně užívané označení hexadekapól špatné?

Kulové funkce díky svým zázračným vlastnostem například umožňují okamžitě řešit úlohu, kdy na povrchu koule je předepsán průběh napětí $U(\vartheta, \phi)$ a je třeba určit pole daleko od ní. My jsme to dokázali v případě, kdy potenciál byl na povrchu koule roven nějakému polynomu v kartézských souřadnicích tím, že jsme řešili soustavu lineárních rovnic danou z části okrajovými podmínkami a z části Laplaceovou rovnicí. Protože multipólový rozvoj automaticky řeší polní rovnice, stačí určit koeficienty v rozvoji tak aby byly splněny okrajové podmínky. Proto s pomocí kulových funkcí zapíšeme potenciál prostoru okolo hraniční sféry ve tvaru multipólového rozvoje

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l U_{lm} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \phi)}{r^{l+1}} \quad (170)$$

a jedna z mnoha kouzelných vlastností kulových funkcí

$$\int Y_{lm}(\vartheta, \phi) Y_{l'm'}^*(\vartheta, \phi) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (171)$$

zvaná relace ortogonality nám umožňuje spočítat přímo koeficienty rozvoje pro libovolný průběh funkce $U(\vartheta, \phi)$ takto

$$\Phi(|\vec{r}| = a) = U(\vartheta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l U_{lm} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \phi)}{a^{l+1}} \quad | \times Y_{l'm'}^* \int d\Omega \quad (172)$$

a tedy

$$\int U(\vartheta, \phi) Y_{l'm'}^*(\vartheta, \phi) d\Omega = \frac{U_{l'm'}}{a^{l'+1}}, \quad (173)$$

neboli

$$U_{lm} = a^{l+1} \int U(\vartheta, \phi) Y_{lm}^*(\vartheta, \phi) d\Omega. \quad (174)$$

Axiálně symetrická pole

Protože pro osově souměrné rozložení nábojů vymizí integrál $\int_0^{2\pi} e^{im\phi} d\phi$ pro $m \neq 0$, zjednoduší se součet přes m na jediný člen, odpovídající momentům

$$q_l = \int_V \rho(\vec{r}') r'^l P_l(\cos \vartheta') d^3\vec{r}', \quad (175)$$

kde jsme zavedli $q_l = q_{l0}$ a $P_l(x) = P_l^0(x)$. Za předpokladu axiální symetrie rozložení nábojů tak pro potenciál platí

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} q_l \frac{P_l(\cos \vartheta)}{r^{l+1}} \quad (176)$$

Jak je z definice vidět, jsou $P_l(x)$ polynomy stupně l . Například

$$P_0(x) = 1 \quad (177)$$

$$P_1(x) = x \quad (178)$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \quad (179)$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \quad (180)$$

$$P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8} \quad (181)$$

Také je na místě uvést vztah

$$P_l(x) = \frac{2l-1}{l}xP_{l-1}(x) - \frac{l-1}{l}P_{l-2}(x) \quad (182)$$

kteřý umožňuje ze snadno zapamatovaných hodnot $P_0(x) = 1$ a $P_1(x) = x$ určit všechny další, stejně tak, jako dokázat užitečnou vlastnost

$$P_l(\pm 1) = (\pm 1)^l \quad (183)$$

Příklad. Spočtete momenty q_l náboje o velikosti $Q = 4\pi\epsilon_0$ umístěného na ose z ve vzdálenosti z' od počátku a z toho, že budí známé coulombovské pole, odvoďte známý generující vzorec pro Legendrovy polynomy

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x\cos\vartheta+x^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} x^l P_l(\cos\vartheta) \quad (184)$$

Legendrovy polynomy jsou vzorovým příkladem ortogonální báze funkcí, na rozdíl od kulových funkcí je jejich normalizace a fáze volena vztahem $P_l(1) = 1$ a tak relace ortogonalitě vypadá následovně

$$\int_{-1}^{1r} P_l(z)P_{l'}(z)dz = \int_0^\pi P_l(\cos\vartheta)P_{l'}(\cos\vartheta)d\cos\vartheta = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'} \quad (185)$$

a úplnost dokládá vzorec

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\cos\vartheta)P_l(\cos\vartheta') = \delta(\cos\vartheta - \cos\vartheta') = \frac{1}{\sin\vartheta}\delta(\vartheta - \vartheta') \quad (186)$$

Zde je explicitně připomenut vztah $\delta(f(x)) = 1/f' \delta(x - x_0)$.

Příklad. Jako prototyp netriviálního elektrostatického pole nám nyní poslouží rovnoměrně nabitá tyčka (náboj Q , délka $2a$):

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{2a} \ln \frac{z-a-\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}}{z+a-\sqrt{\rho^2+(z+a)^2}} \quad (187)$$

Uvažujme hodnoty potenciálu na poloose $z > 0$

$$4\pi\epsilon_0\Phi(z) = \frac{Q}{2a} \ln \frac{z+a+\sqrt{(z+a)^2}}{z-a+\sqrt{(z-a)^2}} = \frac{Q}{2a} \ln \frac{z+a}{z-a} = \frac{Q}{2a} \ln \frac{1+\frac{a}{z}}{1-\frac{a}{z}} \quad (188)$$

Při uvážení rozvoje $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \dots$ dostaneme

$$4\pi\epsilon_0\Phi(z) = \frac{Q}{z} \left(1 + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{z}\right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{a}{z}\right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{a}{z}\right)^6 + \dots \right) \quad (189)$$

Protože platí, že $P_l(\cos 0) = 1$, musí $Q, Qa^2/3, Qa^4/5$ atd. být koeficienty q_0, q_2, q_4 atd. v rozvoji (176).

Pokud platí (175), (176) musí tyto koeficienty souhlasit s přímo spočtenými multipólovými koeficienty (175)

$$q_l = \int_{-a}^a \frac{Q}{2a} |z|^l P_l(\cos\vartheta) dz, \quad \cos\vartheta = \frac{z}{|z|} = \operatorname{sgn} z \quad (190)$$

Pro lichá l je integrand lichá funkce (nebot $P_{2k+1}(\pm 1) = \pm 1$) a tak nenulové zůstanou jen sudé koeficienty

$$q_{2n} = \frac{Q}{2n+1} a^{2n} \quad (191)$$

což jsme věděli již z Taylorova rozvoje potenciálu podél osy z .

Příklad Elektrostatické pole rovnoměrně nabitě kružnice. Integrací je tento příklad řešen v Kvasnicově učebnici a vede na eliptický integrál. (Pozor na tiskovou chybu na str. 328, správně je $A = [r^2 + a^2 + 2ar \sin\vartheta]^{1/2}$.) My si povšimneme, že integrál (156) lze snadno spočítat na ose z , kde platí

$$4\pi\epsilon_0\Phi(Z) = \frac{Q}{\sqrt{a^2+z^2}} \quad (192)$$

Protože

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \begin{cases} v(z) & z < 1 \\ \frac{1}{z}v(\frac{1}{z}) & z > 1 \end{cases}, \quad (193)$$

kde

$$v(z) = 1 - \frac{1}{2^1 \cdot 1} z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} z^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} z^6 + \dots + \frac{(-1)^k 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2^k \cdot k!} z^{2k} + \dots \quad (194)$$

známe rozvoj $\Phi(Z)$ v okolí nuly i nekonečna:

$$4\pi\epsilon_0\Phi(Z) = \frac{Q}{a} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{Z}{a} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{Z}{a} \right)^4 - \dots \right] \quad Z < a \quad (195)$$

$$= \frac{Q}{Z} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{Z} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{a}{Z} \right)^4 - \dots \right] \quad Z > a \quad (196)$$

Víme, že řešení Laplaceovy rovnice lze psát jako

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{q_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \vartheta), \quad \cos \Theta = \frac{z}{r} \quad (197)$$

pro dostatečně velká r a podobně

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \bar{q}_l r^l P_l(\cos \vartheta), \quad (198)$$

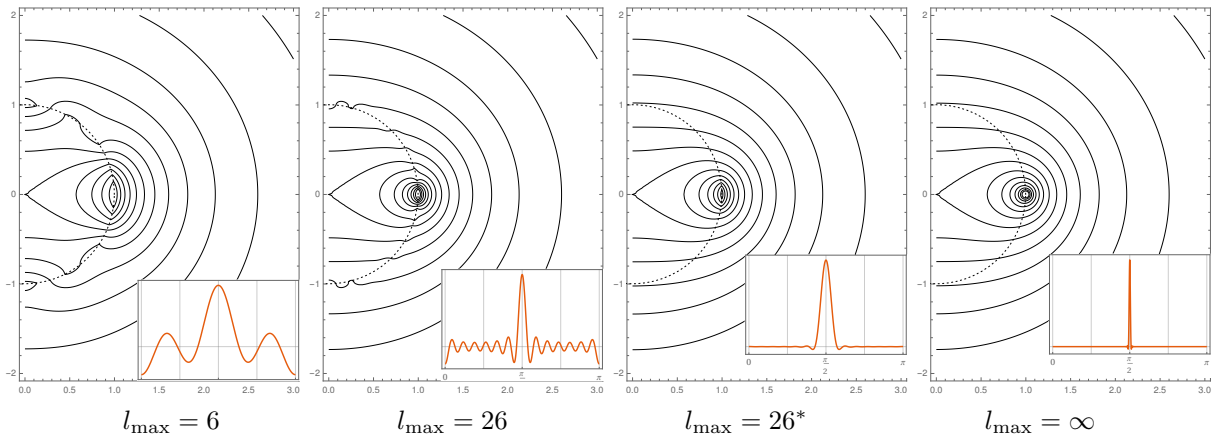
v okolí počátku, platí-li tam, že $\Delta\Phi = 0$.

Proto můžeme v (195-196) nahradit členy Z^l výrazem $R^l P_l(\cos \Theta)$ ve vnitřním rozvoji a členy Z^{-l-1} výrazem $R^{-l-1} P_l(\cos \Theta)$ v rozvoji vnějším, tedy platí

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{a} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{a} \right)^2 P_2(\cos \Theta) + \frac{3}{8} \left(\frac{R}{a} \right)^4 P_4(\cos \Theta) - \dots \right] \quad Z < a \quad (199)$$

$$= \frac{Q}{R} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{R} \right)^2 P_2(\cos \Theta) + \frac{3}{8} \left(\frac{a}{R} \right)^4 P_4(\cos \Theta) - \dots \right] \quad Z > a \quad (200)$$

Uvažujeme-li součet až do členů $P_6(\cos \Theta)$, resp $P_{26}(\cos \Theta)$, dopadne porovnání součtu řady a přesného řešení takto:



Obrázek 11: Ekvipotenciály přesného pole prstence (vpravo) a různě dlouhých součtů řad multipólového rozvoje. Protože prstenec představuje singulární zdroj v podobě δ -funkce, je jeho plošná nábojová hustota (oranžově) rozložena do podoby nehezky konvergující Fourierovy řady. Tuto Konvergenci lze urychlit vhodným utlumením koeficientů rozvoje blízkých l_{\max} . Tím je sice měníme, ale pokud to uděláme dobře vypadá výsledek lépe, než když sčítání řady prudce ukončíme u $l = l_{\max}$.

U ekvipotenciál přibližného řešení na Obrázku 11 můžeme pozorovat *poruchy* poblíž koule $r = a$. Ty jsou způsobeny koncem konvergence řady, můžeme se na ně také ale dívat jinak.

Cvičení: Řekněme, že budeme studovat výše zkonstruované pole jež získáme uvnitř i vně rozvojem do nějakého konečného l . Jaké nábojové hustotě odpovídá? Návod: Nejsnáze lze výsledek spočíst spočtením skoku elektrické intenzity na povrchu sféry $r = a$ bereme-li uvnitř (199) a vně (200).

Poznámky k přednášce Klasická elektrodynamika

Magnetická pole stacionární a kvazistacionární

Maxwellovy rovnice – stacionární pole

V situaci, kdy vymizí časové derivace polních veličin \vec{E} , \vec{B} a nábojové hustoty ρ , rozpadnou se Maxwellovy rovnice ve vakuu na již známou sadu rovnic elektrostatiky a sadu rovnic rovnic pro magnetické pole

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (1)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (2)$$

Pokud jediné zdroje pole jsou ty, jenž určují divergenci, mluvíme o zřídlovém charakteru pole. Pokud jediné zdroje pole jsou ty, co určují jeho rotaci, jde o pole vírové. Elektrostatická pole mají ten první charakter, magnetická pole naopak ten druhý.

Je zajímavé, že identity $\text{div rot } \vec{A} = 0$ a $\text{rot grad } f = 0$ umožňují rozdělit libovolné pole na vírovou a zřídlovou část. Tento roklad je jednoznačný pro pole, které je definováno v celém prostoru a ubývá i derivacemi dostatečně rychle směrem k nekonečnu, jak lze ukázat z jednoznačnosti řešení Laplaceovy rovnice, na kterou se problém díky identitám $\text{div grad } f = \Delta f$ a $\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$ převede.

Integrální verze Ampérova zákona

Ze Stokesovy věty okamžitě plyne Ampérův zákon

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_S. \quad (3)$$

Za válcové symetrie (kdy jsou pole invariantní vůči posunutí a rotaci kolem osy z) lze za použití Ampérova zákona ihned určit pole proudové hustoty $\vec{j} = j(R)\vec{e}_z$, jaká dobře popisuje proudy v koaxiálním vedení. Speciálně tak dostáváme pole tenkého přímého vodiče (ve válcových souřadnicích)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{e}_\phi. \quad (4)$$

Biotův-Savartův-Laplaceův vzorec

1. Studium účinků tohoto pole na střelku našli již Biot, Savart a Laplace za použití analogie s polem nabitě přímky výraz pro magnetické pole buzené proudem a tedy našli řešení polních rovnic magnetizmu, které dnes zapisujeme

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\vec{J}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (5)$$

a kde podle povahy proudu bereme $d\vec{J} = \vec{j}dV$ pro objemovou proudovou hustotu \vec{j} , $d\vec{J} = \vec{j}_{\text{ploš}}dS$ pro plošnou proudovou hustotu $\vec{j}_{\text{ploš}}$ případně $d\vec{J} = Id\vec{l}$ pro proud protékající nekonečně tenkým vodičem.

2. Lze opravdu magnetické pole stacionárního proudu chápat jako součet příspěvků od jednotlivých elementárních proudů $d\vec{J}$? Tzv. pomalá Lorentzova transformace elektromagnetického pole rovnoměrně přímočaře se pohybujícího bodového náboje vysvětluje, že u takového náboje pozorujeme magnetickou složku pole. Z dvou opačných nábojů, z nichž jeden se pohybuje lze sestavit jednoduchý model elementu proudu $d\vec{J}$. Uvažujeme-li superpozici polí takovýchto dvou opačných nábojů Q a $-Q$ z nichž ten první se pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí \vec{v} , pro jejich pole platí

$$[\vec{E}; \vec{B}] = [\vec{E}_0; 0]' - [\vec{E}_0; 0] \doteq [\vec{E}_0; \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}_0] - [\vec{E}_0; 0] = [0; \frac{\vec{v}}{c^2} \times \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}] = [0; \vec{J} \times \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}], \quad (6)$$

kde $\vec{J} = Q\vec{v}$ a $\mu_0 = (c^2\epsilon_0)^{-1}$. Ačkoli proudová hustota takového zdroje není stacionární, přeci jen vysvětluje v jakém smyslu je magnetické pole stacionárního proudu rovno součtu polí jednotlivých nábojů.

3. Protože v přiblížení stacionárních proudů musí \vec{j} splňovat stacionární rovnici kontinuity $\text{div } \vec{j} = 0$, představuje stacionární proudová hustota vírové pole (jednoznačně) určené veličinou $\text{rot } \vec{j}$, která je tedy zároveň i zdrojem magnetického pole. Aplikací rotace na (1) za použití (2) dostáváme

$$\Delta \vec{B} = -\mu_0 \text{rot } \vec{j} \quad (7)$$

a tedy s použitím již známé metody pro řešení Poissonovy rovnice

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \vec{j}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla' \times \frac{\vec{j}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{j}' dV. \quad (8)$$

Ačkoli lze tedy magnetické pole spočítat z rotace pole proudové hustoty, lze za situace, kdy proud vymizí vně nějaké oblasti, první integrál, který má tvar úplné divergence tenzoru druhého řádu, převést na integrál po povrchu na kterém proudy vymizí a z druhého se po provedení gradientu vyklube Biotův-Savartův-Laplaceův vzorec.

4. Splnění rovnice $\text{div } \vec{B} = 0$ lze automaticky zajistit za použití vektorového potenciálu

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (9)$$

Libovolné řešení rovnice,

$$\Delta \vec{A} - \text{grad } \text{div } \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}, \quad (10)$$

jenž vznikne dosazením definice \vec{A} do (1), vede k řešení obou polních rovnic pro \vec{B} .

Nejprve zkusíme předpokládat, že vektorový potenciál splňuje podmínku $\text{div } \vec{A} = 0$. Poté souvislost vektorového potenciálu a proudové hustoty získá tvar

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}, \quad (11)$$

a řešení můžeme psát

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV. \quad (12)$$

Divergence takto spočteného pole

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}' \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}' \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla' \cdot \frac{\vec{j}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\nabla' \cdot \vec{j}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \quad (13)$$

je nulová, pokud proudy vymizí v nekonečnu (první integrál lze s použitím Gaussovy věty psát jako integrál plošný přes velmi vzdálenou sféru) a pokud všude mají nulovou divergenci (předpoklad stacionarity), kdy vymizí druhý integrál. Nyní víme, že $\text{rot } \text{rot } \vec{A} = -\Delta \vec{A}$ a proto s použitím (9) $\Delta(1/|\vec{r} - \vec{r}'|) = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$ magnetické pole splňuje Ampérův zákon (1).

V situaci, kdy máme vektorový potenciál \vec{A}' , který má nenulovou divergenci $\text{div } \vec{A}' \neq 0$, nalezneme nedivergentní vektorový potenciál \vec{A} tak, že vyřešíme rovnici

$$\Delta \chi = \text{div } \vec{A}' \quad (14)$$

pro neznámou funkci χ a \vec{A}' opravíme dle předpisu

$$\vec{A} = \vec{A}' - \nabla \chi \quad (15)$$

V magnetostaticce je vektorový potenciál veličina, pro níž není možno určit hodnotu v nějakém bodě, ovšem cirkulace po libovolné uzavřené křivce má hodnotu magnetického toku touto křivkou a představuje veličinu nezávislou na volbě kalibrace. Omezíme-li se na vektorové potenciály splňující $\text{div } \vec{A} = 0$, musí se potenciály odpovídající témuž magnetickému poli lišit o gradient harmonické funkce (funkce řeší Laplaceovu rovnici). Jediná harmonická funkce, jejíž gradient vymizí v nekonečnu je konstanta. Proto za podmínky, že $\text{rot } \vec{B}$ vymizí v nekonečnu, představuje vztah (12) jediný vektorový potenciál, který vymizí v nekonečnu a splňuje uvedenou kalibrační podmínku.

Silové účinky magnetického pole

Z Lorentzovy síly

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (16)$$

vyplývá síla již působí magnetické pole na médium protékané proudem

$$\vec{F} = \int d\vec{J} \times \vec{B}. \quad (17)$$

Silové působení proudového pole \vec{j}' uvnitř tělesa V' na těleso V uvnitř kterého teče proud \vec{j} z Lorentzovy síly vychází

$$\vec{F} = \int d\vec{J} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j} \times \left[\int_{V'} \vec{j}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \right] dV \quad (18)$$

tedy po úpravě dvojnásobného vektorového součinu

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{j}' \left[\int_V \vec{j} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \right] dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \int_V \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{j} \cdot \vec{j}') dV dV' \quad (19)$$

získáváme dva výrazy. Ten první je ovšem nulový, protože

$$\int_V \vec{j} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV = - \int_V \vec{j} \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV = - \int_V \left(\nabla \cdot \frac{\vec{j}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\nabla \cdot \vec{j}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV = -0 + 0, \quad (20)$$

kde první integrál vymizí kvůli nepřítomnosti proudů vně tělesa a druhý díky zachování náboje. Proto je síla mezi dvěma proudy popsána symetrickým výrazem

$$\vec{F}_{MAG} = - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \int_V \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{j} \cdot \vec{j}') dV dV'. \quad (21)$$

Tento výraz popisuje působení “na dálku” a respektuje zákon akce a reakce. Díky jeho podobnosti s elektrostatickou silou

$$\vec{F}_{ELSTAT} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \int_V \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\rho\rho') dV dV' \quad (22)$$

uhodl Ampère snad již během demonstrace Oesterdova experimentu, přičemž permanentní magnetismus materiálů si vysvětloval “molekulárními proudy”. V případě proudových smyček dostáváme záměnou $(\vec{j} \cdot \vec{j}') dV dV' \rightarrow II' d\vec{l} \cdot d\vec{l}'$ dvojnásobný křivkový integrál popisující sílu mezi dvěma vodiči.

Skutečnost, že princip akce a reakce neplatí pro vzájemné silové působení dvou proudových elementů, ale jen pokud vyintegrujeme podél celé smyčky je připomenutím, že tyto proudové elementy budí nestacionární pole a to vyžaduje použití úplných Maxwellových rovnic.

Pole daleko od lokalizovaných proudů

Vztah (4) zatím představuje zatím jediný příklad magnetického pole proudu a poskytuje představu o tvaru magnetického pole v blízkosti tenkého vodiče. (Mimochodem, při praktických výpočtech můžeme tvar obecné proudové smyčky přiblížit pomocí lomené čáry, přičemž příspěvek od každé úsečky lze přesně spočít.)

Jak vypadá pole daleko od proudové smyčky či permanentního magnetu? Zapišeme-li Biot-Savartův vzorec ve složkách

$$B_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \epsilon_{ijk} j'_j \frac{r_k - r'_k}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' = - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \epsilon_{ijk} \partial_k \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} j'_j dV', \quad (23)$$

můžeme použít přiblížení platné pro $r \gg r'$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{r_l r'_l}{r^3} + \dots \quad (24)$$

Protože pod integrálem je třeba ponechat jen čárkované veličiny, stačí spočít za prvé celkový proud

$$J_j = \int j'_j dV' = \int \partial'_n (r'_j j'_n) dV' = \oint dS_n (r'_j j'_n) = 0, \quad (25)$$

který vymizí pokud proudy splňující rovnici kontinuity vymizí vně nějakého objemu. Za druhé pak moment proudové hustoty $\int j'_j r'_l dV'$. Tento tenzor druhého řádu, lze rozdělit na symetrickou a anisymetrickou část,

$$J_{jl} = \int j'_j r'_l dV' = \frac{1}{2} \int (j'_j r'_l + j'_l r'_j) dV' + \frac{1}{2} \int (j'_j r'_l - j'_l r'_j) dV', \quad (26)$$

přičemž podobně jako u (25) je symetrická část nulová, neboť ji lze psát jako úplnou divergenci $j'_j r'_l + j'_l r'_j = \partial'_n (r'_j r'_l j'_n)$. Proto představuje J_{jl} antisymetrický tenzor a ten vyjádříme za pomoci vektoru \vec{m}

$$J_{jl} = \int j'_j r'_l dV' = \epsilon_{ljn} m_n, \quad (27)$$

jehož význam se ukáže po zúžení této rovnice s ϵ_{kjl} , kdy dostáváme

$$\epsilon_{klj} J_{jl} = \int \epsilon_{klj} j'_j r'_l dV' = \epsilon_{klj} \epsilon_{ljn} m_n = -\epsilon_{klj} \epsilon_{jln} m_n = -(\delta_{kl} \delta_{ln} - \delta_{kn} \delta_{ll}) m_n = -(1-3) m_k = 2m_k, \quad (28)$$

tedy \vec{m} představuje *magnetický dipólový moment* zdroje

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j}' dV'. \quad (29)$$

Vzpomeneme-li si, že plochu rovinné smyčky můžeme psát $\vec{S} = \frac{1}{2} \oint \vec{r} \times d\vec{l}$, je magnetický moment proudové smyčky

$$\vec{m} = I \vec{S}. \quad (30)$$

S použitím výsledku, že z prvních dvou členů rozvoje pole (23) v $1/r$ je až ten druhý nenulový dostáváme

$$B_i \doteq -\frac{\mu_0}{4\pi} \epsilon_{ijk} \partial_k \frac{r_l J_{jl}}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \epsilon_{ijk} \partial_k \frac{r_l \epsilon_{ljn} m_n}{r^3}, \quad (31)$$

tedy po příslušném přerovnání indexů dostaneme vektorový potenciál magnetického pole dipólu

$$\vec{A}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad (32)$$

a jeho rotací magnetické pole

$$\vec{B}_{\text{dip}} = \text{rot } \vec{A}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{r}\vec{r} \cdot \vec{m} - \vec{m}r^2}{r^5}, \quad (33)$$

kteří je k nerozlišení od pole dipólu, jaký známe z elektrostatiky – v tomto případě by ale šlo o dvojici velmi blízkých magnetických nábojů. Protože velkou proudovou smyčku si můžeme představit, jako složenou z mnoha malých, jejichž proudy se uvnitř navzájem ruší tak, jak jsme to viděli u “důkazu” Stokesovy věty, je pole velké proudové smyčky součtem polí všech těch malých. Jde o pouhé sčítání ploch ve vztahu (30). Protože každá taková smyčka budí stejné pole jako dvojice opačných magnetických nábojů, budí velká smyčka pole stejné jako tzv. magnetická dvojvrstva – dvě opačné plošné (magneticky) nabitě plochy těsně nad sebou. Příslušné odvození nejdete v učebnicích pod názvem “ekvivalence proudové smyčky a magnetické dvojvrstvy”. Zajímavější je ale naskládat hodně smyček a nebo hodně dvojvrstev na sebe a ukázat, že vnější pole solenoidu (a jak uvidíme tak i ideálního válcového permanentního magnetu) je totožné s vnějším polem dvou rovnoměrně (magneticky) nabitých kruhových desek.

Silové působení na magnetický dipól

Zatímco v elektrostatice představují elementární objekty bodové náboje, základním magnetickým objektem je magnetický dipól, např. malá proudová smyčka. Silové působení magnetického pole na magnetický dipól získáme opět rozvojem, tentokrát vnějšího pole v místě malé proudové smyčky

$$F_i = \int \epsilon_{ijk} j_j B_k dV = \int \epsilon_{ijk} j_j (B_k|_{\vec{r}=0} + r_l \partial_l B_k|_{\vec{r}=0}) dV = \epsilon_{ijk} (J_j B_k|_{\vec{r}=0} + J_j \partial_l B_k|_{\vec{r}=0}). \quad (34)$$

Opět nulový moment proudů je nulový a první moment J_{jl} je dán (27), tedy

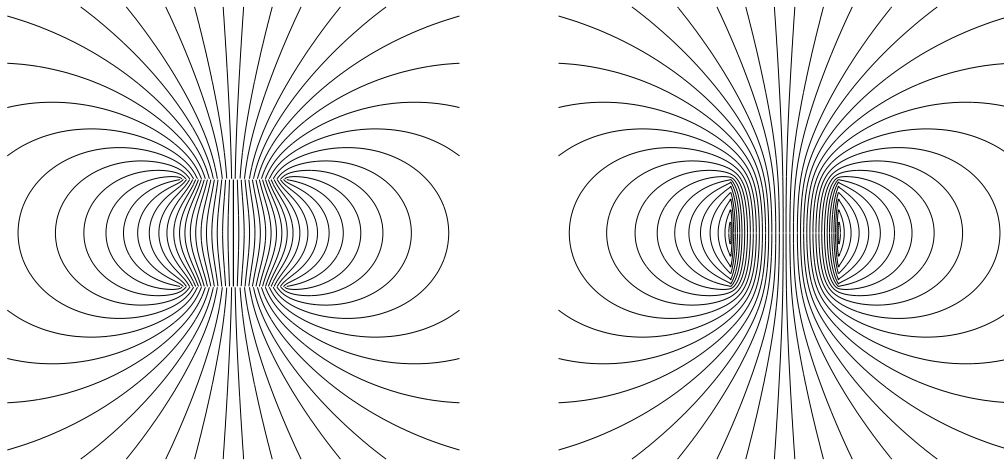
$$F_i = \epsilon_{ijk} \epsilon_{ljn} m_n \partial_l B_k = (\delta_{il} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{kl}) m_n \partial_l B_k \quad (35)$$

Protože druhý člen (úměrný δ_{kl}) je úměrný $\text{div } \vec{B}$, je síla na působící na magnetický dipól dána nehomogenitami magnetického pole vztahem

$$\vec{F} = \text{grad } \vec{m} \cdot \vec{B} \quad (36)$$

Tento zápis přepokládá, že při derivování se magnetický dipól chová jako konstanta. To nemusí ale být vždy pravda, pokud magnetický dipólový moment vzniká reakcí na na magnetické pole, např. skrze vztah

$$\vec{m} = \alpha_M \vec{B}, \quad (37)$$



Obrázek 1. Pole válce s nabitými podstavami a pole plošného proudu tekoucího po plášti téhož válce. Pole vně válce se nijak neliší. To souvisí i s tím, že levý resp. pravý obrázek představuje pole \vec{H} resp. \vec{B} vně i uvnitř permanentního magnetu s konstantní magnetizací rovnoběžnou s osou válce.

který popisuje proces magnetizace objektu po jeho vložení do externího pole. Poté bychom museli použít zápis ve složkách

$$F_i = m_k \partial_i B_k. \quad (38)$$

Pokud v místě, kde se dipól nechází netečou proudy, je $\text{rot } \vec{B} = 0$ a může tentýž vztah zapsat

$$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B}. \quad (39)$$

Moment sil působící na magnetický dipól spočteme podobně

$$M_l = \epsilon_{lmi} \int r_m dF_i = \epsilon_{lmi} \int r_m \epsilon_{ijk} j_j B_k dV = \epsilon_{lmi} \epsilon_{ijk} B_k J_{jm} = \epsilon_{lmi} \epsilon_{ijk} B_k \epsilon_{mjn} m_n, \quad (40)$$

přičemž po použití $\epsilon\epsilon = \delta\delta - \delta\delta$ a za nulové stopy $\delta_{mj}\epsilon_{mjn}$ vychází

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}. \quad (41)$$

Tato rovnice popisuje moment sil, který v homogenním poli “otáčí” střílkou kompasu. Zkoumáním jejího rovnovážného směru a frekvence kmitů střílky okolo něj měřili Biot a Savart veličinu \vec{B} , aniž by tou dobou existoval pojem magnetické pole.

Tyto vztahy byly odvozeny za předpokladu, že za magnetický moment tělesa a za silové působení vnějšího magnetického pole na něj jsou odpovědné proudy uvnitř tělesa. Při zkoumání zákona zachování hybnosti a momentu hybnosti elektromagnetického pole zjistíme, že veličina \vec{m} charakterizující magnetické pole buzené tělesem je tatáž, jako veličina \vec{m} charakterizující silové působení vnějšího pole na těleso nezávisle na materiálu tělesa, tedy i v případě, že původ magnetismu tělesa nepatří do klasické fyziky.

Elektrické a magnetické pole v prostředí

Uvážíme-li, že viděný svět je vlastně obrazem elektromagnetických vlastností materiálů, je z jeho pestrosti zřejmé, že následující odstavce budou jen velmi zjednodušeným výkladem. Především se budeme zabývat prostředím ve stacionárním přiblížení Maxwellových rovnic. Dále použijeme naivní představu, že látka je složena z velmi malých atomů a jejichž vlastnosti jsou dostatečně přesně zapsatelné v podobě (po částech) spojitých prostorových funkcí.

Nejprve stojí za povšimnutí, že jsou-li takovéto neutrální “atomy” o rozměru a zdroji elektrického a magnetického pole, jsou to jen jejich dipólové momenty, které přirozeně přispívají k makroskopickému poli. Uvažujme těleso o hraně délky $L = Na$. K poli vně takového tělesa přispívá l -tý multipólový člen rozvoje zhruba jako $E_0 (a/r)^{l+2}$ přičemž uvnitř tělesa je cca N^3 atomů a E_0 představuje velikost pole na atomové škále. Celkové pole v typické makroskopické vzdálenosti L má tedy velikost zhruba

$$E \sim N^3 E_0 (a/L)^{l+2} = E_0 N^{1-l}. \quad (42)$$

Zatímco příspěvek např. kvadrupólového momentu atomů je na makroskopických škálách tedy zanedbatelný, mikroskopické dipólové pole se na makroskopických škálách projevívá.

Elektrické náboje stojící na pravé straně vakuových Maxwellových rovnic rozdělíme na dva typy. Náboje vázané budou tvořené svázanými kladnými a zápornými navzájem posunutými náboji, které budou vytvářet v každém malém objemu dV elektrický dipól

$$d\vec{p} = \vec{P}(\vec{r})dV . \quad (43)$$

Zbylé náboje nebudou takto spárované a jsou popsány nábojovou hustotou $\rho_v(\vec{r})$. Dipól v místě \vec{r}' budí elektrické pole

$$\vec{E} = -\nabla\Phi_{dip} = -\nabla\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = -\nabla\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\vec{p}\cdot\nabla'\psi , \quad (44)$$

kde $\psi = 1/|\vec{r}-\vec{r}'|$. Elektrické pole buzené nábojovou hustotou je

$$\vec{E} = -\nabla\Phi = -\nabla\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\nabla\frac{1}{4\pi\epsilon_0}Q\psi . \quad (45)$$

Složením obou polí při použití $Q \rightarrow \rho'_v dV'$ a $\vec{p} \rightarrow \vec{P}' dV'$ lze získat pole vytvářené volnými a vázanými náboji dohromady

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\rho'_v\psi + \vec{P}'\cdot\nabla'\psi\right]dV' , \quad (46)$$

Předpokládáme, že tělesa uvnitř kterých se vyskytují vázané náboje jsou konečná a lze je tedy obklopit plochou, na které \vec{P} vymizí. Proto úpravou $\vec{P}'\cdot\nabla'\psi = \nabla'\cdot(\vec{P}'\psi) - \psi\nabla'\cdot\vec{P}'$ dostáváme

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int(\rho'_v - \nabla'\cdot\vec{P}')\psi dV' , \quad (47)$$

jako řešení Maxwellovy rovnice

$$\text{div } \epsilon_0\vec{E} = \rho_v - \text{div } \vec{P} , \quad (48)$$

tedy

$$\text{div } (\epsilon_0\vec{E} + \vec{P}) = \text{div } \vec{D} = \rho_v , \quad (49)$$

kterýmžto vztahem je definována *elektrická indukce* \vec{D} . Rozdělení na volné a vázané náboje je na našem uvážení, obvykle ale vektor polarizace chápeme jako vlastní danému prostředí (fero- a piezo-elektrika) nebo jako projev reakcí prostředí na elektrické pole – nejnázat a nejčastěji vyjádřitelný lineárním vztahem

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E} . \quad (50)$$

Podobně i proudy stojící na pravé straně vakuových Maxwellových rovnic rozdělíme na dva typy. Vázané budou tvořené malými proudovými smyčkami a budou vytvářet v každém malém objemu dV magnetický dipól

$$d\vec{m} = \vec{M}(\vec{r})dV . \quad (51)$$

Ostatní proudy jsou popsány proudovou hustotou $\vec{j}_v(\vec{r})$. Magnetický dipól v místě \vec{r}' budí pole

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}_{dip} = \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m} \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{m} \times \nabla'\psi\right) , \quad (52)$$

kde opět $\psi = 1/|\vec{r}-\vec{r}'|$. Složením tohoto pole s magnetickým polem buzeným proudovou hustotou $\vec{j}_v(\vec{r})$ při použití $\vec{m} \rightarrow \vec{M}' dV'$ lze získat celkové magnetické pole

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\vec{j}_v\psi + \vec{M}' \times \nabla'\psi\right]dV' , \quad (53)$$

Předpokládáme, že tělesa jsou konečná a lze je tedy obklopit plochou, na které \vec{M} vymizí. Povšimneme-li si, že $\nabla \times (\vec{M}\psi)$ představuje úplnou divergenci jistého tenzoru druhého řádu, úpravou $\vec{M} \times \nabla\psi = -\nabla \times (\vec{M}\psi) + \psi\nabla \times \vec{M}$ dostáváme

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi}\int(\vec{j}_v + \nabla' \times \vec{M}')\psi dV' , \quad (54)$$

tedy řešení Maxwellovy rovnice

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0(\vec{j}_v + \text{rot } \vec{M}) , \quad (55)$$

a tedy konečně

$$\text{rot } (\mu_0^{-1}\vec{B} - \vec{M}) = \text{rot } \vec{H} = \vec{j}_v . \quad (56)$$

Tímto vztahem je definována *magnetická intenzita* \vec{H} . Opět vektor magnetizace \vec{M} chápeme jako vlastní danému prostředí (tvrdá feromagnetika) nebo jako projev reakcí prostředí na magnetické pole – v nejjednodušším případě vyjádřitelný lineárním vztahem

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0\mu_r\vec{H} . \quad (57)$$

Je třeba dodat, že takto definované veličiny vystupují i v plných Maxwellových rovnicích, ve kterých časová derivace polarizace vystupuje jako další proud, pro pochopení zavedení \vec{D} a \vec{H} je ale stacionární problém dostačující.

Alternativně lze např. při zavedení \vec{D} postupovat tak, že položíme $\rho_{váz} = -\text{div}\vec{P}$, kde \vec{P} je zatím neznámé vektorové pole nenulové uvnitř tělesa. Tuto volbu lze zdůvodnit tak, že celkový náboj tělesa dá až na znaménko z Gaussovy věty tok pole \vec{P} plochou za hranicemi tělesa. Zde je $\vec{P} = 0$ a tedy takovéto zavedení je vhodné pro popis polarizovaných ale celkově elektricky neutrálních těles. Poté spočteme dipólový moment buzený takovouto nábojovou hustotou v libovolném objemu V

$$p_i = \int_V r_i (-\partial_j P_j) dV = \int_V -\partial_j (r_i P_j) dV + \int_V (\partial_j r_i) P_j dV = \int_V \delta_{ij} P_j dV , \quad (58)$$

kde integrál z úplné divergence tenzoru $r_i P_j$ přes objem zahrnující celé těleso vymizí (plošný integrál za hranicemi tělesa je nulový) a tedy

$$\vec{p} = \int_V \vec{P} dV . \quad (59)$$

Tento vztah říká, že \vec{P} představuje objemovou hustotu dipólového momentu.

Cvičení: Ukažte analogické zavedení \vec{H} .

Maxwellovy rovnice na rozhraní prostředí

Na rozhraní dvou prostředí s různými materiálovými vztahy nebo pokud zdroje pole mají plošný charakter vyplývají z Maxwellových rovnic podmínky pro nespojitosti polí. Vznik těchto podmínek lze snadno pochopit z úvahy, že když ztrácejí kvůli neexistenci derivací význam operace div a rot , integrální verze Maxwellových rovnic musejí zůstat v platnosti.

Alternativně lze pole v okolí plochy nespojitosti $u(\vec{r}) = 0$ rozdělit na regulární a nespojitou část, například

$$\vec{D} = \vec{D}_0 + [\vec{D}]\Theta(u(\vec{r})) , \quad (60)$$

kde

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (61)$$

je Heavisideova skoková funkce. Funkce prostorových souřadnic $u(\vec{r})$ představuje (obecně křivočarou) souřadnici na jejíž souřadnicové ploše $u = 0$ dochází ke skoku polních veličin.

Protože budeme chtít popisovat plošné hustoty zdrojů, vyplatí se předpokládat, že funkce $u(\vec{r})$ je zvolena tak, že normálový vektor k ploše $u(\vec{r}) = 0$, který spočteme podle předpisu

$$\vec{n} = \text{grad } u(\vec{r}) \quad (62)$$

je jednotkový, tedy Laméův koeficient $h_u = 1$. Když totiž např. plošnou nábojovou hustotu zapíšeme

$$\rho = \sigma(\vec{r})\delta(u(\vec{r})) \quad (63)$$

a zavedeme spolu s u ještě další dvě ortogonální souřadnice v a w , snadno se přesvědčíme, že výraz pro náboj uvnitř nějakého objemu

$$Q = \int \rho dV = \int \sigma(u, v, w)\delta(u) \frac{du dv dw}{|\nabla u||\nabla v||\nabla w|} = \int \sigma(0, v, w) \frac{dv dw}{|\nabla v||\nabla w|} = \int \sigma dS \quad (64)$$

dokazuje, že $\sigma(\vec{r})$ představuje plošnou nábojovou hustotu. (Použito bylo vztahů $dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$, $dS_1 = h_2 h_3 dq_2 dq_3$, $|\nabla q_i| = 1/h_i$ a speciální volby souřadnice u takové, že $h_u = 1$.)

Jak vypadá derivace Hevisideovy skokové funkce? Samozřejmě, právě vztah $d/dx\Theta(x) = \delta(x)$ představuje nejsrozumitelnější definici Diracovy δ -funkce. Protože $\nabla \cdot (\vec{A}f) = f\nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla f$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \vec{D}_0 + \nabla \cdot ([\vec{D}]\Theta(u)) = \nabla \cdot \vec{D}_0 + \Theta(u)\nabla \cdot [\vec{D}] + \vec{n} \cdot [\vec{D}]\delta(u) = \rho_0 + \sigma\delta(u) . \quad (65)$$

Poslední rovnost v tomto vztahu říká, že regulární část nábojové hustoty je určena divergencí \vec{D} v místech, kde derivace existuje, zatímco δ -funkci úměrné členy vedou k druhé z následujících Maxwellových rovnic na nepohybujícím se rozhraní dvou prostředí

$$\text{Rot } \vec{H} = \vec{n} \times [\vec{H}] = \vec{j}_{\text{ploš}} \quad (66)$$

$$\text{Div } \vec{D} = \vec{n} \cdot [\vec{D}] = \sigma \quad (67)$$

$$\text{Rot } \vec{E} = \vec{n} \times [\vec{E}] = 0 \quad (68)$$

$$\text{Div } \vec{B} = \vec{n} \cdot [\vec{B}] = 0. \quad (69)$$

Pokud se rozhraní či plošný zdroj pohybují, je příslušná nespojitost tvaru $[\vec{X}]\Theta(u-vt)$ a parciální derivace podle času, které stojí v úplných Maxwellových rovnicích, přispějí také členem úměrným δ -funkci, který nesmíme opomenout.

Na rozhraní prostředí dávají tyto vztahy hodnoty plošných vázaných nábojů $\sigma = -\text{Div } \vec{P}$ a proudů. $\vec{j}_{\text{ploš}} = \text{Rot } \vec{M}$. Pokud ovšem vycházíme z veličin \vec{D} a \vec{H} , jsou v místech skoků polarizace či magnetizace plošným zdrojem těchto polí naopak $\text{Rot } \vec{P}$ a $\text{Div } \vec{M}$.

Příklad. Hledáme-li pole permanentního magnetu vyrobeného z materiálu s pevně danou konstantní magnetizací, můžeme postupovat dvěma cestami. Jednak lze spočít magnetickou indukci buzenou plošným proudem $\vec{j}_{\text{ploš}} = \vec{n} \times \vec{M}$, který neteče po povrchu permanentního magnetu jen v místech, kde je magnetizace kolmá k jeho povrchu. Proto pole B vypadá jako pole solenoidu příslušného tvaru.

Také ovšem můžeme za hledanou veličinu vzít \vec{H} a řešit rovnice

$$\text{rot } \vec{H} = 0 \quad \text{div } (\vec{H} + \vec{M}) = 0.$$

Pro uvažovaný magnet s konstantní magnetizací vymizí objemový zdroj $-\text{div } \vec{M}$ a jediným zdrojem (nevířivé) magnetické intenzity je skok kolmé složky magnetizace na povrchu tělesa, $\text{Div } \vec{H} = -\text{Div } \vec{M}$. Tento vztah je analogický s elektrostatickou úlohou pro pole plošného náboje na povrchu polarizovatelného tělesa. Siločáry polí \vec{B} i \vec{H} válcového permanentního magnetu jsou na obr. 1.

Cvičení: Odvoďte rovnici (66).

Cvičení: Zjistěte, kdy je $\vec{E} = \vec{E}_0\Theta(z-vt)$ a $\vec{B} = \vec{B}_0\Theta(z-vt)$ řešením úplných vakuových Maxwellových rovnic bez (plošných) nábojů i proudů.

Cvičení: Přesvědčte se, že permanentní magnet ve tvaru koule s $\vec{M} = \text{konst.}$ budí okolo sebe přesně dipólové pole, zatímco uvnitř je pole homogenní.

Silové působení na plošné proudy a náboje

Protože v místech, kde tečou plošné proudy, není magnetické pole spojitě, není jasné, jaký význam má vztah určující sílu

$$\vec{F} = \int \vec{j}_{\text{ploš}} \times \vec{B} dS \quad (70)$$

a podobně je to i plošným nábojem. Víme, že když počítáme sílu působící na bodový náboj, rozdělíme elektrické pole na pole tohoto bodového náboje (divergující v místě náboje) a na pole zbylých nábojů. Jen jejich pole pak použijeme k výpočtu síly. Protože plošný proud či nábojová hustota jsou zdrojem skoku pole, zapíšeme pole v okolí plošného zdroje

$$\vec{B} = \frac{1}{2}(\vec{B}_1 + \vec{B}_2) + \frac{1}{2}(\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\text{sign}(u((\vec{r}))). \quad (71)$$

Bez důkazu uvedme, že druhý člen lze chápat pole jako buzené plošným proudem v daném místě a tedy jej lze vyloučit z výpočtu síly působící na daný kus plošného proudu. Ten se tedy z hlediska výpočtu síly jakoby nachází v průměru polí z obou stran. Proto zavedeme průměry $\{\vec{B}\} = \frac{1}{2}(\vec{B}_1 + \vec{B}_2)$ a $\{\vec{E}\} = \frac{1}{2}(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)$ a Lorentzovu sílu na plošné náboje a proudy zapíšeme

$$\vec{F} = \int \left(\sigma \{\vec{E}\} + \vec{j}_{\text{ploš}} \times \{\vec{B}\} \right) dS. \quad (72)$$

Cvičení: Spočtete sílu, jíž na sebe působí desky idealizovaného rovinného kondenzátoru. Totéž spočtete s použitím zákona zachování energie, přičemž uvažujte jak kondenzátor připojený ke zdroji napětí, tak kondenzátor odpojený.

Cvičení: Spočtete sílu, jíž je namáháno vinutí idealizovaného solenoidu.

Cvičení: Po nastudování zákona zachování hybnosti elektromagnetického pole dokažte (72). Při integraci toku Maxwellova tenzoru plochou obepínající rozhraní prostředí 1 a 2 se může hodit identita $H_i^{(2)} B_j^{(2)} - H_i^{(1)} B_j^{(1)} = [H_i]\{B_j\} + \{H_i\}[B_j]$ a odpovídající výraz pro $D_i E_j$.

Kvazistacionární přiblížení

Kvazistacionární přiblížení

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} \quad (73)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (74)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \quad (75)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (76)$$

$$(77)$$

svazuje elektrické pole s magnetickým. Ještě donedávna bylo zanedbání členu $\partial_t \vec{D}$ (tzv. Maxwellova proudu) možné ve většině aplikací Maxwellových rovnic. Rozhodnout, do jaké míry lze konkrétní problém řešit v kvazistacionárním přiblížení není snadné. To, zda je Maxwellův proud zanedbatelný oproti ostatním proudům se obvykle pozná tak, že charakteristické rozměry úlohy jsou po vydělení rychlostí světla zanedbatelné proti charakteristickým časům, jenž se v úloze vyskytují.

Předpokládejme nejprve, že proudy a náboje jsou určeny předem a nejsou ovlivněny jimi buzeným polem. Protože v kvazistacionárním přiblížení jsou rovnice určující magnetické pole totožné s rovnicemi pro pole stacionární, lze při zadaném proudu použít tytéž metody řešení. Elektrické pole ovšem nyní má předepsanou jak divergenci, tak i nenulovou rotaci.

I když bychom mohli takovou úlohu rozdělit na dvě – tedy počítat zvlášť vírovou a zřídlovou část elektrického pole, lze si problém zjednodušit automatickým vyřešením homogenní rovnice (75). Protože $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$, dostáváme

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \partial_t \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot} (\vec{E} + \partial_t \vec{A}) = 0 \quad (78)$$

protože rotace $\vec{E} + \partial_t \vec{A}$ je nulová musí to být gradient nějaké skalární funkce. Při těchto úpravách jsme nevyužili zanedbání Maxwellova proudu a tedy i v obecném případě zavádíme elektromagnetické potenciály vztahy

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad (79)$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi - \partial_t \vec{A}. \quad (80)$$

Při použití kalibrační podmínky $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ tak ze zbylých Maxwellových rovnic dostáváme pro potenciály

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}, \quad (81)$$

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (82)$$

Tyto rovnice pro elektromagnetické potenciály v kvazistacionárním přiblížení za předpokladu, že proudy a náboje jsou dány, představují dvě (eliptické) rovnice popisující okamžité vytváření pole zdroji v celém prostoru najednou (působení na dálku).

Elektromagnetické pole v kvazistacionárním přiblížení nemá vlastní dynamické stupně volnosti, jen poslouchá co mu náboje a proudy poručí.

Energie pole stacionárních proudů

Zatímco v elektrostatice jsme energii soustavy nábojů uhodli na základě práce nutné k jejich přenesení z nekonečna, je v magnetismu třeba proudy pomalu zapínat. Tento proces ale vede k vzájemné i vlastní indukci a tedy energii magnetického pole lze odvodit až v rámci kvazistacionárního přiblížení. Tehdy je výkon potřebný k vzniku magnetického pole $-\int \vec{j} \cdot \vec{E} dV$ za použití $\nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{E}) = \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E})$ a zákona indukce (75)

$$-\int \vec{j} \cdot \vec{E} dV = -\int (\nabla \times \vec{H}) \cdot \vec{E} dV = -\int \nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{E}) dV - \int H \cdot (\nabla \times \vec{E}) dV = \int \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dV + \int \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} dV. \quad (83)$$

Za použití stejného postupu, jaký budeme použijeme u úplných Maxwellových rovnic a za stejného předpokladu linearit vztahu $\vec{B} = \mu \vec{H}$ dostáváme, že z kvazistacionárního přiblížení Maxwellových rovnic vyplývá jistý zákon zachování energie

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \right) + \operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{E} \cdot \vec{j}. \quad (84)$$

Zanedbání členu $\partial_t \vec{D}$ jednak způsobí, že pole izolovaných zdrojů slábnou pro $r \rightarrow \infty$ natolik, že plošný integrál lze při integraci přes celý objem zanedbat. V kvazistacionárním přiblížení mají zdroje energie

jimi buzeného pole beze zbytku “pod kontrolou”. Absence Maxwellova proudu také způsobila, že v (84) není zahrnuta energie eklektického pole. Kvazistacionární přiblížení tedy popisuje problémy, kde elektrická složka hustoty elektromagnetické energie je zanedbatelná. (Kondenzátory, v jejichž dielektriku z principu tato nerovnost neplatí, se do kvazistacionárního přiblížení zavedou jako prvky, u nichž je časová změna energie popsána pravou stranou této rovnice $-\int \vec{E} \cdot \vec{j} dV = -UI = -\partial_t CU^2/2$.)

Podobně jako v elektrostatiice, lze i u magnetického pole ustálených proudů místo energie pole mluvit o potenciální energii zdroje. S použitím $\nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{A}) = \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{A})$ a (73) dostáváme

$$\frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot \vec{B} dV = \frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{A}) dV = -\frac{1}{2} \oint (\vec{H} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \vec{j} dV . \quad (85)$$

a tedy po zanedbání povrchového členu

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot \vec{B} dV = \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \vec{j} dV . \quad (86)$$

Indukčnost

Spolu s elektromagnetickou indukcí se objevují pojmy vlastní a vzájemná indukčnost. Napětí indukované podél uzavřené proudové smyčky C_A ohraničující plochu S_A je rovno změně magnetického toku $-\dot{\Psi}_A$

$$U_{iA} = \oint_{C_A} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\dot{\Psi}_A = -\partial_t \int_{S_A} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\partial_t \int_{S_A} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} = -\partial_t \int_{C_A} \vec{A}(I_B) \cdot d\vec{l} = -L_{AB} \dot{I}_B . \quad (87)$$

Lineární závislost pole na zdroji tedy podobně jako v elektrostatiice vede na matici koeficientů L_{AB} . Konkrétně,

$$U_{iA} = -\partial_t \int_{C_A} \vec{A} \cdot d\vec{l} = -\partial_t \int_{C_A} \left[\sum_B \frac{\mu_0 I_B}{4\pi} \int_{C_B} \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \cdot d\vec{l} \Rightarrow L_{AB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_A} \int_{C_B} \frac{d\vec{l} \cdot d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \quad (88)$$

Ze vztahu (86) dále pro lineární proudy vyplývá, že

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \sum_B I_B \int_{C_B} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} \sum_{A,B} L_{AB} I_A I_B . \quad (89)$$

Bohužel, diagonální prvky takto definované matice indukčností soustavy nekonečně tenkých vodičů jsou nekonečné. Zdrojem potíží je nekonečně silné pole v blízkosti takto tenkého drátu. Například na úseku přímého vodiče lze ukázat, že proudem buzený magnetický tok stejně taj jako energie tohoto pole logaritmiicky diverguje s poloměrem vodiče jdoucím k nule.

Za povšimnutí stojí, že zákon zachování energie vyžaduje jev vlastní indukčnosti: Magnetické pole je kvůli linearitě polních rovnic úměrné budícímu proudu, a tedy energie pole $\frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot \vec{B} dV$ musí být úměrná kvadrátu proudu. Je-li proudová smyčka chápána jako část elektrického obvodu, musí změnu proudu smyčkou doprovázet vznik indukovaného napětí tak, aby dodávaný výkon souhlasil s rychlostí změny energie pole.

Cvičení: Jak vypadají pole \vec{A} , \vec{B} , \vec{E} a Φ v homogenním střídavém magnetickém poli?

Cvičení: Ukažte, že (86) je invariantní v rámci kalibrační volnosti kvazistacionárního přiblížení.

Cvičení: Jak zhruba vypadají pole \vec{A} , \vec{B} , \vec{E} a Φ , když do homogenního střídavého magnetického pole vložíte (hodně dlouhou) spirálu z tenkého vodiče, kterým neprotéká proud a tedy tečné složky elektrického pole (což u tenkého vodiče je jediná složka podélná) jsou nulové? Hledejte jako superpozici původního pole a nového pole Φ' .

Cvičení: Studujte elektrické a magnetické pole v transformátoru. Za nejjednodušší model můžete vzít dva koaxiální ideální dlouhé solenoidy. Jaký význam má použití jádra s $\mu_r \gg 1$? Uvažujte transformátor naprázdno (ten má sekundární obvod rozpojený) a nakrátko (zde lze pro jednoduchost sekundární vinutí považovat za plošný vodič, tedy každý závit zkratovat zvlášť).

Skinový jev

Charakter první z rovnic se ale změní, pokud proud závisí na elektrickém poli. Nejjednodušším a přitom naprosto běžným případem je lineární závislost popsaná Ohmovým zákonem v nepohybujícím se izotropním a homogenním prostředí

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} . \quad (90)$$

Zanedbáme-li volné náboje a tedy položíme $\Phi = 0$, stále je přítomno indukované elektrické pole $-\partial_t \vec{A}$. Jsou-li proudy určeny Ohmovým zákonem dostáváme (v kalibraci $\text{div } \vec{A} = 0$) pro vektorový potenciál rovnici

$$\Delta \vec{A} = +\mu_0 \gamma \partial_t \vec{A}, \quad (91)$$

Rotací této rovnice získáváme rovnici pro difuzi magnetického pole

$$\Delta \vec{B} = +\mu_0 \gamma \partial_t \vec{B}, \quad (92)$$

naprosto stejné povahy. Tyto rovnice v místech, kde $\gamma > 0$ mají charakter evoluční (parabolické) rovnice, zatímco tatáž rovnice v místech s $\gamma = 0$ představuje (eliptickou) Laplaceovu rovnici okamžitého nabývání rovnováhy pole se zdroji. Tento dvojitý charakter lze chápat též tak, že (91) i (92) nepředstavují evoluční rovnice pro magnetické pole, nýbrž pohybové rovnice pro jakousi kapalinu nosičů náboje podléhající Ohmovu zákonu. To nejsnáze uvidíme z časové derivace (91)

$$\Delta \vec{j} = +\mu_0 \gamma \partial_t \vec{j}, \quad (93)$$

kteřá představuje rovnici difuze pole proudové hustoty. Ani v této situaci tedy nemá elektromagnetické pole vlastní dynamické stupně volnosti, ty náležejí jen proudovému poli ve vodičích.

Jako nejjednodušší příklad poslouží tenká ($x \in (-a, a)$) vodivá destička vložená podélně do magnetického pole $\vec{B} = B_z(x) \vec{e}_z$.

Problém můžeme chápat jako **evoluční úlohu** se zadanou počáteční konfigurací magnetického pole. Předpoklad $\vec{B} = B_z(x) \vec{e}_z$ znamená vně destičky, kde netečou žádné proudy závislost $B_z(x) = \text{konst.}$ Budeme zkoumat situaci, kdy destička je vložena v homogenním magnetickém poli $B_0 \vec{e}_z$, které je náhle vypnuto. V kvazistacionárním přiblížení pole vně destičky po vypnutí proudů (např. v budícím elektromagnetu) okamžitě zmizí a tak za počáteční podmínky vezmeme nulové pole vně a konstantní pole uvnitř (oprávněnost bude diskutována později).

Díky velmi zjednodušené situaci je vnější magnetické pole nulové a uvnitř zbývá splnit jedinou skalární rovnici

$$\Delta B_z(x, t) = +\mu_0 \gamma \partial_t B_z(x, t). \quad (94)$$

Při jejím řešení, si povšimneme, že

$$\Delta f_n = \Delta \cos\left(n \frac{\pi}{2a} x\right) = -\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 n^2 \cos\left(n \frac{\pi}{2a} x\right) = -\lambda_n^2 f_n, \quad (95)$$

přičemž tyto funkce byly vybrány proto že, (1) jsou to vlastní funkce Laplaceova operátoru, (2) splňují hraniční podmínku danou nulovým vnějším polem a (3) tvoří úplnou bázi (ve smyslu úplnosti Fourierových řad).

Zbývá rozvinout počáteční data do této báze s pomocí známé Fourierovy řady

$$\cos(t) - \frac{1}{3} \cos(3t) + \frac{1}{5} \cos(5t) - \frac{1}{7} \cos(7t) + \frac{1}{9} \cos(9t) \mp \dots \rightarrow \frac{\pi}{4} \text{sign}(\cos t). \quad (96)$$

Konkrétně

$$B_z(t=0, x) = B_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos\left[(2k+1) \frac{\pi}{2a} x\right] \quad (97)$$

Koeficienty nyní prohlásíme za funkce času,

$$B_z(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) \cos\left[(2k+1) \frac{\pi}{2a} x\right] \quad (98)$$

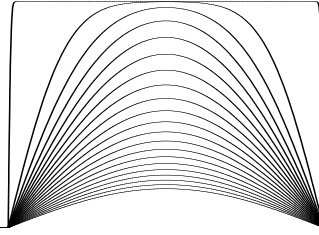
a dosazením do rovnice (94) dostaneme evoluční rovnici pro jednotlivé koeficienty rozvoje

$$-\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 (2k+1)^2 a_k(t) = \mu_0 \gamma \partial_t a_k(t). \quad (99)$$

Řešení této jednoduché lineární rovnice prvního řádu mají charakter

$$a_k(t) = a_k(t=0) e^{-\frac{t}{\tau_k}} \quad \tau_k = \frac{\tau_0}{(2k+1)^2} \quad \tau_0 = \mu_0 \gamma \left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 \quad (100)$$

a popisují disipaci jednotlivých fourierovských složek počátečního magnetického pole. Použití slova disipace je na místě nejen kvůli tomu, že studujeme rovnici difuze, ale též proto, že energie pole se přeměňuje na jouleovské teplo. V souladu s očekáváním, se prodlužuje doba zániku pole s jeho rostoucími rozměry



Obrázek 2. Rozložení podélné složky magnetického pole v tenké vodivé desce v časech $t/\tau_0 = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1.9, 2$ od vypnutí budícího pole.

tělesa. Zde jde o tloušťku vodivé desky, ovšem τ_0 roste s její druhou mocninou a tak u rovnice difuze nelze mluvit o rychlosti šíření informace (o změně pole na kraji desky). Podobně se relaxační doba prodlužuje s rostoucí vodivostí (až na nekonečno u supravodičů).

Nyní jsme odhalili časovou škálu τ_0 , na níž pole uvnitř vodivé destičky zaniká. Pokud zánik budícího pole je mnohem rychlejší, byl předpoklad o počátečních podmínkách difuzní rovnice oprávněný.

Řešení **ve frekvenčním obraze** spočívá v přechodu k harmonickým časovým závislostem. To má smysl jak při teoretických úvahách tak i v praxi. Skrze Fourierovu transformaci lze takto popsat i složitý časový vývoj, zde budeme ale zkoumat situaci, kdy budící pole má harmonický průběh a po odeznění přechodových jevů (to se odehraje na časové škále τ_0) mají harmonický průběh i ostatní veličiny

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}) e^{-i\omega t} . \quad (101)$$

Předpokládáme kvůli symetrii opět jedinou nenulovou komponentu magnetického pole. Pole vně musí být kvůli $\text{rot } \vec{B} = 0$ konstantní

$$\hat{B}_z(\vec{r}) = \hat{B}_0 \quad |x| > a \quad (102)$$

Uvnitř se řídí rovnicí (94), tedy

$$\partial_{xx} \hat{B}_z(x) = -i\omega\mu_0\gamma \hat{B}_z(x) \quad |x| < a . \quad (103)$$

Hledáme tedy sudá řešení rovnice $f'' = -kf$ (naše hraniční podmínky (102) jsou sudé) což jsou funkce $A \cos \sqrt{k}x$ a tedy

$$\hat{B}_z(x) = A \cos \sqrt{i\omega\mu_0\gamma} x . \quad (104)$$

Zavedeme-li reálné číslo δ vztahem

$$\sqrt{i\omega\mu_0\gamma} = \frac{1+i}{\delta} \quad \Rightarrow \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\gamma\mu_0}} . \quad (105)$$

a splníme-li okrajové podmínky, které získáme dosazením $x = \pm a$ do (104), dostáváme

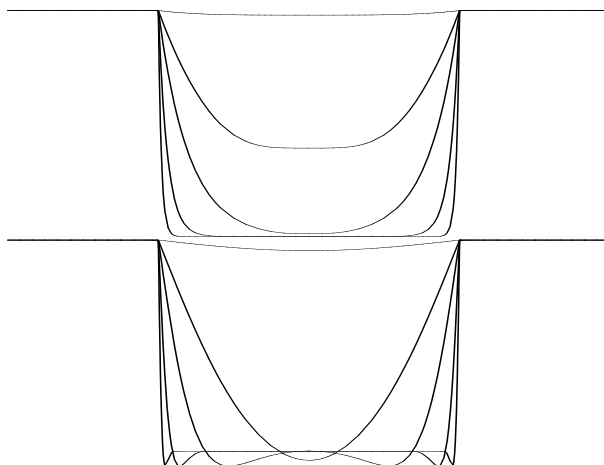
$$\hat{B}_z(x) = B_0 \frac{\cos(1+i)\frac{x}{\delta}}{\cos(1+i)\frac{a}{\delta}} = B_0 \frac{e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i\frac{x}{\delta}} + e^{\frac{x}{\delta}} e^{-i\frac{x}{\delta}}}{e^{-\frac{a}{\delta}} e^{i\frac{a}{\delta}} + e^{\frac{a}{\delta}} e^{-i\frac{a}{\delta}}} = B_0 \frac{e^{\frac{x-a}{\delta}} e^{-i\frac{x-a}{\delta}} + e^{-\frac{x+a}{\delta}} e^{i\frac{x+a}{\delta}}}{1 + e^{-2\frac{a}{\delta}} e^{2i\frac{a}{\delta}}} \quad |x| < a . \quad (106)$$

Uvnitř vodivé desky v okolí pravého okraje $x = a$ dominuje člen $e^{\frac{x-a}{\delta}}$, zatímco u druhého okraje $e^{-\frac{x+a}{\delta}}$. Je vidět, že vnější harmonické pole proniká dovnitř vodiče jen do hloubky $\sim \delta$ a proto se této veličině závislé na frekvenci a vodivosti říká hloubka vniku. Je vidět, že směrem dovnitř vodiče nejen exponenciálně klesá amplituda magnetického pole, ale též se mění fáze. Pokud uvažujeme frekvence, kdy $\delta \gg 2a$, vířivé proudy jen nepatrně mění magnetické pole ve vodiči. Naopak, pro velmi malé hloubky vniku můžeme uvažovat plošné proudy tekoucí jen na povrchu vodičů.

Doposud jsme mluvili o magnetickém poli ve vodiči. Protože stejnou parabolickou rovnicí se řídí i proudová hustota, je proud harmonického průběhu ve vodiči také soustředěn u povrchu. Jako příklad uvažujme vodič ve tvaru válce. Protože vlastní funkce Laplaceova operátoru respektující válcovou symetrii problému je Besselova funkce $J_0(kR)$, splňující $\Delta J_0(kR) = -k^2 J_0(kR)$, po vynásobení vhodnou konstantou, jejíž hodnotu určíme z celkového proudu vodičem, dostáváme pole proudové hustoty

$$\vec{j} = I \frac{1+i}{2\pi a \delta} \frac{J_0\left(\frac{1+i}{\delta} R\right)}{J_1\left(\frac{1+i}{\delta} a\right)} \vec{e}_z \quad (107)$$

odpovídající celkovému proudu I tekoucímu ve válcovém vodiči o poloměru a . Protože pro malá δ platí $J_\nu\left(\frac{z}{\delta}\right) \doteq \sqrt{\frac{2\delta}{\pi z}} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{2}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right)$, proud tekoucí vodičem se soustředí v blízkosti povrchu stejně, jako



Obrázek 3. Efektivní a vybraná okamžitá hodnota podélné složky magnetického pole v tenké vodivé desce při hloubce vniku $\delta/2a = 1, 0.3, 0.1, 0.03, 0.01$.

v jednoduchém příkladě s destičkou. Magnetické pole lze určit přímo z Ampérova zákona s použitím $\int x J_0(x) dx = x J_1(x)$

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \frac{J_1\left[(1+i)\frac{R}{\delta}\right]}{J_1\left[(1+i)\frac{a}{\delta}\right]} \vec{e}_\phi & R < a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{e}_\phi & R > a \end{cases} \quad (108)$$

V obou výše uvedených případech bylo magnetické pole tečné k povrchu vodiče. Takovéto magnetické pole může lokálně vyrušit povrchový proud a skinový jev lze tedy chápat jako lokální jev. Ukazuje se ovšem, že i kolmá složka magnetického pole je z vodiče vytlačována. V tomto případě je vnější pole odstíněno složeným polem proudů tekoucích blízko povrchu vodiče. Jako nejjednodušší model popisující tento jev lze vzít dokonale vodivou kouli. V tomto případě stačí uvažovat nulové pole uvnitř a vně vzít superpozici budícího homogenního magnetického pole a magnetického pole dipólu. Zvolíme-li takový magnetický dipólový moment, jenž vyruší budící pole na obou pólech, zaručí symetrie úlohy splnění podmínky $\text{Div} \vec{B} = 0$ všude na povrchu koule.

Poznámky k přednášce Klasická elektrodynamika

Nestacionární pole

Maxwellovy rovnice – nestacionární pole

Na základě skutečnosti, že rotace vektorového pole má nulovou divergenci, usoudil Maxwell, že v diferenciální verzi Ampérova zákona je třeba v nestacionárním případě, kdy $\operatorname{div} \vec{j} \neq 0$ nahradit proudovou hustotu kombinací $\vec{j} + \partial_t \vec{D}$, jejíž divergence vymizí v důsledku Gaussovy věty a zákona zachování elektrického náboje. Divergence toho “opraveného proudu” je nulová proto, že za použití Gaussovy věty přechází na rovnici kontinuity pro elektrickou nábojovou hustotu

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (1)$$

Od té doby chování elektromagnetického pole popisují Maxwellovy rovnice

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \partial_t \vec{D} = \vec{j}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0, \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (5)$$

Ty je samozřejmě třeba doplnit materiálovými vztahy. Budeme předpokládat, že $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$ a $\vec{H} = \vec{H}(\vec{B})$, se složitějšími vztahy jste se seznámili v optice u dispersních médií – komplikované vztahy jsou zapříčiněny komplikovaným materiálem. Náboje a proudy vystupující na pravé straně Maxwellových rovnic jsou dány vlastnostmi hmoty a skrze ně elektromagnetické pole na hmotu působí. Nepřeberné množství jevů s tím souvisejících patří do jiných přednášek.

Pro ujasnění si významu rovnic (2-5) budeme až na explicitně uvedené výjimky předpokládat, že materiálové vztahy jsou popsány skalární permitivitou ϵ a permeabilitou μ . Charakter rovnic může, jak jsme na příkladu skinového jevu viděli, také ovlivnit závislost zdrojů na poli samotném. Proto prozatím budeme proudy a nábojové hustoty považovat za dané funkce času a prostoru.

Maxwellovy rovnice – počáteční úloha

Vezmeme-li elektromagnetické pole v nějakém okamžiku, řekněme $t = 0$, můžeme se ptát, co pro jeho hodnoty vyplývá z Maxwellových rovnic. Okamžitě vidíme, že rovnice udávající divergence \vec{B} a \vec{D} přikazují, jaká pole jako funkce prostorových souřadnic jsou v libovolný okamžik povolena. Např. zřídlová magnetická pole nejsou možná. Rovnice (3) a (5) představují *vazby*.

Oproti tomu rovnice, kde vystupují rotace polí mají jiný charakter. Pokud pozorujeme, že v daném okamžiku $\operatorname{rot} \vec{E} \neq 0$, je takové pole přípustné, ovšem znamená to, že buď

- mění se magnetické pole je zdrojem cirkulace elektrického pole a nebo
- nenulová cirkulace elektrického pole zapříčiní změnu magnetického pole.

Jak rozhodnout, která z obou možností je správná? Jaký experiment by to mohl rozhodnout? V každém případě rovnice (4) svazuje časové a prostorové změny elektromagnetického pole. Nastačí na to ale sama – o jejím významu rozhoduje, čím tuto rovnici doplníme (viz cvičení níže).

Nejprve si povšimneme, že obě vazby (3) a (5) se zachovávají. Časová derivace

$$\partial_t \operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \partial_t \vec{B} = \operatorname{div} (-\operatorname{rot} \vec{E}) \equiv 0 \quad (6)$$

a podobně je to díky rovnici kontinuity elektrického náboje i s rovnicí (3):

$$\partial_t (\operatorname{div} \vec{D} - \rho) = \operatorname{div} \partial_t \vec{D} - \partial_t \rho = \operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{H} - \vec{j}) - \partial_t \rho = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} - (\operatorname{div} \vec{j} + \partial_t \rho) \equiv 0. \quad (7)$$

Nabízí se následující interpretace: Vazby (3) a (5) určují jaká pole přicházejí do úvahy v čase $t = 0$. Rotace elektrického pole a rotace magnetického pole opravená o proud

$$\partial_t \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \vec{B} - \frac{1}{\epsilon} \vec{j}, \quad (8)$$

$$\partial_t \vec{B} = -\text{rot } \vec{E}, \quad (9)$$

$$(10)$$

pak udávají změny pole. Jsou to *pohybové rovnice* pro elektromagnetické pole, které zachovávají vazby. Tato soustava představuje tzv. hyperbolický systém parciálních diferenciálních rovnic – tato čeleď rovnic je pojmenována podle znamének $- + ++$ ve vlnové rovnici.

Cvičení. Předpokládejte, že zdroje jsou dané funkce času a prostoru a že prostředí je homogenní. Uvažujte fourierovský rozklad do prostorových vln charakteru $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ všech veličin a dosad'te jej do rovnic (8) a (9). Naleznete obdobu těchto rovnic pro fourierovské komponenty $\vec{E}(\vec{k}, t)$ a $\vec{B}(\vec{k}, t)$. Ukažte, že jde o soustavu obyčejných lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty (\vec{k} je vzhledem k času samozřejmě konstanta). Na zjednodušeném příkladě s $\vec{j}(\vec{k}, t) = 0$ tuto soustavu vyřešte pro zadané $\vec{E}(\vec{k}, t = 0)$ a $\vec{B}(\vec{k}, t = 0)$ a ukažte, co by znamenalo opačné znaménko v Lenzově principu. Při řešení soustavy šesti lineárních diferenciálních rovnic pro šest neznámých je výhodné zavést proměnné $\vec{b}^\pm(\vec{k}, t) = \vec{B}(\vec{k}, t) \pm \frac{1}{c|\vec{k}|} \vec{k} \times \vec{E}(\vec{k}, t)$, neboť představují (levé) vlastní vektory příslušné matice, v nichž má homogenní soustava Maxwellových rovnic pro prostorové Fourierovy komponenty tvar $\partial_t \vec{b}^\pm = \mp ic|\vec{k}| \vec{b}^\pm$ a lze ji snadno řešit.

Cvičení. Vezměte rotaci (8) a ukažte, že získáte vlnovou rovnici pro \vec{B} . Vysvětlete, proč po boku této rovnice, se otáčí význam (4) – časová derivace magnetické indukce je zdrojem vírové složky elektrického pole.

Pozn. Evoluční rovnice (8) a (9) mění mimo oblast zdrojů jen vířivou složku elektrického i magnetického pole, neboť tam je jediným zdrojem změny obou polí rotace toho druhého, což je ovšem nezřídlové vektorové pole. Jak je možné, že když přemístíme náboj a tedy získáme nová zřídla elektrického pole, je změna mimo zdroje pouze vírové povahy?

Vysvětlení na konkrétním příkladě poskytuje Obrázek 1 z poznámek k magnetismu: Změna elektrického pole od stavu, kdy nabitá deska sídlí na dolní podstavě válce, na elektrické pole téže desky sídlící na horní podstavě – tedy rozdíl těchto polí je zřídlového charakteru a je na levém obrázku. Na pravé straně ale vidíme, že totéž (rozdílové) pole vně trajektorie zdroje lze popsat jako pole vírové.

Relaxační mechanismy v elektromagnetismu

Jaký je vztah těchto evolučních rovnic k rovnicím, které jsme doposud studovali? Jak jsme ukázali, počínaje rovnicemi elektrostatiky a konče kvazistacionárním přiblížením, představovali doposud zkoumané rovnice rovnováhu polí se statickými, stacionárními a kvazistacionárními zdroji.

Této rovnováhy nabyde elektromagnetické pole různými relaxačními procesy. Nejprve zmíníme dva související s ohmickou vodivostí. Prvním, již zmíněným, je skinový jev, konkrétně skutečnost, že (a to i v plném elektromagnetismu) dochází k difuzi magnetického pole směrem k rovnovážnému stavu. Další mechanismus související s vodivostí je dán evolucí zřídlové části elektrického pole. Ta se řídí rovnicí kontinuity (1) a po dosazení Ohmova zákona $\vec{j} = \gamma \vec{E} = \gamma \epsilon^{-1} \vec{D}$ máme

$$\partial_t \rho + \text{div } \vec{j} = \partial_t \rho + \text{div } (\gamma \epsilon^{-1}) \vec{D} = 0 \quad \longrightarrow \quad \partial_t \rho + (\gamma \epsilon^{-1}) \rho = -\vec{D} \cdot \text{grad } \frac{\gamma}{\epsilon}. \quad (11)$$

Uvnitř vodiče, kde pravé strana vymizí tak dochází k exponenciálnímu zániku volné nábojové hustoty – náboj se stěhuje na povrch vodiče. Relaxační čas u běžných vodičů je velmi malý a je dán jen materiálovými konstantami, narozdíl od skinového jevu, kde souvisí i s rozměry a tvarem vodiče.

Oba zmíněné disipativní procesy ve vodičích vedou k ustavení statického stavu $\vec{j} = 0$ a v důsledku Ohmova zákona i $\vec{E} = 0$ uvnitř vodiče. To je elektrostatika. Za působení vnějších zdrojů či jiných sil se rovnováha ustanoví v souladu s buzením, pro pomalu se měnící zdroje tak dostaneme kvazistacionární pole.

Předběhneme-li další výklad, je tu ještě jeden relaxační mechanismus. Odchylka od kvazistacionárního přiblížení je, jak uvidíme, dána přítomností elektromagnetického vlnění. Pokud to situace dovolí, jsou tyto vlny buď pohlceny disipativním prostředím, nebo odletí do daleka, v obou případech je tu tendence řešení blížit se (kvazi) stacionárnímu stavu. To je samozřejmě vyloučeno, když zdroje samy se mění v časech kratších, než jaké záření potřebuje k vytracení se.

První experimentální důkaz oprávněnosti Maxwellovy konstrukce – Hetzřův experiment dokázal, že při jiskrovém výboji se část z původně elektrostatické energie místo na teplo přemění v elektromagnetické vlny.

Elektromagnetické potenciály pro nestacionární pole

Již víme, že homogenní Maxwellovy rovnice (5) a (4), lze automaticky vyřešit za pomoci zavedení potenciálů. Nežřídlové \vec{B} dává $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ a tak dostáváme

$$\text{rot } \vec{E} + \partial_t \text{rot } \vec{A} = \text{rot} \left(\vec{E} + \partial_t \vec{A} \right) = 0 \quad (12)$$

a protože rotace součtu $\vec{E} + \partial_t \vec{A}$ je nulová musí to být gradient nějaké skalární funkce. Proto zavádíme elektromagnetické potenciály vztahy

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \quad (13)$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi - \partial_t \vec{A}. \quad (14)$$

Jejich dosazením do zbývajících rovnic dostáváme

$$\text{rot } \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} - \partial_t \epsilon (-\text{grad } \Phi - \partial_t \vec{A}) = \vec{j}, \quad (15)$$

$$\text{div } \epsilon (-\text{grad } \Phi - \partial_t \vec{A}) = \rho, \quad (16)$$

$$(17)$$

V homogenním prostředí můžeme vytknout příslušné materiálové konstanty $\mu\epsilon = c^{-2}$ a za použití Z.I.V.A. dostáváme polní rovnice pro elektromagnetické potenciály

$$\left(-\Delta \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \vec{A} \right) + \text{grad} \left(\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi \right) = \mu \vec{j}, \quad (18)$$

$$\Delta \Phi + \partial_t \text{div } \vec{A} = -\frac{1}{\epsilon} \rho. \quad (19)$$

Magnetické pole \vec{B} je vírové povahy a je dáno rotací vektorového potenciálu. Zřídlová část vektorového potenciálu je veličina která se na magnetickém poli nijak neprojeví. Tato veličina je určitelná z $\text{div } \vec{A}$ a tedy tato divergence vektorového potenciálu není nijak dána. Protože ovšem časová derivace vektorového potenciálu vystupuje v (14) je třeba opravit po změně vektorového potenciálu i potenciál Φ . Změna kalibrace je dána vztahy

$$\vec{a}' = \vec{A} + \nabla \chi \quad (20)$$

$$\Phi' = \Phi - \partial_t \chi \quad (21)$$

Dosazením do (13) a (14) lze ověřit, že tato změna potenciálů nemění elektrické ani magnetické pole. Také vidíme, že $\text{div } \vec{a}' - \text{div } \vec{A} = \Delta \chi$ a daná změna $\text{div } \vec{A}$ vede na Poissonovu rovnici.

Maxwellovy rovnice v Coulombově kalibraci

Při řešení (18) a (19) si nejprve vybereme postaru možnost $\text{div } \vec{A} = 0$. Po zavedení d'Alembertiánu

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \quad (22)$$

a dosazení $\text{div } \vec{A} = 0$ je

$$\square \vec{A} = -\mu \vec{j} + \frac{1}{c^2} \partial_t \text{grad } \Phi, \quad (23)$$

$$\Delta \Phi = -\frac{1}{\epsilon} \rho. \quad (24)$$

Toto jsou Maxwellovy rovnice pro potenciály v tzv. Coulombově kalibraci. Potenciál Φ se řídí Poissonovou rovnicí, zatímco vektorový potenciál splňuje v $\vec{A}(\vec{x}, t = 0)$ vlnovou rovnici se zdrojem na pravé straně. V nestacionárním případě je $\text{div } \vec{j} \neq 0$ a z rovnice kontinuity je vidět, že pozůstatek Maxwellova proudu zajišťuje, tak jako dříve, aby zdroj měl čistě vírový charakter. Jinak by nebylo možno vybranou kalibrační podmínku dodržet. Lze ukázat, že ačkoli v této kalibraci jsou hodnoty potenciálů v celém prostoru okamžitě ovlivněny změnou zdroje (nadsvětelné šíření), jde o změny, které mají povahu změny kalibrace a změny elektrického i magnetického pole se šíří právě rychlostí světla.

Z rozboru vlnové rovnice $\square u = 0$ (např. jako limity mechanického systému) je známo, že řešení v čase $t > 0$ je dáno zadáním hodnoty $u(\vec{x}, t = 0)$ a její časové derivace $\dot{u}(\vec{x}, t = 0)$. Tyto dvě funkce představují

libovůli, již připouští vlnová rovnice – jejich hodnota je libovolná ale dány v nějakém okamžiku již plně říkájí jak řešení vypadá v libovolném čase.

Vidíme, že při daných zdrojích Maxwellovy rovnice dovolují zadat dvě vektorové funkce čisté vírového charakteru $\vec{A}(\vec{x}, t = 0)$ a $\vec{\dot{A}}(\vec{x}, t = 0)$ a ty již plně určují elektromagnetické pole ve všech časech. Hodnota $\vec{A}(\vec{x}, t = 0)$ skrze rotaci určuje počáteční hodnotu magnetického pole. Hodnota $\vec{\dot{A}}(\vec{x}, t = 0)$ opravená o gradient řešení Poissonovy rovnice (to žádnou libovůli při daných zdrojích nepřipouští) určuje počáteční hodnotu elektrického pole.

Libovůle při zadávání počátečních podmínek elektromagnetického pole spočívá v zadání vírové části elektrického a magnetického pole. Co se týče libovůle při zadávání zřídlové části polí, magnetické pole žádnou nemá, elektrické sice ano, ale ta je fixována Gaussovou větou. Libovůle při umístování nábojů nás teď nezajímá, neboť ta souvisí s pohybovými rovnicemi této nabitě látky. Ty, stejně jako evoluční rovnice elektromagnetického pole, musejí zaručovat zachování náboje.

Kalibrační libovůle se v Coulombově kalibraci smršťuje na funkce χ řešící v každém okamžiku Laplaceovu rovnici.

Maxwellovy rovnice v Lorenzově kalibraci

Pohledem na rovnici (18) je vidět, že kalibrační podmínka

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi = 0, \quad (25)$$

zvaná Lorenzova, okamžitě zjednoduší rovnici pro vektorový potenciál na rovnici vlnovou. Za člen $\partial_t \operatorname{div} \vec{A}$, jenž se objevuje v rovnici pro Φ dosadíme z Lorenzovy kalibrační podmínky a dostaneme druhou časovou derivaci. Proto v Lorenzově kalibraci mají Maxwellovy rovnice pro elektromagnetické potenciály tvar

$$\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}, \quad (26)$$

$$\square \Phi = -\frac{1}{\epsilon} \rho. \quad (27)$$

Na rozdíl od podmínky Coulombovy je ve vakuu Lorenzova kalibrační podmínka speciálně relativisticky kovariantní a stejně tak i výše uvedené rovnice pro potenciály. Také je na první pohled vidět, že informace o zdrojích se šíří rychlostí světla. V této kalibraci se nabízí větší míra kalibrační volnosti – všechny χ splňující homogenní vlnovou rovnici nezmění (25). Protože v oblastech, kde nejsou náboje splňuje Φ také homogenní vlnovou rovnici, lze zde obvykle položením $\chi = \int_0^t \Phi dt$ přejít do kalibrace, kde $\Phi' \equiv 0$ a $\operatorname{div} \vec{a}' = 0$.

Zákon zachování energie

Maxwellovy rovnice (8) a (9) popisují to, jak “torzní napětí éteru” je zdrojem časové změny pole. V analogii s mechanickým vlněním lze očekávat, že bude existovat veličina daná kvadrátem polí, popisující hustotu energie elektromagnetického pole.

S použitím vztahů $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ a $(fg)' = f'g + fg'$ si nejprve spočteme

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}), \quad (28)$$

pro jistotu ještě ve složkách

$$\partial_i (\epsilon_{ijk} E_j H_k) = \epsilon_{ijk} \partial_i (E_j H_k) = \epsilon_{ijk} (\partial_i E_j) H_k + \epsilon_{ijk} E_j (\partial_i H_k) = H_i \epsilon_{ijk} \partial_j E_k - E_i \epsilon_{ijk} \partial_j H_k. \quad (29)$$

Mechanický výkon, jakým působíme proti (tedy –) Lorentzově síle je

$$dP = -\vec{v} \cdot dQ(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = -dQ \vec{v} \cdot \vec{E} = -d\vec{J} \cdot \vec{E}, \quad (30)$$

tedy objemová hustota mechanického výkonu je s použitím Maxwellových rovnic a připravené identity (28)

$$-d\vec{J} \cdot \vec{E} = -(\nabla \times \vec{H} - \partial_t \vec{D}) \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) + \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} = \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} + \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} + \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \quad (31)$$

Tento výraz pro hustotu výkonu lze integrovat přes nějaký objem a získat vztah

$$\mathbf{Výkon\ mech.\ sil} = \mathbf{Výkon\ potřebný\ ke\ změně\ el.\ a\ mag.\ pole} + \mathbf{výkon\ odcházející\ povrchem}$$

konkrétně

$$\int_{\Omega} -\vec{j} \cdot \vec{E} \, dV = \int_{\Omega} \left(\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} + \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} \right) dV + \oint_{\partial\Omega} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S}. \quad (32)$$

Člen popisující výkon potřebný ke změně elektrického a magnetického pole obsahuje i energii potřebnou ke změně magnetizace a polarizace prostředí. V lineárním nedisperzním prostředí vede vztah $\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} = \vec{E} \cdot \partial_t \epsilon \vec{E} = \frac{1}{2} \partial_t \vec{E} \cdot \epsilon \vec{E} = \frac{1}{2} \partial_t \vec{E} \cdot \vec{D}$ a podobný vztah pro magnetické pole k zavedení hustoty energie

$$w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \quad (33)$$

splňující rovnici kontinuity se zdrojem

$$\partial_t w + \operatorname{div} \vec{E} \times \vec{H} = -\vec{E} \cdot \vec{j}. \quad (34)$$

Pokud chceme podobný vztah získat i např. v magneticky tvrdém materiálu, je třeba vázané magnetizační proudy přesunou do \vec{j} a chápat je jako proudy tekoucí v prostředí s $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

Součin $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ se nazývá Poyntingův vektor. Jde o vektorové pole které určuje elektromagnetický výkon odcházející z objemu, přičemž jen zřídlová část tohoto pole vystupuje v zákonu zachování energie. Vztah (28) říká, že např. vložením permanentního magnetu do elektrostatického pole získáme Poyntingovo vektorové pole jehož zřídlová část je nulová, ovšem číselná velikost vírové složky \vec{S} může být ohromná.

Ve vakuu má w význam hustoty energie elektromagnetického pole, až se seznámíme s elektromagnetickými vlnami, uvidíme, že ta se může přelévat z jednoho místa do druhého, aniž jsou tam nějaké zdroje. Definitivně tak končí interpretace elektrostatické energie, jako potenciální energie nábojů. Poyntingov věta říká, že ta je jen zdání vzniklé z toho, že při změně polohy náboje dochází k rekonfiguraci pole, k níž potřebujeme vykonat práci právě rovnou změně elektromagnetické energie (a možná i víc, pokud s náboji postrkujeme příliš zbrkle a část naší práce se přemění na elektromagnetické vlnění, jenž odletí pryč).

Cvičení. Spočítejte energii magnetického pole kulového permanentního magnetu s konstantní magnetizací.

Zákon zachování hybnosti a momentu hybnosti

Ze speciální relativity víme, že můžeme též očekávat zachování hybnosti. Rychlost změny mechanické hybnosti udává Lorentzova síla, pro jejíž objemovou hustotu v homogenním lineárním prostředí platí

$$\begin{aligned} f_i &= \rho E_i + \epsilon_{ijk} j_j B_k = E_i \partial_k D_k + \epsilon_{ijk} (\epsilon_{jlm} \partial_l H_m - \partial_t D_j) B_k = E_i \partial_k D_k + \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} B_k \partial_l H_m - \epsilon_{ijk} B_k \partial_t D_j = \\ &= E_i \partial_k D_k + \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} B_k \partial_l H_m - \epsilon_{ijk} \partial_t (D_j B_k) + \epsilon_{ijk} D_j \partial_t B_k = \\ &= E_i \partial_k D_k + \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} B_k \partial_l H_m - \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} D_j \partial_l E_m - \epsilon_{ijk} \partial_t (D_j B_k) = \\ &= E_i \partial_k D_k + \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} B_k \partial_l H_m + \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} D_k \partial_l E_m - \epsilon_{ijk} \partial_t (D_j B_k) = \\ &= E_i \partial_k D_k + (\delta_{im} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{km}) (B_k \partial_l H_m + D_k \partial_l E_m) - \partial_t (\epsilon_{ijk} D_j B_k) \end{aligned}$$

Po přičtení nulového členu $H_i \partial_k B_k$ a za použití předpokladu o lineárním prostředí tak dostáváme

$$f_i = \partial_k \left(E_i D_k + H_i B_k + \frac{1}{2} \delta_{ik} (E_l D_l + H_l B_l) \right) - \partial_t (\epsilon_{ijk} D_j B_k) \quad (35)$$

Za základě zkušeností se zachováním hybnosti v mechanice kontinua identifikujeme

$$\vec{g} = \vec{D} \times \vec{B} \quad (36)$$

coby hustotu hybnosti elektromagnetického pole a Maxwellův tenzor

$$T_{ik} = E_i D_k + H_i B_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (E_l D_l + H_l B_l) \quad (37)$$

jako obdobu tenzoru mechanického napětí, což znamená, že udává plošnou hustotu toku změny hybnosti. Speciálně u stacionárních polí má tato veličina význam plošné hustoty síly (tedy tlaku) jímž nitky elektromagnetického pole tahají za náboje.

S použitím těchto veličin dostáváme zákon zachování hybnosti ve tvaru

$$\partial_t \left(\vec{p}_{\text{mech}}(V) + \int_V \vec{g} \, dV \right) = \oint_{\partial V} \mathbf{T} \cdot d\vec{S} \quad (38)$$

Pozn. V zákonu zachování energie, kde vystupovala časová derivace součinu $\vec{H} \cdot \vec{B}$, jsme předpokládali prostředí lineární a nedispersní, kdy tatáž permeabilita platí ve všech časech (a tedy i pro pole všech frekvencí). Při úpravách vedoucích k Maxwellovu tenzoru se provádějí prostorové derivace tohoto součinu a využívá se předpokladu o lineárním a homogenním prostředí, jenž vede na rovnost $B_k \partial_i H_k = \frac{1}{2} \partial_i B_k H_k$. V nehomogenním materiálu bude na místa měnící se permitivity, či permeability, přesněji na zde se nacházející vázané proudy a náboje působit nenulová síla. V takovém případě je nejjednodušší uvažovat vázané proudy a náboje za volné, jenž se nacházejí v prostředí s materiálovými konstantami vakua.

Ve vakuu je

$$\vec{g} = \vec{D} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{c^2} \vec{S}, \quad (39)$$

tedy hustota hybnosti je svázána s tokem energie.

Příklad. Uvažujme bodový náboj nacházející se v homogenním poli \vec{E}^0 . Elektrické pole v okolí náboje je popsáno superpozicí obou polí

$$\vec{E} = \vec{E}^1 + \vec{E}^0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{E}^0.$$

Maxwellův tenzor má tvar

$$T_{ik} = (E_i^0 + E_i^1)(D_k^0 + D_k^1) - \frac{1}{2} \delta_{ik} (E_l^0 D_l^0 + 2E_l^0 D_l^1 + E_l^1 D_l^1)$$

a jeho tok přes sféru se středem v počátku, kde sídlí uvažovaný náboj po spočtení

$$\begin{aligned} \oint E_i^0 D_k^0 dS_k &= \oint E_k^0 D_k^0 dS_i = \oint E_i^1 D_k^1 dS_k = \oint E_k^1 D_k^1 dS_i = 0, \\ \oint E_i^0 D_k^1 dS_k &= E_i^0 \oint D_k^1 dS_k = QE_i^0 \\ \oint \vec{E}^1 \cdot \vec{D}^0 \cdot d\vec{S} &= \oint \vec{D}^1 \cdot \vec{E}^0 \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi} \vec{E}^0 \oint \cos^2 \theta d\Omega, \quad \oint \vec{E}^0 \cdot \vec{D}^1 \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi} \oint \vec{E}^0 \cdot \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r \cdot d\Omega = \frac{Q}{4\pi} \vec{E}^0 \oint \cos^2 \theta d\Omega \end{aligned}$$

vychází $\vec{F} = Q\vec{E}^0$.

Hybnost elektromagnetického pole jsme již jednou potkali. Při odvozování silového působení mezi dvěma proudovými smyčkami se ukázalo, že princip akce a reakce je splněn jen pokud proudy smyčkou jsou stacionární. Budí-li proudový element \vec{J} ve svém okolí magnetické pole, je síla na jiný proudový element \vec{J}'

$$\vec{F} = \vec{J} \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{J}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) = \vec{J}' \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{J} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) - \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \vec{J} \cdot \vec{J}'. \quad (40)$$

Zatímco člen úměrný $\vec{J} \cdot \vec{J}'$ splňuje princip akce a reakce, první člen ne. Jeho původ souvisí právě s hybností elektromagnetického pole. Uvažovaný proudový element \vec{J} nespĺňuje podmínku stacionarity. V nejjednodušším přiblížení jde např. o dvojici navzájem se pohybujících nábojů jejichž proudová hustota \vec{j} má nenulovou divergenci, a tak člen $\partial_t \vec{D}$ je nezanedbatelný. Proto, ať již budeme používat jakýkoliv model proudového elementu \vec{J} , v téměř homogenním poli \vec{B}' vzdáleného proudového elementu \vec{J}' znamená nestacionarita \vec{j} potřebu započíst i hybnost elektromagnetického pole v blízkost \vec{J} .

Pro moment síly reprezentovaný antisymetrickým tenzorem

$$M_{ij} = \int (x_i f_j - x_j f_i) dV \quad (41)$$

dostáváme na základě úprav

$$x_i f_j - x_j f_i = x_i \partial_k T_{jk} - x_i \partial_t (\epsilon_{jlm} D_l B_m) - x_j \partial_k T_{ik} + x_j \partial_t (\epsilon_{ilm} D_l B_m) = \quad (42)$$

$$= \partial_k (x_i T_{jk} - x_j T_{ik}) - \delta_{ki} T_{jk} + \delta_{kj} T_{ik} - \partial_t (x_i \epsilon_{jlm} D_l B_m - x_j \epsilon_{ilm} D_l B_m) \quad (43)$$

opět rovnici kontinuity, pokud předpokládáme, že Maxwellův tenzor je symetrický. Po zúžení s ϵ_{nij} dostáváme zákon zachování momentu hybnosti

$$\partial_t \left(\vec{L}_{\text{mech}}(V) + \int_V \vec{r} \times \vec{g} dV \right) = \oint_{\partial V} \vec{r} \times \mathbf{T} \cdot d\vec{S}. \quad (44)$$

Poznámky k přednášce Klasická elektrodynamika

Elektromagnetické vlny

Skalární vlnová rovnice - opakování

Rovnice

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\right)u(\vec{x}, t) = 0 \quad (1)$$

je tzv. vlnová rovnice. I když je na pravé straně této rovnice nula, má tato rovnice nenulové řešení. V teoretické mechanice jste probrali její jednorozměrnou verzi a seznámili jste se s řešením časového vývoje kmitání struny. Ve třech dimenzích je tentýž problém řešení vlnové rovnice na omezené oblasti popsán stručně takto:

$$u(\vec{x}, t) = \operatorname{Re} \sum_n \mathcal{U}_n f_n(\vec{x}) e^{-i\omega_n t},$$
$$\Delta f_n(\vec{x}) = -k_n^2 f_n(\vec{x}), \quad \omega_n = ck_n,$$

kde \mathcal{U}_n jsou amplitudy (komplexní kvůli započtení fáze) n -tého módu. Časový průběh je harmonický, ovšem jeho závislost na prostorové souřadnici je určena funkcemi $f_n(\vec{x})$. Jsou to vlastní funkce Laplaceova operátoru při vhodné okrajové podmínce, která zaručí úplnost a reálnost spektra vlastních hodnot a frekvencí. Ačkoli jde o matematický problém, je zde možno uplatnit fyzikální intuici, garantuj-li hraniční podmínky zachování energie vlny, musí se funkce $u(\vec{x}, t)$ vyvíjet jako superpozice oscilací. (Tyto vlastní funkce jsou řešení Helmholtzovy rovnice a příklady hraničních podmínek a příslušných vlastních funkcí budou následovat v části věnované Helmholtzově rovnici.)

Vlnová rovnice se nicméně jmenuje vlnová kvůli jiné třídě řešení. D'Alembertovo řešení má v jedné dimenzi tvar

$$u(x, t) = g(x - ct) + h(x + ct),$$

a představuje úplné řešení vlnové rovnice $(\partial_{xx} - c^{-2}\partial_{tt})u(x, t) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$, tedy, když nejsou přítomny odrazy na koncích struny.

Ve třech dimenzích se toto řešení využije pro konstrukci tzv. rovinné vlny. Nyní je

$$u(\vec{x}, t) = g(\vec{n} \cdot \vec{x} - ct), \quad (2)$$

opačný směr šíření dosáhneme změnou směru jednotkového vektoru \vec{n} . Důležité je, že funkce jedné proměnné g může být libovolná. S měnícím se časem dá (2) tentýž tvar ovšem posunutý o vektor $\vec{n}ct$ oproti $t = 0$. Odsud vidíme, že jednotkový vektor \vec{n} udává směr a c rychlost šíření vlny. (Ne úplně každá funkce $g(s)$ ovšem svým tvarem připomíná vlnu, porovnejte např. e^s oproti e^{-s^2} , e^{is} .)

Za zmínku stojí, že ve třech dimenzích představují funkce $r^{-1}g(r \mp ct)$ sféricky symetrické rozbíhavé (sbíhavé) řešení vlnové rovnice. V elektromagnetismu ale nabývá sférická vlna mnohem komplikovanější tvar, protože potřebujeme tranzversální vektorová pole.

Maxwellovy rovnice jako vlnová rovnice pro pole

Již jsme viděli, že zejména v Lorenzově kalibraci lze Maxwellovy rovnice chápat jako sadu vlnových rovnic. Vlnovou rovnicí lze ale sestavit i pro \vec{E} nebo \vec{B} . Snazší je druhý případ (protože $\operatorname{div} \vec{B} = 0$):

$$-\Delta \vec{B} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot} \left(\mu_0 \vec{j} + c^{-2} \partial_t \vec{E} \right) = \mu_0 \operatorname{rot} \vec{j} + c^{-2} \partial_t \operatorname{rot} \vec{E} = \mu_0 \operatorname{rot} \vec{j} - c^{-2} \partial_{tt} \vec{B}, \quad (3)$$

tedy

$$(\Delta - c^{-2} \partial_{tt}) \vec{B} = \mu_0 \operatorname{rot} \vec{j}, \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (5)$$

Elektrické pole lze získat vyřešením Maxwellovy rovnice pro $\partial_t \vec{E}$ s příslušnou počáteční podmínkou splňující Gaussův zákon. Podobnou strukturu má i vlnová rovnice pro \vec{E} , jen zdroje jsou složitější. Beze zdrojů pak v obou případech dostaneme sadu vlnové rovnice pro pole doplněnou o vazbu v podobě nulové divergence.

Rovinná elektromagnetická vlna

V Maxwellových rovnicích vystupují vektory. Oproti velmi snadnému výpočtu $\Delta f(\vec{n} \cdot \vec{x})$ se věci poněkud zesložití.

Maxwellovy rovnice představují v Lorenzově kalibraci vlnovou rovnici pro oba potenciály. Mezi nepřeborným množstvím řešení vlnové rovnice vyniká svojí jednoduchostí tzv. rovinná vlna. Na ní uvidíme, že splnění vlnových rovnic nestačí. Jak víme, Maxwellovy rovnice dávají volnost jen vírové složce obou polí a tak určují, jak uvidíme, že vlnění je příčné.

Na základě poznámky o široké možnosti volby Lorenzovky kalibrovaného potenciálu bude rovinná elektromagnetická vlna určena jen vektorovým potenciálem

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{a}(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct), \quad \text{a} \quad \Phi(\vec{r}, t) = 0. \quad (6)$$

Samozřejmě, to že jsme \vec{A} zvolili ve tvaru rovinné vlny automaticky zaručuje, že zvolený potenciál splňuje vlnovou rovnici

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \vec{A} = |\vec{n}|^2 \vec{a}'' - \frac{(-c)^2}{c^2} \vec{a}'' = 0, \quad (7)$$

pokud velikost vektoru \vec{n} určujícího směr šíření vlny je jedna.

Lorenzova kalibrační podmínka vyžaduje, aby

$$\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi = \partial_i a_i (n_k r_k - ct) = n_i a'_i = \vec{n} \cdot \vec{a}' = 0, \quad (8)$$

kde \vec{a}' představuje derivaci podle parametru vektorové funkce jedné proměnné \vec{a} . Integrací této podmínky dostáváme, že pokud $\vec{a} = 0$ nebo $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$ aspoň v jediném bodě prostoru, musí pak již v celém prostoru musí platit

$$\vec{n} \cdot \vec{A} = 0. \quad (9)$$

Pokud spočteme

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} = c \vec{a}' \quad (10)$$

$$\vec{B} = -\nabla \times \vec{A} = \vec{n} \times \vec{a}', \quad (11)$$

vidíme, že v každém bodě prostoru jsou \vec{n} , \vec{E} a \vec{B} na sebe navzájem kolmé a platí $c\vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}$. Tato úměra mezi elektrickým a magnetickým polem obsahuje jako koeficient směr šíření \vec{n} . Proto, pokud je elektromagnetické pole superpozicí rovinných vln více směrů, tento vztah nemusí platit. Například u nejjednodušší verze stojatého vlnění jsou směry dvou harmonických rovinných vln opačné a magnetické pole v daném místě vymizí právě v okamžicích, kdy je elektrické pole maximální a naopak.

Pozn. Mluvíme o rovinné vlně proto, že místa, kde \vec{E} a \vec{B} nabývají stejné hodnoty, tedy místa kde parametr $\vec{n} \cdot \vec{r} - ct$ nabývá konstantní hodnoty, jsou určena rovnicí $\vec{n} \cdot \vec{r} = \text{konst.}$, což je rovnice roviny. Maxwellovy rovnice tedy zároveň určují analytické (jde o vlnění) i algebraické vlastnosti řešení (vlnění je příčné).

Směr vektoru \vec{E} charakterizuje polarizaci vlny. Pokud je neměnný, mluvíme o lineární polarizaci. U vlny harmonického průběhu se zavádí též kruhová příp. eliptická polarizace (viz optika).

Pro rovinnou vlnu je snadné spočítat jak hustotu energie

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\vec{E}^2 + \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \vec{B}^2 \right) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2 \right) = \epsilon_0 c^2 |\vec{a}'|^2, \quad (12)$$

i Poyntingův vektor

$$\vec{S} = c \vec{a}' \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{n} \times \vec{a}' \right) = \frac{c}{\mu_0} |\vec{a}'|^2 \vec{n} = w \vec{c}. \quad (13)$$

Tuto úměru lze chápat tak, že rovinná vlna představuje transport energie w rychlostí $\vec{c} = \vec{n}c$ doprovázený hybností elektromagnetického pole $\vec{g} = w\vec{n}/c$.

Rovinná harmonická vlna

Pro

$$\vec{A} = \frac{\vec{\mathcal{E}}}{c|\vec{k}|} e^{i|\vec{k}|(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct)} \quad (14)$$

dostáváme harmonickou rovinnou vlnu

$$\vec{E} = \vec{\mathcal{E}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad c\vec{B} = \vec{n} \vec{\mathcal{E}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (15)$$

Za pozornost stojí, že předepsání průběhu elektromagnetického pole ve tvaru rovinné monochromatické vlny

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{B}}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad (16)$$

umožňuje využít faktu, že (ověřte si!) $\nabla \cdot (\vec{\mathcal{E}}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})}) = (i\vec{k}) \cdot (\vec{\mathcal{E}}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})})$ a $\nabla \times (\vec{\mathcal{E}}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})}) = (i\vec{k}) \times (\vec{\mathcal{E}}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})})$. Proto pro harmonickou rovinnou vlnu máme

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} \quad i\vec{k} \times \vec{B} = -\frac{i\omega}{c^2} \vec{E} \quad (17)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad i\vec{k} \times \vec{E} = +i\omega \vec{B} \quad (18)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad (19)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad (20)$$

Po zkrácení faktoru $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ dostaneme podmínky transversality

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{k} = 0, \quad (21)$$

dispersní relaci

$$\omega^2 = c^2 k^2 \quad (22)$$

a souvislost směru šíření vlny $\vec{n} = \vec{k}/|\vec{k}|$ a polí (zde se vracíme zpět od amplitud k polím, platí samozřejmě obojí)

$$c\vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}, \quad \vec{E} = -\vec{n} \times c\vec{B}. \quad (23)$$

Hodnota elektrické a magnetické složky hustoty energie této elektromagnetické vlny byla stejná a tak

$$w = \epsilon_0 |\vec{E}|^2, \quad \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{n}cw, \quad \vec{g} = \vec{D} \times \vec{B} = \vec{n}\frac{w}{c}. \quad (24)$$

Tyto vztahy si vykládáme, jako ilustraci přesnosu hustoty energie ($w \vec{c}$) a hustoty hybnosti ($\frac{w}{c^2} \vec{c}$) v poli rovinné vlny.

Elektromagnetické harmonické vlny na rozhraní prostředí

Chování elektromagnetické harmonické vlny na rozhraní prostředí jste si vysvětlili v optice. Připomene si, že v optice se uvažují zejména prostředí s $\mu_r = 1$, takže index lomu je dán relativní permitivitou prostředí $n = \sqrt{\epsilon_r}$ a kompletně určuje směr i amplitudy prošlé a odražené vlny. Pro naše potřeby pochopení tohoto jevu nebudeme nezbytně předpokládat $\mu_r = 1$.

Nejprve si připomeňme, že rozhraní je plocha a splnění rovnic požadujeme v každém bodě rozhraní. Pro rovinnou harmonickou vlnu a rovinné rozhraní to dá podmínku na úhly odrazu a lomu. Při jejich splnění pak správně spojitá pole v jednom bodě vykazují tutéž vlastnost podél celého rozhraní (jde o společný faktor $e^{i\vec{k}_\parallel \cdot \vec{x}}$). Komplikace nastává v případě totálního odrazu nebo např. plazmy, kde se vlna s danou frekvencí nemusí mít dovoleno šířit, přesněji \vec{k}_\parallel je nutno doplnit komplexním \vec{k}_\perp tak, aby výsledný vektor splňoval disperzní relaci daného prostředí.

Jakmile máme vyřešeny úhly a případně zmíněné komplikace, má pole podobu superpozice známých řešení do kterých dosadíme libovolný bod na rozhraní a zkoumáme splnění spojitosti elektromagnetického pole, tedy polní problém přechází na soustavu algebraických rovnic. Na jedné straně rozhraní máme pole dopadající a odražené, na druhé straně rozhraní pole prošlé. Obvykle považujeme za známé pole dopadající. Po dosazení vlastností prostředí máme tedy čtyři neznámé veličiny, polní rovnice ale při známé fázové rychlosti vlny c a směru jejího šíření umožňují nalézt např. magnetické pole z pole elektrického. Tak nám zůstávají neznámé jen vektory elektrické intenzity odražené a prošlé vlny. Pro šest složek těchto dvou vektorů máme správný počet rovnic vyplývajících ze spojitosti tečných složek \vec{E}, \vec{H} a normálových složek \vec{D}, \vec{B} . V případě odrazu na dokonalém vodiči máme sice jen pole odražené, zbývajících stupňů volnosti potřebné k vyřešení rovnic nyní ale představují plošné náboje a proudy na povrchu vodiče.

Telegrafní rovnice

Budeme uvažovat příčné vlny $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, kdy dává rotace Faradayova indukčního zákona

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (25)$$

a po uvážení ohmické vodivosti $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ získáme **telegrafní rovnici**

$$\left(\Delta - \mu_0 \gamma \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = 0 . \quad (26)$$

Než přikročíme ke studiu této rovnice z hlediska šíření vln, stojí za zmínku připomenout její podobnost s rovnicí tlumeného harmonického oscilátoru. Tato analogie platí tehdy, když okrajové podmínky zajišťují, že máme co do činění se stojatými vlnami. To nastane za situace, kdy $\Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E}$ a tedy prostorový průběh \vec{E} je vlastní funkcí Laplaceova operátoru. Rovnice pro amplitudu \mathcal{E} takového stojatého vlnění má pak jednoduchý tvar

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\mathcal{E}} + \mu_0 \gamma \dot{\mathcal{E}} + k^2 \mathcal{E} = 0 . \quad (27)$$

Při nulové vodivosti tato rovnice popisuje harmonický oscilátor s frekvencí ck a detailněji se mu budeme věnovat v poslední části této přednášky. Když $\gamma > 0$ a vlnová rovnice přejde na rovnici telegrafní a evoluční rovnice (27) vede na v čase exponenciálně tlumené oscilace elektromagnetického pole v dutině vyplněné vodivým prostředím.

Rovnice (26) se z historických důvodů nazývá rovnice telegrafní, její správné chápání totiž učinilo z W. Thomsona lorda Kelvina a nejspíš nejbohatšího fyzika své doby. Nejen proto není bez zajímavosti, jak se tato rovnice objeví při studiu šíření signálu podél fenomenologicky chápaného elektrického vedení. Nechť jeho parametry na jednotku délky jsou: Kapacita C_1 , indukčnost L_1 , odpor R_1 a svod G_1 . Rodělíme-li vedení na kousky délky dz pak pro každý kousek platí $L = L_1 dz$, $C = C_1 dz$ atd. Pro napětí ve vedení můžeme psát

$$U_n - U_{n+1} = (R + L \frac{\partial}{\partial t}) I_{n+1} = dz (R_1 + L_1 \frac{\partial}{\partial t}) I_{n+1} \quad (28)$$

a pro proud podél vedení

$$I_n - I_{n+1} = (G + C \frac{\partial}{\partial t}) U_n = dz (G_1 + C_1 \frac{\partial}{\partial t}) U_n \quad (29)$$

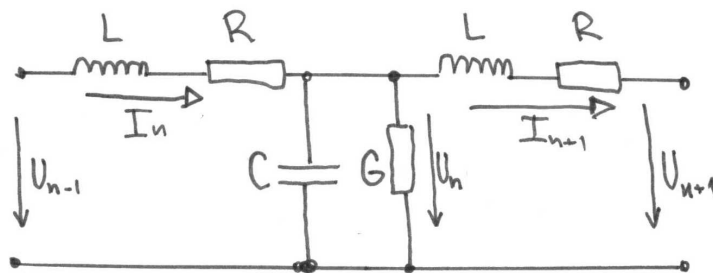
a tedy po vydělení obou rovnic délkou úseku vedení máme

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -(R_1 + L_1 \frac{\partial}{\partial t}) I \quad (30)$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -(G_1 + C_1 \frac{\partial}{\partial t}) U , \quad (31)$$

kde jsme použili přiblížení $U_n - U_{n+1} = -dz \frac{\partial U}{\partial z}$. Zderivováním první z rovnic podle z a následným použitím druhé rovnice dostáváme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - L_1 C_1 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - (R_1 C_1 + L_1 G_1) \frac{\partial U}{\partial t} - R G U = 0 . \quad (32)$$



Obrázek 1: Náhradní schéma krátkého úseku dlouhého (koaxiálního) vedení se spojitě rozloženými parametry.

Až v oddíle o TEM vlnách zjistíme, že podél dokonalého vedení konstatního průřezu se vlny šíří rychlostí světla c , porovnáním s touto rovnicí zjistíme, že $L_1 C_1 = 1/c^2$. Podmínkou je, aby proudy ve vedení tekly po povrchu, což pro ideální vedení je jasný důsledek skinového jevu.

Použitím předpisu

$$\vec{E} = \vec{\mathcal{E}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (33)$$

přejde telegrafní rovnice na dispersní vztah

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} + i\omega\gamma\mu_0 = 0 \quad (34)$$

Ten lze chápat jako rovnici pro komplexní proměnné k a nebo ω . Nejužitečnější je případ, kdy ω je reálná frekvence určená harmonickým zdrojem s pevnou amplitudou, zatímco vlny se šíří s komplexním vlnovým vektorem

$$\vec{k} = \vec{n}\frac{\omega}{c}\sqrt{1 + i\frac{c^2\mu_0\gamma}{\omega}} = \vec{n}\frac{\omega}{c}\sqrt{1 + i\left(\frac{\lambda_0}{2\pi\delta}\right)^2}, \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}} \quad (35)$$

kde δ je hloubka vniku (elektro-)magnetického pole do vodivého materiálu dle skinového jevu. V optice se studuje dopad elektromagnetické vlny na rovinné rozhraní mezi vakuem a vodivým materiálem. Zatímco ve vakuu dopadající i odražená vlna vykazuje netlumené šíření s reálným vlnovým vektorem $\vec{k} = \vec{n}\omega/c$, procházející vlna je charakterizována výše uvedeným komplexním vlnovým vektorem. Zajímavé jsou dvě limity, $\lambda \gg \delta$, kdy jde vlastně o skinový jev a případ $\lambda \ll \delta$, kdy je vlna tlumena jen pomalu. Tehdy s použitím $\sqrt{1+x} \sim 1+x/2$ máme

$$\vec{k}\cdot\vec{r} \sim \vec{n}\cdot\vec{r}\frac{\omega}{c}\left(1 + \frac{i}{2}\frac{c^2\mu_0\gamma}{\omega}\right) = \vec{n}\cdot\vec{r}\frac{\omega}{c}\left(1 + \frac{i}{2}\left(\frac{\lambda_0}{2\pi\delta}\right)^2\right) \quad (36)$$

a tedy

$$e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \sim e^{i(\vec{n}\cdot\vec{r}-ct)\omega/c} e^{-\vec{n}\cdot\vec{r}c\mu_0\gamma/2}. \quad (37)$$

Faktor $e^{-\vec{n}\cdot\vec{r}c\mu_0\gamma/2}$ určuje, na jaké charakteristické vzdálenosti je uvnitř ($\vec{n}\cdot\vec{r} > 0$) vodivého materiálu vlna utlumena.

Plasmová frekvence

Z rovnice (25) vyplývá ještě jeden důležitý případ šíření elektromagnetické vlny v prostředí.

Předpokládáme, že v prostředí jsou s koncentrací n přítomny náboje q s hmotností m_q , ovšem jsou vyváženy stejně koncentrovanými nehybnými náboji opačného znaménka. Budeme předpokládat, že uvažované náboje nevytvářejí podstatnou nábojovou hustotu (použitím Gaussovy věty lze vidět, že tedy potřebujeme také předpokládat příčinnost uvažovaných elektromagnetických vln). Pohybová rovnice pro zrychlení částice pod vlivem elektrického pole má tvar

$$m_q \dot{\vec{v}} = \vec{E}q. \quad (38)$$

Připomeňme si zde, že v rámci Drudeho modelu

$$m_q \left(\dot{\vec{v}} + \frac{1}{\tau} \vec{v} \right) = \vec{E}q. \quad (39)$$

lze porozumět Ohmovu zákonu jako disipačnímu jevu, kde se elektrony brzdí s charakteristickou časovou konstantou τ – při malých frekvencích lze zanedbat akceleraci a pozorujeme úměru mezi elektrickým polem a proudem.

Dále popisované chování plasmy pak odpovídá situaci, kdy tento čas je mnohem delší než frekvence a jejich koordinovaný pohyb nosičů náboje vytváří proudovou hustotu

$$\vec{j} = nq\vec{v}, \quad (40)$$

a místo obvyklého Ohmova zákona je pravá strana rovnice (25) dána vztahem

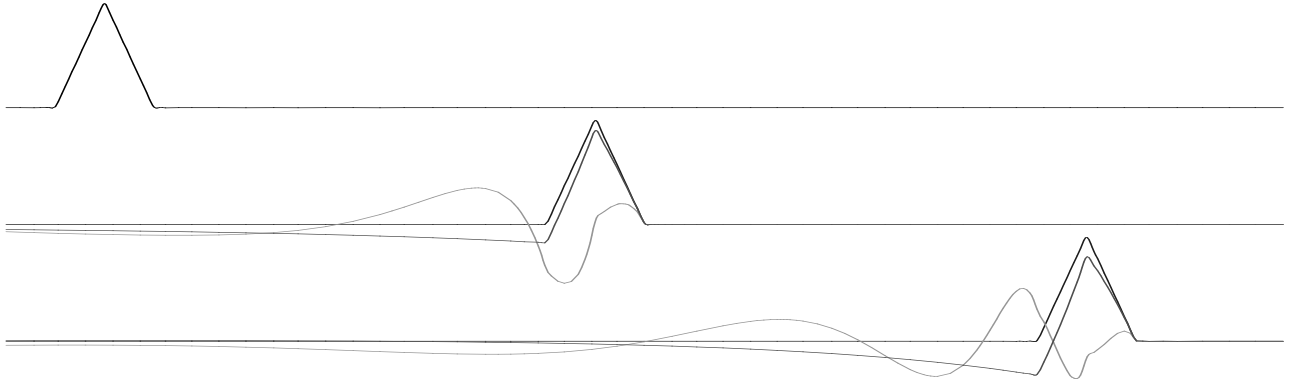
$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{j} = \frac{\mu_0 n q^2}{m_q} \vec{E} \quad (41)$$

a nehomogenní vlnová rovnice (25) poté přejde na rovnici

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\mu_0 n q^2}{m_q} \right) \vec{E} = 0. \quad (42)$$

Té po náhradě $\Delta \rightarrow -k^2$ a $\partial^2/\partial t^2 \rightarrow -\omega^2$ odpovídá rovnice

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \right) \vec{E} = 0 \quad (43)$$



Obrázek 2: Šíření vlny v prostředí bez disperse a v prostředí s dvěma různě vysokými plazmovými frekvencemi.

a tedy dispersní vztah

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}, \quad \omega_p^2 = c^2 \frac{\mu_0 n q^2}{m_q} = \frac{n q^2}{\epsilon_0 m_q}. \quad (44)$$

Z tohoto vztahu vidíme, že prostředí s náboji dovoluje šíření elektromagnetických vln (k reálné) pouze nad plazmovou frekvencí, jež roste s koncentrací těchto nábojů. Na Obrázku 2 je vidět jak v prostředí, v němž neplatí úměra $\omega = ck$ dochází k rozšiřování vlnových balíků. Skutečnost, že na nejvyšších frekvencích $\omega \gg \omega_p$ dodržuje dispersní relace (44) tuto úměru, vede k tomu, že čela vln na obrázku se šíří stejnou rychlostí – rychlostí světla.

Vztah (44) lze zapsat také v podobě

$$\omega(k) = \sqrt{\omega_p^2 + c^2 k^2}. \quad (45)$$

Lze si snadno představit, že i u dalších prostředí bude vztah mezi frekvencí a vlnovým vektorem odlišný od $\omega = c|\vec{k}|$ a tak se zde budou odlišovat fázová rychlost $v_f = \omega(k)/k$ a rychlost grupová $v_g = d\omega(k)/dk$ (závisí-li ω i na směru \vec{k} , je situace ještě komplikovanější). Význam těchto rychlostí si ilustrujeme právě na příkladě našeho modelu odvození plazmové frekvence.

Předpokládejme, že původní rovinná vlna $e^{ik(z-v_f t)} = e^{i(kz-\omega t)}$ vykazující fázovou rychlost v_f (exponent má význam fáze), která původně rovnoměrně vyplňovala celý prostor, je nyní modulována obálkou $g(z - v_g t)$ posouvající se rychlostí v_g , takže

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}g(z - v_g t)e^{ik(z-v_f t)}. \quad (46)$$

Pro vlnovou rovnici (např. když $\omega_p = 0$), která nevykazuje disperzi, položíme $v_f = v_g = \omega/k$ a dostaneme d'Alembertovo řešení. My ovšem předpokládáme rovnici (42) a dosazením harmonické vlny s obálkou po provedení druhé derivace součinu funkcí dostaneme

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \right) \vec{E}(x, t) = \left[(k^2 (v_f^2 - c^2) - \omega_p^2) + 2ik (c^2 - v_f v_g) \frac{g'}{g} + (c^2 - v_g^2) \frac{g''}{g} \right] \frac{\vec{E}(x, t)}{c^2} = 0 \quad (47)$$

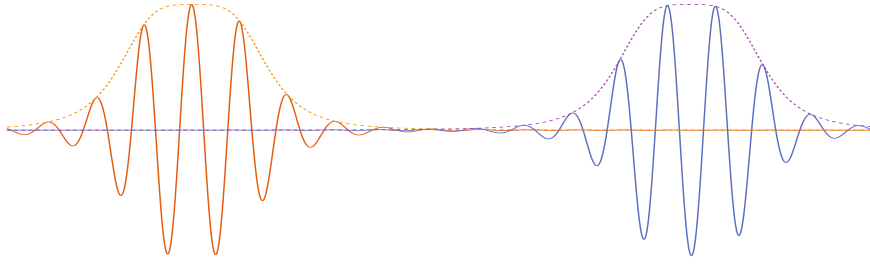
Pokud předpokládáme, že se obálka mění na délce podstatně větší, než je vlnová délka $2\pi/k$ můžeme zanedbat $|g''|$. Splnění rovnice je pak možné dosáhnout vhodnou volbou konstant v_f a v_g . Vyjde

$$v_f^2 = c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2} = \frac{\omega^2}{k^2}, \quad v_g = \frac{c^2}{v_f} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}, \quad (48)$$

tedy přesně podle návodu $v_f = \omega(k)/k$, $v_g = d\omega(k)/dk$. Opět vidíme, že šíření vln vyžaduje $\omega^2 > \omega_p^2$ a že v prostředí (41) splňuje rychlost šíření vlnových balíků (informace) $v_g < c$, zatímco fázová rychlost $v_f > c$.

TEM vlna podél vedení

Rovinná vlna, lhostejno zda harmonického či obecného profilu, pro nás představuje zatím jediné známé řešení úplných Maxwellových rovnic ve vakuu. Kolmo ke směru šíření je ovšem hodnota polí \vec{E} a \vec{B}



Obrázek 3: Ilustrace vývoje vlnového klubka s harmonickým průběhem a obálkou ve tvaru impulsu v prostředí s odlišnou grupovou a fázovou rychlostí.

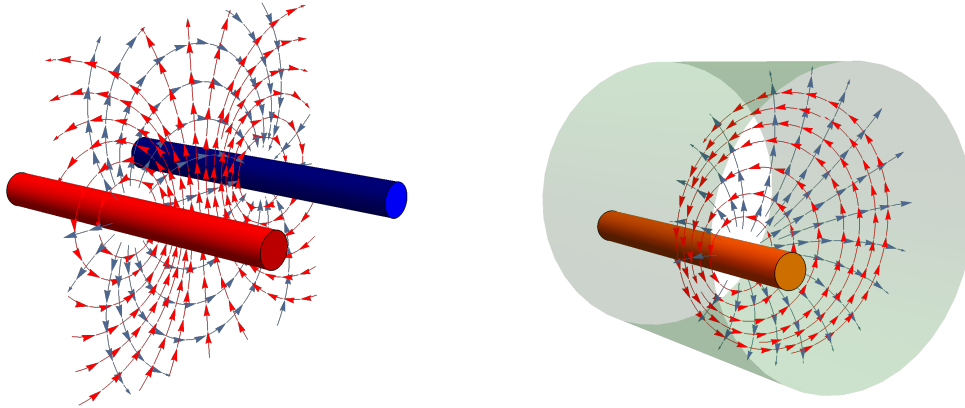
rovinné vlny konstantní. Chceme-li nalézt vlnu šířící se podél přímého vedení tvořeného dvěma vodiči, bude se elektrická intezita v kolmém směru měnit a tak očekáváme

$$\vec{E} = \vec{\mathcal{E}}(x, y)e^{i(kz - \omega t)} . \quad (49)$$

V analogii s elektrostatickým polem předpokládáme $\vec{\mathcal{E}}(x, y) = \nabla\psi(x, y)$ (a očekáváme, že ψ bude na povrchu vodičů konstantí) a tedy

$$\vec{E} = \nabla\psi(x, y)e^{i(kz - \omega t)} . \quad (50)$$

Neznámou funkci značíme ψ proto, že nepředstavuje elektrický potenciál (ten např. Coulombovské kalibraci vymizí). *Cvičení:* Nalezněte \vec{A} a Φ pro uvedené pole.



Obrázek 4: Dva rovnoběžné vodiče a jejich elektrické a magnetické pole. Siločáry obou polí leží u TEM vlny v rovině kolmé ke směru šíření vlny. Jeden z vodičů může obklopotvat ten druhý.

Požadavek $\text{div}\vec{E} = 0$ dává s použitím $\vec{e}_z \cdot \nabla\psi(x, y) = 0$ rovnici

$$\Delta\psi(x, y) = 0 . \quad (51)$$

Magnetické pole nalezneme z rovnice $-\partial_t\vec{B} = \nabla \times \vec{E}$ při použití $\partial_t \rightarrow -i\omega$

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega}\vec{e}_z \times \nabla\psi(x, y)e^{i(kz - \omega t)} . \quad (52)$$

To, že elektrické i magnetické pole je příčné vzhledem ke směru šíření vlny vede k označení tohoto pole – TEM. Takovému pole automaticky splňuje $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ a z Ampérova zákona $\partial_t\vec{E} = c^2\nabla \times \vec{B}$ dostáváme disperzní vztah

$$\omega^2 = c^2k^2 , \quad (53)$$

tedy stejnou rovnici jakou máme pro rovinné vlny.

Abychom mohli mluvit o vlnách šířících se podél vodiče, musí elektrické pole $\vec{E} \sim \nabla\psi$ na povrchu vodiče být kolmé na jeho povrch. Tímto povrchem tedy může být libovolná válcová plocha $\psi(x, y) = \text{konst.}$ Z elektrostatiky známe řešení Laplaceovy rovnice uvnitř koaxiálního vedení a z matematiky pak konstrukci potenciálu skrze holomorfní funkce popisující paralelní vedení ze dvou vodičů kruhového průřezu [Kvasnica, úloha III.16]. Oba tyto případy můžeme skrze (50,52) povýšit na elektromagnetické pole šířící se podél vedení. Vyjme-li z koaxiálního vedení vnitřní vodič, je příslušné řešení Laplaceovy rovnice $\psi = \text{konst.}, \nabla\psi = 0$ a tedy TEM vlna se nemůže šířit vlnovodem.

Helmholtzova rovnice

Vlnová rovnice ve frekvenčním obraze, tedy po nahrazení $\partial_{tt} \rightarrow -\omega^2$

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)u(\vec{x}, \omega) = 0 \quad (54)$$

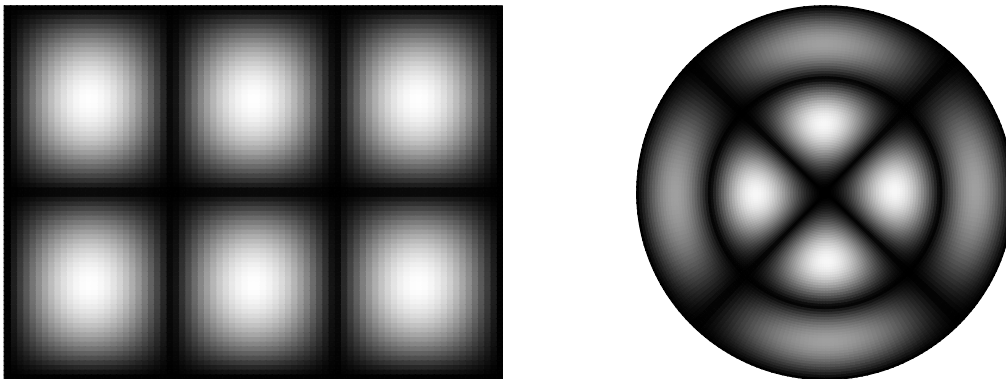
se jmenuje po Helmholtzovi. Pokud by na pravé straně rovnice vystupoval zdroj vlnění, šlo by o úlohu při níž bychom hledali šíření vln dané frekvence na nějaké oblasti. Homogenní verze Helmholtzovy rovnice představuje úlohu na hledání vlastních funkcí a vlastních hodnot Laplaceova operátoru na nějaké oblasti za daných okrajových podmínek. Ty při hledání řešení homogenní Helmholtzovy rovnice hrají klíčovou roli a úzce souvisí s tím, jaký fyzikální problém řešíme. Pokud $u(\vec{x}, \omega)$ představuje výchylku membrány tvaru Ω , je obvyklé předpokládat, že na kraji $\partial\Omega$ membrány je výchylka nulová (v analogii s membránou bubnu). Řešení Helmholtzovy rovnice v tomto případě má pro obdélníkovou membránu $x \in (0, a), y \in (0, b)$ tvar

$$u(x, y) = u_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}mx\right) \sin\left(\frac{\pi}{b}ny\right), \quad \frac{\omega_{mn}^2}{c^2} = \left(m\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n\frac{\pi}{b}\right)^2 \quad (55)$$

zatímco pro kruhovou membránu o poloměru a

$$u(r, \phi) = u_0 J_m(k_{nm}r) e^{im\phi}, \quad \frac{\omega_{mn}^2}{c^2} = k_n^2, \quad (56)$$

kde k_{nm} se volí tak, aby na okraji membrány $r = a$ vymizela Besselova funkce $J_m(k_{nm}a)$, tzn., že součin ak_{nm} nabývá hodnoty n -tého kořene funkce J_m . Protože tyto funkce představují též amplitudu stojatého vlnění čtvercové a kruhové membrány, lze jim dobře porozumět jsou-li znázorněny graficky, ako např. na Obrázku 7, kde je jasem znázorněna amplituda stojatého vlnění. Vidíme, že počet uzlů v obou směrech je dán indexy m a n .



Obrázek 5: Příklad stojatého vlnění membrány obdélníkového a kruhového tvaru.

Hledání vlastních funkcí operátorů jako je ten Laplaceův je důležitou partií matematiky a ukazuje se, že klíčovou roli hrají okrajové podmínky. U vlnění membrány (a také struny s pevnými konci) jde o tzv. Dirichletovu hraniční podmínku $u(\partial\Omega) = 0$. Budeme-li zkoumat šíření zvuku v objemu s pevnými stěnami, zjistíme, že rychlost tekutiny (přesněji zrychlení, ale to pro v čase harmonické průběhy není třeba příliš odlišovat) je úměrná gradientu tlaku. Popisuje-li tedy šíření zvuku vlnová rovnice pro skalární veličinu (tlak) je hraniční podmínka taková, že derivace tlaku na hranici musí k ní být tečná – tečná musí být totiž rychlost tekutiny u stěn nádoby. Například v dutině tvaru kvádru $x \in (0, a), x \in (0, b), z \in (0, c)$ máme pak vlastní funkce (a příslušné rezonanční frekvence)

$$u(x, y, z) = u_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}mx\right) \cos\left(\frac{\pi}{b}ny\right) \cos\left(\frac{\pi}{c}qz\right), \quad \frac{\omega_{mnq}^2}{v^2} = \left(m\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(q\frac{\pi}{c}\right)^2 \quad (57)$$

Podmínka $\vec{n} \cdot \nabla u(\partial\Omega) = 0$ se nazývá Neumannova hraniční podmínka.

Tyto odstavce mají za cíl připomenout jisté partie mechaniky a související oblasti matematiky, především ale mají ilustrovat skutečnost, že řešení homogenní Helmholtzovy rovnice představují stojaté vlnění. Frekvence stojatého vlnění v různě tvarovaných dutinách a membránách pak velmi souvisí s vlastními funkcemi Laplaceova operátoru na dané oblasti za konkrétních okrajových podmínek. Pro komplikovanější tvary oblastí často není možné přesná řešení nalézt a přicházejí na řadu přibližné metody.

TM vlna

Oproti TEM vlně se liší jistou podélnou složkou elektrického pole $\chi(x, y)\vec{e}_z$

$$\vec{E} = \left(\nabla\psi(x, y) + \frac{1}{ik}\chi(x, y)\vec{e}_z \right) e^{i(kz-\omega t)}, \quad (58)$$

přičemž to, že požadujeme neměnný příčný profil vlny podél celého vedení vede k tomu, že obě funkce ψ a χ nezávisí na z .

Místo čtyř Maxwellových rovnic můžeme požadovat splnění následujících tří rovnic

$$\nabla\vec{E} = 0 \quad (59)$$

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{E} = 0 \quad (60)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{i\omega} \nabla \times \vec{E}, \quad (61)$$

kde (61) představuje Faradayův zákon pro harmonická pole a automaticky vede na nedivergentní pole \vec{B} . Podmínka (59) vede na

$$\Delta\psi + \chi = 0 \quad (62)$$

a vyjasňuje přítomnost faktoru ik před χ v (58). Protože na souřadnici z závisí jen fáze vlny, ve vztahu $\Delta fg = f\Delta g + 2\nabla f \cdot \nabla g + g\Delta f$, kde $g = e^{i(kz-\omega t)}$, vymizí součin gradientů a dostáváme

$$\Delta\vec{E} = \Delta(\nabla\psi e^{i(kz-\omega t)}) + \frac{1}{ik}\Delta(\chi e^{i(kz-\omega t)})\vec{e}_z = \nabla(\Delta\psi - k^2\psi)e^{i(kz-\omega t)} + \frac{1}{ik}(\Delta\chi - k^2\chi). \quad (63)$$

Aby byla splněna vlnová rovnice (60) musí platit

$$\Delta\psi - k^2\psi + \frac{\omega^2}{c^2}\psi = 0 \quad (64)$$

a zároveň

$$\Delta\chi - k^2\chi + \frac{\omega^2}{c^2}\chi = 0, \quad (65)$$

protože tyto dvě rovnice představují vlnové rovnice pro příčnou resp. podélnou složku elektrického pole. Nejprve vyřešíme rovnici (64) tím, že budeme požadovat, aby funkce ψ byla řešením homogenní Helmholtzovy rovnice

$$\Delta\psi + \lambda^2\psi = 0 \quad (66)$$

a platil dispersní vztah

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2. \quad (67)$$

Z rovnic (66) a (62) vidíme, že

$$\chi(x, y) = \lambda^2\psi(x, y) \quad (68)$$

a χ tedy samozřejmě splňuje (65). Konečně můžeme spočítat průběh magnetického pole z (61)

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega} \left(1 + \frac{\lambda^2}{k^2} \right) \vec{e}_z \times \vec{E}, \quad (69)$$

neboť s použitím $\nabla \times f\vec{A} = (\nabla f) \times \vec{A} + f\nabla \times \vec{A}$, $\nabla \times \nabla f = 0$ a $\nabla e^{i(kz-\omega t)} = ik\vec{e}_z e^{i(kz-\omega t)}$ dostáváme

$$\nabla \times \left(\nabla\psi(x, y) + \frac{1}{ik}\chi(x, y)\vec{e}_z \right) e^{i(kz-\omega t)} = (ik\vec{e}_z \times \nabla\psi + \frac{1}{ik}\nabla\chi \times \vec{e}_z) e^{i(kz-\omega t)} = ik \left(1 + \frac{\lambda^2}{k^2} \right) \vec{e}_z \times \vec{E} \quad (70)$$

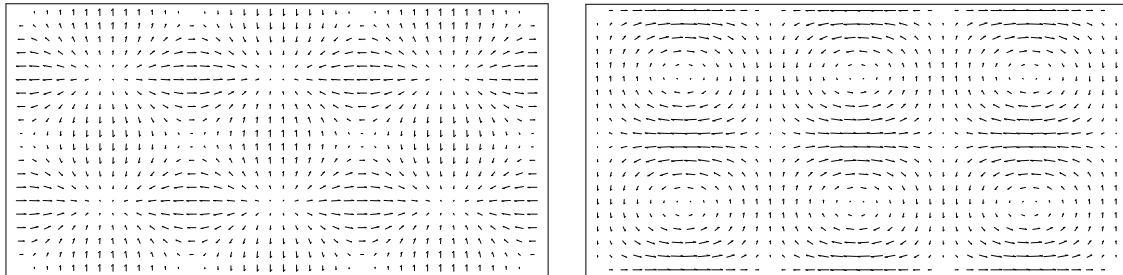
Tato vlna má představovat elektromagnetické pole šířící se podél přímého dutého vodiče. Hraníční podmínky jsou a) vymizení tečných složek \vec{E} b) kolmých složek \vec{B} . První podmínka vede na Dirichletovu podmínku pro ψ

$$\psi(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in \partial\Omega \quad (71)$$

a ze vztahu (69) vidíme, že tatáž podmínka zaručí vymizení kolmé složky magnetického pole na hranici. Tečná složka magnetického pole dává proudy tekoucí po povrchu vodiče.

Dosadíme-li za ψ známá řešení Helmholtzovy rovnice pro obdélník (57) nebo kruh (56) dostaneme tvar TM vlny ve vlnovodu s příslušným průřezem.

Dispersní vztah (67) je tentýž jako pro dispersi v důsledku nenulové plasmové frekvence – opět existuje nejnižší frekvence, jež se vlnovodem může šířit. Místo koncentrace nábojů nyní rozhodují rozměry vlnovodu, z rozměrových důvodů totiž platí, že $\lambda \sim D^{-1}$, kde D je charakteristický rozměr průřezu vlnovodu.



Obrázek 6: Příčné složky elektrické intenzity (vlevo) a magnetického (vpravo) pole TM_{32} . Tyto složky jasně splňují příslušné okrajové podmínky.

TE vlna

Ve vakuu jsou Maxwellovy rovnice symetrické vůči duální transformaci

$$\vec{E} \rightarrow c\vec{B}, \quad (72)$$

$$\vec{B} \rightarrow -\frac{1}{c}\vec{E}. \quad (73)$$

S použitím této transformace dostáváme, že také elektromagnetické pole

$$\vec{B} = \left(\nabla\psi'(x, y) + \frac{\lambda^2}{ik}\psi'(x, y)\vec{e}_z \right) e^{i(kz - \omega t)} \quad (74)$$

$$\vec{E} = -\frac{c^2 k}{\omega} \left(1 + \frac{\lambda^2}{k^2} \right) \vec{e}_z \times \vec{B}, \quad (75)$$

je řešením polních Maxwellových rovnic, splňuje-li ψ' Helmholtzovu rovnici (66) a platí-li dispersní vztah (67). Tentokrát je na směr šíření kolmá elektrická složka. Aby na povrchu vodiče vymizela tečná složka, je třeba, aby zde vymizela normálová derivace $\vec{n} \cdot \nabla\psi'$. To proto, že $\vec{e}_z \times \vec{n}$ je vektor tečný k povrchu vodiče a $\vec{B} \sim \vec{e}_z \times \nabla\psi'$. Zároveň tato podmínka je nezbytná pro vymizení normálové složky magnetického pole na povrchu vodiče. I když ψ' musí být podobně jako u TM vlny řešením Helmholtzovy rovnice, okrajové podmínky se liší – místo Dirichletovy teď máme podmínku Neumannovu.

Uvážíme-li řešení řešením Helmholtzovy rovnice na obdélníku $x \in (0, a), y \in (0, b)$ za Neumannovy okrajové podmínky

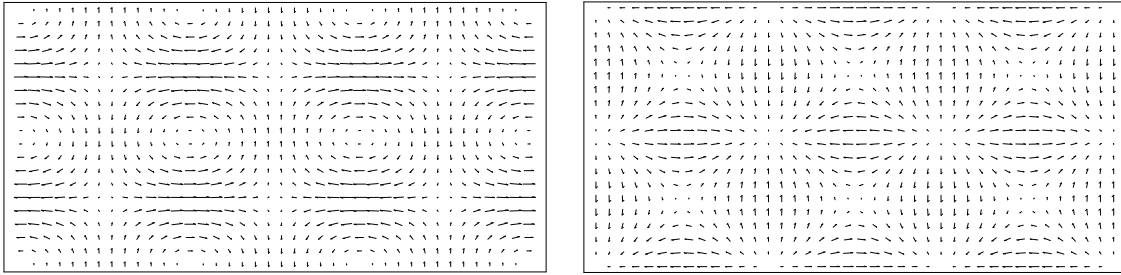
$$\psi'(x, y) = \psi'_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}mx\right) \cos\left(\frac{\pi}{b}ny\right), \quad \frac{\omega_{mn}^2}{c^2} = \left(m\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n\frac{\pi}{b}\right)^2, \quad (76)$$

vidíme, že přes značnou podobnost s řešením (57), je tu podstatná ta odlišnost, že zatímco pro (57) a tedy TM vlnu bylo potřeba aby součin $mn > 0$, stačí pro nenulovost TE vlny, aby $m + n > 0$. Speciálně tedy existuje TE_{10} vlna pro případ $m = 1, n = 0$. Je-li a ten větší z rozměrů obdélníkového průřezu, určuje tato vlna nejnižší frekvenci ω_{10} , jež se může obdélníkovým vlnovodem šířit.

Za zmínku stojí, že TE_{n0} vlnu v obdélníkovém vlnovodu lze získat složením pouhých dvou rovinných vln shodné polarizace a amplitudy, ale s mírně odchýlenými vlnovými vektory $\vec{k}_{\pm} = k_z\vec{e}_z \pm k_x\vec{e}_x$ (viz příklad na cvičení). To umožňuje chápat netriviální dispersní vztah pro šíření vlny jako důsledek odrazů

vln na stěnách vlnovodu – část pole podléhá stojatému vlnění – pak nepřekvapí, že vlny ve vlnovodu souvisí s Helmholtzovou rovnicí.

Poyntingův vektor TE i TM vlny lze snadno spočítat a představuje kombinaci toku výkonu podél osy z vlnovodu a přelévání (jalové složky výkonu) v příčném směru.



Obrázek 7: Příčné složky elektrické intenzity (vlevo) a magnetického (vpravo) pole TE_{32} .

Elektromagnetický rezonátor

Podobně jako zvukové vlny v uzavřené dutině, mohou i elektromagnetické vlny vytvořit ve vodivé dutině stojaté vlnění. Pro jednoduchost budeme uvažovat dutý vodič konstantního profilu. Ten tvoří vlnovod délky h , jenž je na obou koncích uzavřen kolmou vodivou rovinou. Okamžitě vidíme, že vhodným složením TE resp. TM vln stejné polarizace ale s opačnými vlnovými vektory $k_1 = -k_2$, jimž kvůli přítomnosti k^2 v dispersním vztahu přísluší tatáž frekvence, dostaneme stojaté vlnění. Proces je totiž naprosto tentýž jako v případě stojatého vlnění struny. Protože pro TE i TM vlnu ve vlnovodu platí $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \lambda^2$ a zároveň příčná složka elektrického pole stojatého vlnění podél vlnovodu musí na koncích mít uzly, vychází, že součin $kh = q\pi$ musí být celočíselným násobkem π , tedy $\omega^2 = c^2 ((q\pi/h)^2 + \lambda^2)$. Použijeme-li vztah (57) pro obdélníkový vlnovod $\lambda^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$ dostaneme

$$\frac{\omega_{mnq}^2}{c^2} = \left(m\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(q\frac{\pi}{h}\right)^2, \quad (77)$$

kde alespoň dvě z celých čísel m, n, q musejí být nenulová – TE vlna potřebuje aspoň jedno nenulové, druhé nenulové potřebujeme na rezonanci podél směru šíření této vlny. Kvůli symetrii problému jsou ovšem jednotlivé směry záměnné a ne nezbytně musí být q nenulové a souviset s počtem uzlů ve směru šíření. Detaily naleznete např. v [Kvasnica].

Nehomogenní vlnová rovnice

Viděli jsme, že ve vakuu lze s použitím Lorentzovy kalibrace soustavu 4 Maxwellových rovnic převést na soustavu dvou vlnových rovnic

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \Phi(r, t) = -\frac{\rho(r, t)}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A(r, t) = -\mu_0 j(r, t) \quad (2)$$

Podobně jako tomu bylo v elektrostatice je možné hledat řešení těchto rovnic ve tvaru integrálu součinu vhodné (Greenovy) funkce souřadnic r a r' a, řekněme, nábojové hustoty v bodě r' . Jakkoli je možné vzhledem k jedinečnosti tohoto řešení přímo výsledek napsat a poté ověřit (viz důležitý příklad X.1 v [1]), zkusíme použít postup z [1] abychom viděli, kde se vezme známý tvar řešení s retardovanými zdroji. I když je v časově proměnném případě tento přístup v rozporu se zachováním náboje, budeme si Greenovu funkci i v tomto případě představovat jako řešení polních rovnic s bodovým zdrojem na pravé straně.

Používáme-li následující konvenci pro Fourierovu transformaci

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (3)$$

přejde ve frekvenčním obraze časová derivace na násobení

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \Phi(r, \omega) = -\frac{\rho(r, \omega)}{\epsilon_0} \quad (4)$$

Po vzoru Greenovy funkce pro Poissonovu rovnici rozložíme zdroj na “bodové náboje”

$$\rho(r, \omega) = \rho(r', \omega) \delta(r' - r) d^3 r' \quad (5)$$

a budeme hledat potenciál $G_\omega(r, r')$, který každý z těchto “bodových nábojů” (nachází se v bodě r') budí:

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right) G_\omega(r, r') = -\delta(r' - r) \quad (6)$$

a pak řešení složíme z potenciálů od jednotlivých “nábojů”

$$\Phi(r, \omega) = \frac{1}{\epsilon_0} \int G_\omega(r, r') \rho(r', \omega) d^3 r' \quad (7)$$

Pro $\omega = 0$ přechází problém na Poissonovu rovnici a příslušná Greenova funkce je

$$G_0(r, r') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|r - r'|} \quad (8)$$

S využitím translační symetrie úlohy, můžeme hledat $G_\omega(r, r') = G_\omega(r - r')$ a stejně jako v případě $\omega = 0$ díky izotropii d'Alembertova operátoru předpokládat závislost jen na $G_\omega(r - r') = G_\omega(|r - r'|)$. Můžeme tedy vzít $r' = 0$ a za použití vztahu $\Delta f(r) = (rf)''/r$ psát pro $r = 0$, kde hledáme řešení homogenní rovnice,

$$[rG_\omega(r)]'' + \frac{\omega^2}{c^2} [rG_\omega(r)] = 0 \quad (9)$$

což je známá diferenciální rovnice s dvěma nezávislými řešeními

$$[rG_\omega(r)] = Ae^{+i\frac{\omega}{c}r} + Be^{-i\frac{\omega}{c}r} \quad (10)$$

Budeme uvažovat obě řešení zvlášť a položíme $A = B = 1/(4\pi)$ aby řešení byla správně normovaná Greenova funkce.

$$G_\omega(r, r') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm i\frac{\omega}{c}|r-r'|}}{|r - r'|} \quad (11)$$

Zvláště v technických výpočtech, kdy pro zdroje předpokládáme harmonické časové závislosti, může představovat tato Greenova funkce vlnové rovnice výchozí bod výpočtů. Pro porozumění povaze řešení nehomogenní vlnové rovnice ale převedeme tuto funkci zpět do časového obrazu.

Speciální tvar závislosti na ω odpovídá posunutí v čase:

$$f(\omega) = f_0(\omega)e^{\pm i\omega\tau} \rightarrow f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} f_0(\omega)e^{\pm i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega(t \mp \tau)} f_0(\omega) d\omega = f_0(t \mp \tau) \quad (12)$$

Proto tedy

$$\Phi(r, \omega) = \frac{1}{\epsilon_0} \int G_\omega(r, r') \rho(r', \omega) d^3 r' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{\pm i\frac{\omega}{c}|r-r'|}}{|r-r'|} \rho(r', \omega) d^3 r' \quad (13)$$

má časový obraz

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(r', t \mp \frac{|r-r'|}{c})}{|r-r'|} d^3 r' \quad (14)$$

Podobě pro vektorový potenciál máme

$$A(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j(r', t \mp \frac{|r-r'|}{c})}{|r-r'|} d^3 r' \quad (15)$$

Rozdílná znaménka reprezentují retardovaný a avancovaný potenciál. Jakákoli jejich vhodně normovaná lineární kombinace splňuje původní nehomogenní vlnové rovnice. Pokud ale nemáme závažné důvody činit jinak, bereme vždy za řešení potenciály retardované, a náboje chápeme jako zdroje a příčinu pole.

Jakkoli vzorce s retardovaným zdrojem vypadají velmi podobně vztahům z elektro-magneto-statiky, je pro konkrétní zdroje závislé na čase často těžké spočítat již jen retardovaný čas, natož příslušný integrál. Pro praktické výpočty se tak často musíme přejít do frekvenčního obrazu (např. předepíšeme harmonický průběh proudů v anténě vysílající elektromagnetické vlny). Pro pohybující se bodovou částici lze ale uvedené potenciály spočítat.

Pole nerovnoměrně se pohybující nabitě částice

Příkladem, na kterém se často ilustruje pojem δ -funkce je bodový náboj, zde navíc ukážeme, že správná manipulace s δ -funkcemi přináší zřejmé usnadnění výpočtů, a tedy, že takový popis je někdy výhodný.

Bodový náboj q pohybující se po trajektorii $r_0(t)$ je popsán hustotou

$$\rho(r', t) = q \delta^3(r' - r_0(t))$$

Pro potenciál tedy píšeme

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q \delta^3(r' - r_0(t - \frac{|r-r'|}{c}))}{|r-r'|} d^3 r' \quad (16)$$

Abychom mohli integraci přes prostorové souřadnice provést, museli bychom počítat Jacobián parametru δ -funkce, místo toho ale můžeme tak jako dosud použít postup z [1]. Protože

$$f(r, t - r/c) = \int f(r, t') \delta(t - t' - r/c) dt'$$

můžeme psát

$$\Phi(r, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta^3(r' - r_0(t')) \delta(t - t' - \frac{|r-r'|}{c})}{|r-r'|} d^3 r' dt' \quad (17)$$

tedy po již jednoduché integraci přes r'

$$\Phi(r, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta(t - t' - \frac{|r-r_0(t')|}{c})}{|r-r_0(t')|} dt' \quad (18)$$

V tomto vztahu r a t označují událost kde+kdy “zkoumáme” potenciál a $r_0(t')$ a t' označují událost “vyzáření informace” směrem k výzkumníkovi potenciálu, tedy kde ten částici v době výzkumu “vidí” skrze vlnění šířící se rychlostí c , jenž mu o ní přináší informaci. Událost t, r leží na budoucím světelném kuželi události $t', r_0(t')$, což je popsáno rovnicí

$$t - t' - \frac{|r - r_0(t')|}{c} = 0 \quad (19)$$

Místo výpočtu Jacobiánu teď vystačíme s jedinou derivací, kterou dosadíme do vztahu

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0)$$

kde předpokládáme, že $f(x) = 0$ má jediný kořen x_0 .

Protože integrační proměnná je t' , musíme spočítat derivaci levé strany (19) podle t' :

$$\frac{d}{dt'} \left(t - t' - \frac{|r - r_0(t')|}{c} \right) = -(1 - \beta.n) ,$$

kde jsme použili vztah

$$\frac{\partial |X|}{\partial s} = \frac{X}{|X|} \cdot \frac{\partial X}{\partial s} \quad (20)$$

a zavedli označení pro rychlost částice a směr od její polohy v retardovaném čase do bodu r

$$\beta = \frac{v_0}{c} = \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} r_0(t') , \quad n = \frac{r - r_0(t')}{|r - r_0(t')|}$$

Označíme-li řešení rovnice (19) t'_0 , pak dosazením dostáváme

$$\Phi(r, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta(t - t' - \frac{|r - r_0(t')|}{c})}{|r - r_0(t')|} dt' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta(t' - t'_0)}{1 - \beta.n} \frac{1}{|r - r_0(t')|} dt' \quad (21)$$

Pro elektromagnetické potenciály pohybujícího se bodového náboje tedy dostáváme

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|r - r_0(t'_0)|} \frac{1}{1 - \beta.n} \quad (22)$$

a

$$A(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q v_0(t'_0)}{|r - r_0(t'_0)|} \frac{1}{1 - \beta.n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \beta/c}{|r - r_0|} \frac{1}{1 - \beta.n} \quad (23)$$

jenž lze spočítat z proudu

$$j(r', t) = v_0 \rho = q v_0(t) \delta^3(r' - r_0(t))$$

který je součinem nábojové hustoty a rychlosti a tak je výpočet vektorového potenciálu až na faktor $\mu_0 \epsilon_0 v_0 = v_0/c^2$ zcela schodný.

Jak jsme právě viděli znamená výskyt retardovaných časů jistou komplikaci ve výpočtu, která se pak ve výsledku projeví nečekaným faktorem $(1 - \beta.n)^{-1}$. Co víc, protože pracujeme s obecně časově závislými potenciály, nemáme dostatečnou intuici (jako tomu bylo v elektrostatice) abychom z tvaru potenciálů viděli vlastnosti pole E , natož B . Proto si jako ilustraci zkusíme spočítat z výše uvedených potenciálů důležitou část výrazu pro E , jenž je úměrná zrychlení částice, a, jak uvidíme, ubývá se vzdáleností mnohem pomaleji, než vlastní Coulombické pole náboje.

Zářivé pole bodového náboje

Platí

$$E = -\nabla\Phi - \frac{\partial A}{\partial t} \quad B = \nabla \times A .$$

V potenciálech (22-23) se vyskytují následující veličiny závislé na r a t :

$$\begin{aligned} r_0 &= r_0(t'_0(r, t)) \\ v_0 &= v_0(t'_0(r, t)) = \frac{d}{dt'} r_0(t') \\ n &= \frac{r - r_0(t'_0(r, t))}{|r - r_0(t'_0(r, t))|} \end{aligned}$$

Derivací vztahu

$$t - t' - \frac{|r - r_0(t')|}{c} = 0$$

podle času za použití (20) dostáváme

$$1 - \frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{1}{c} n \cdot \frac{dr_0(t')}{dt'} \frac{\partial t'}{\partial t} = 0$$

tedy

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \beta n} ,$$

zatímco gradient téže rovnice dá

$$-\frac{\partial}{\partial r_i} t' - \frac{1}{c} n_j \left(\delta_{ji} - \frac{d(r_0)_j(t')}{dt'} \frac{\partial}{\partial r_i} t' \right) = 0$$

tedy

$$\nabla t' = \frac{-n/c}{1 - \beta n} .$$

Derivace n našťestí nebudeme potřebovat, protože klesají jako $1/R$, kde $R = |r - r_0|$. Prostorové a časové derivace veličin jako je např. v_0 spočteme podle vztahu

$$\begin{aligned} \nabla f(t') &= \frac{\partial f}{\partial t'} \nabla t' = \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{-n/c}{1 - \beta n} \\ \frac{\partial}{\partial t} f(t') &= \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{1}{1 - \beta n} \end{aligned}$$

Celkem tři členy ve výrazu pro E obsahují derivaci rychlosti, jenž dá zrychlení. Zároveň si lze povšimnout, že členy, které zanedbáváme ubývají s R rychleji, než ty jenž uvažujeme. Detailně si to ale komentovat nebudeme, neboť víme, že pole nezrychleného náboje je jen Lorentzovsky transformované Coulombické pole a tedy klesá jako $1/R^2$.

V potenciálu Φ se rychlost vyskytuje jednou

$$\nabla \Phi = \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \frac{1}{1 - \beta \cdot n} = \dots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} (-1) \frac{\nabla(1 - \beta \cdot n)}{(1 - \beta \cdot n)^2} = \dots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \frac{(-\dot{\beta} \cdot n)(n/c)}{(1 - \beta \cdot n)^3}$$

Při výpočtu časové derivace A narazíme na rychlost v čitateli i jmenovateli

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|r - r_0|} \frac{\beta/c}{1 - \beta \cdot n} = \dots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|r - r_0|} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \beta/c}{1 - \beta \cdot n} + \beta/c \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{1 - \beta \cdot n} \\ \frac{\partial A}{\partial t} &= \dots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|r - r_0|} \left[\frac{\frac{\dot{\beta}}{c} \frac{1}{1 - \beta \cdot n}}{1 - \beta \cdot n} + \frac{\beta \cdot \dot{\beta} \cdot n \frac{1}{1 - \beta \cdot n}}{c (1 - \beta \cdot n)^2} \right] \end{aligned}$$

Sečtením získáme

$$E = -\nabla \Phi - \frac{\partial A}{\partial t} = \dots - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{Rc} \frac{1}{(1 - \beta \cdot n)^3} \left(-(\dot{\beta} \cdot n)n + \dot{\beta}(1 - \beta \cdot n) + \beta(\dot{\beta} \cdot n) \right) \quad (24)$$

Protože platí $n \times [(n - \beta) \times \dot{\beta}] = (n - \beta)(\dot{\beta} \cdot n) - \dot{\beta}(1 - \beta \cdot n)$ můžeme část pole E závislou na zrychlení částice psát

$$E = \dots + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{Rc} \frac{n \times [(n - \beta) \times \dot{\beta}]}{(1 - \beta \cdot n)^3} = \dots + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{Rc^2} \frac{n \times [(n - v/c) \times \dot{v}]}{(1 - v \cdot n/c)^3} \doteq \dots + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-\dot{v}_\perp}{Rc^2} \quad (25)$$

kde jako poslední je uvedeno nerelativistické přiblížení, v němž je použito označení $\dot{v}_\perp = n \times (n \times \dot{v})$.

Podrobným výpočtem lze ukázat, jak vypadá část pole nezávislejší na zrychlení a také, že magnetické pole se řídí vztahem známým z rovinné elektromagnetické vlny

$$B = \frac{1}{c} n \times E \quad (26)$$

Díky tomu a faktu, že uvažovaná část elektrického pole je kolmá na n , dostáváme, že Poyntingův vektor splňuje relaci známou pro vlny $S = cnw$, kde $w = (E \cdot D + B \cdot H)/2$ je hustota energie elektromagnetického pole.

Navíc faktor $1/R$ zaručuje, že tok energie přes sféru o nekonečném poloměru je nenulový (to kvazistacionární pole lokalizovaných nábojů a proudů nedokáží).

Zatímco vynechaná část elektrického pole pohybujícího se náboje odpovídá Coulombickému poli a ubývá jako $1/R^2$, námi studovaná složka závislá na zrychlení ubývá jako $1/R$. Z rozměrových důvodů musí jít elektrické pole psát jako

$$E \sim \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{RH} \right),$$

kde H je veličina s rozměrem délky nějak souvisí se zrychlením částice. Pro $R \ll H$ převládá coulombické pole, naopak pro $R \gg H$ převládá záření. Pro takto velká R mluvíme proto o radiační zóně, kde můžeme ostatní členy zanedbat. Pokud stále uvažujeme jednu částici, z kinematiky zjistíme, že velikost H je zhruba vzdálenost na níž by s uvažovaným zrychlením částice nabyly relativistických rychlostí. I v případě, že záření vzniká kolektivním přespěním mnoha nábojů, řekněme v anténě, má smysl mluvit o radiační zóně jako o oblasti, kde pole má již převážně podobu elektromagnetické vlny. Jak uvidíme v následujícím příkladě, začíná radiační zóna obvykle blíže zdroji než bychom z výše uvedeného čekali.

Vyzařovací charakteristika a elektrické dipólové záření

V radiační zóně můžeme pro Poyntingův vektor s psát

$$S = E \times H = E \times \frac{1}{c\mu_0} (n \times E) = \frac{n}{c\mu_0} |E|^2 = cn \epsilon_0 |E|^2,$$

kde, stejně jako u rovinné vlny, jsme využili kolmost E na n a vztahu $c^2 \epsilon_0 \mu_0 = 1$. Dosazením konkrétního tvaru E dostáváme

$$|S| = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 R^2 c^3} \frac{|n \times [(n - v/c) \times \dot{v}]|^2}{(1 - v \cdot n/c)^6} \sim \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 R^2 c^3} |\dot{v}_\perp|^2 \quad (27)$$

Šestá mocnina výrazu $1 - v \cdot n/c$ souvisí s aberací a Dopplerovým jevem a může při vyšších rychlostech částice rozhodujícím způsobem určovat směr, kterým je záření vysíláno. V nerelativistickém případě je směr toku energie dán výrazem $|\dot{v}_\perp|^2 = |n \times (n \times \dot{v})|^2 = |\dot{v}|^2 \sin^2 \vartheta$, kde ϑ je úhel mezi (retardovaným) směrem k pozorovateli a směrem zrychlení.

Jako nejjednodušší případ si vybereme vyzařování nepohybujícího se v čase proměnného dipólu tvořeného opačně nabitými částicemi. Protože je výsledné pole lineární superpozicí polí obou nábojů, stejně jako dipólový moment soustavy, můžeme pro zjednodušení jeden z nábojů ponechat v klidu v počátku, zatímco druhý se bude v jeho blízkosti pohybovat po ose z . Při tomto modelu bude dipólový moment systému $p(t) = qr(t) = p(t)e_z$. Proto v nerelativistickém vztahu pro elektrické pole v radiační zóně můžeme kombinaci $q\dot{v}_\perp$ nahradit \ddot{p}_\perp . Velikost $|\ddot{p}_\perp| = |\ddot{p}(t) \sin \theta|$ tedy

$$S = \frac{|\ddot{p}|^2}{16\pi^2 \epsilon_0 R^2 c^3} \sin^2 \theta e_r$$

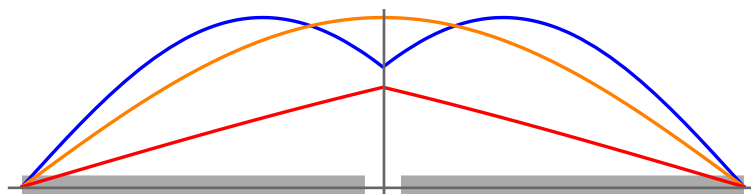
Protože pro integrál přes povrch koule o poloměru r platí $\sin^2 \theta dS = (8/3)\pi r^2$, bude za předpokladu, že $r \doteq R$, tedy že amplituda pohybu náboje v našem modelu dipólu je mnohem menší než vlnová délka, platit

$$I = \int S \cdot dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2|\ddot{p}|^2}{3c^3}$$

Protože platí princip superpozice, popisuje tento výsledek výkon záření, jenž opouští velmi malou (v porovnání s vlnovou délkou) soustavu nábojů s dominujícím elektrickým dipólovým momentem a to i v případě, kdy se směr dipólového momentu libovolně mění, v nerelativistém přiblížení jsme viděli, že záření je členem $\sin^2 \theta$ koncentrováno do roviny kolmé k vektoru zrychlení. Důležité je vidět, že zatímco pole dipólu klesá jako r^{-3} , tedy dokonce rychleji, než pole bodového náboje, radiační část pole stále přenáší energii do nekonečna díky chování $E \sim 1/r$. Podobně vyzařují záření až do nekonečna i systémy s dominujícími vyššími multipólovými momenty, každý chybějící faktor $1/R$ se ve vztazích pro intenzity pole, hustotu energie či vyzařovaný výkon nahradí časovou derivací $(1/c)d/dt$. Jestliže je zdroj nezanedbatelně velký dochází k interferenci polí od jeho jednotlivých částí, což obvykle výrazně mění vyzařovací charakteristiku oproti dipólové $|\vec{S}| \sim \sin^2 \theta$. Za součást zdroje také musíme považovat jakékoli vodiče či např. objekty s $\epsilon_r \neq 1$ nacházející se v jeho blízkosti.

Hertzův dipól

Studium pole urychleného náboje ukázalo vznik elektromagnetického záření z pohledu individuálního náboje. Velmi často ovšem vlny vznikají koordinovaným pohybem velkého množství nábojů. Důležitým modelem tohoto procesu je tzv. Hertzův dipól.



Přímý vodič (šedivě) dané délky je uprostřed přerušen a je zde napájen ze zdroje střídavého proudu. Za zjednodušujících předpokladů má proud podél vodiče podobu stojatého vlnění (viz text). Vykresleny jsou průběhy pro tři frekvence.

Viděli jsme již u skinového jevu, že určení prostorového rozložení proudu ve vodiči vyžaduje řešení Maxellových rovnic. Pro pochopení chování drátové antény ovšem zkusíme předpokládat, že proud v tenkém vodiči se chová podobně jako proud doprovázející TEM vlnu a tedy, že na konci takového vodiče se proudová vlna odrazí a pozorujeme stojaté vlnění. Vodič délky $2d$ je uprostřed přerušen a je zde napájen ze zdroje střídavého proudu. Potom bude harmonický proud podél vodiče rozložen podle

$$I(z, t) = I_0 e^{-i\omega t} \sin [k(d - |z|)]. \quad (28)$$

Jako obvykle $k = \omega/c$. (Pozn. Rozmyslete si, že pro malé frekvence popisuje toto rozložení u velmi tenkého vodiče proud doplňující směrem od přívodu uprostřed náboj rozprostírající se na vodiči – z elektrostatiky m.j. víme, že na takovém vodiči je konstantní lineární nábojová hustota.)

Budeme řešit vlnovou rovnici ve frekvenční oblasti

$$\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}, \quad (29)$$

jejíž řešení má, jak víme, podobu

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{j}(\vec{r}') d^3 r' \doteq \frac{\mu_0}{4\pi r} \int e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{j}(\vec{r}') d^3 r'. \quad (30)$$

Již zde jsme využili toho, že daleko od centra je $|\vec{r}-\vec{r}'| \sim r$ pomalu se měnící funkce. To ovšem neplatí pro komplexní exponenciálu. Zde užijeme

$$|\vec{r}-\vec{r}'|^2 = (\vec{r}-\vec{r}') \cdot (\vec{r}-\vec{r}') = r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' \quad (31)$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = r \left(1 - \frac{2}{r^2} \vec{r} \cdot \vec{r}' + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{1/2} \doteq r - \vec{n} \cdot \vec{r}', \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}. \quad (32)$$

Odsud

$$\vec{A} \doteq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{-ik\vec{n} \cdot \vec{r}'} \vec{j}(\vec{r}') d^3 r'. \quad (33)$$

Faktor před integrálem (zejména pak po doplnění o časovou závislost $e^{-i\omega t}$ jasně popisuje odcházející slábnoucí sférickou vlnu. Integrál již závisí jen na směru \vec{n} a popisuje vyzařovací charakteristiku naší idealizované dipólové antény. Dále pokročíme nahrazením $\vec{j}(\vec{r}') d^3 r' = I(z') dz' \vec{e}_z$ a dosazením $\vec{n} \cdot \vec{r}' = z' \cos \theta$. Je tedy třeba spočít

$$\int_{-d/2}^{d/2} e^{ikz' \cos \theta} \sin [k(d - |z'|)] dz' = 2 \int_0^{d/2} \cos (kz' \cos \theta) \sin [k(d - z')] dz'$$

$$= \frac{2}{k \sin^2 \theta} [\cos(kd \cos \theta) - \cos(kd)]$$

Tak dostáváme vektorový potenciál

$$\vec{A} \doteq \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{kr} \frac{\cos(kd \cos \theta) - \cos(kd)}{\sin^2 \theta} \vec{e}_z. \quad (34)$$

Pracujeme v Lorentzovské kalibraci a pro naše harmonicky časově závislá pole bychom mohli potenciál ϕ dopočítat z kalibrační podmínky. Protože se ale stejně zajímáme jen o radiční zónu,

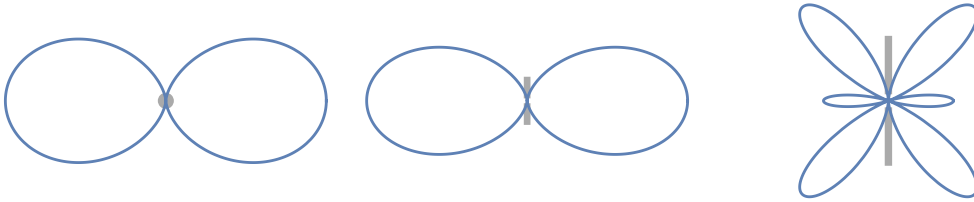
Lze snadno vidět s použitím $\nabla \times [f(\vec{r})\vec{e}_z] = \nabla f \times \vec{e}_z$, že jediný člen ubývající s $1/r$ vznikne derivováním exponenciály. Dále je $\nabla e^{ikr} = ik\vec{n}$ a $\vec{n} \times \vec{e}_z = \vec{e}_r \times \vec{e}_z = (\sin \theta \vec{e}_R + \cos \theta \vec{e}_z) \times \vec{e}_z = -\sin \theta \vec{e}_\phi$ a tedy radiční část magnetického pole je

$$\vec{B}_{\text{rad}} \doteq -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{ie^{i(kr - \omega t)}}{r} \frac{\cos(kd \cos \theta) - \cos(kd)}{\sin \theta} \vec{e}_\phi. \quad (35)$$

V radiční zóně je $\vec{E} = -\vec{n} \times c\vec{B}$ a Poyntingův vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \mu_0^{-1}(-\vec{n} \times c\vec{B}) \times \vec{B} = c\mu_0^{-1}|\vec{B}|^2\vec{n}$, tedy pro vyzařovací charakteristiku dostaneme

$$r^2 \langle \vec{S} \rangle = \frac{dP_{\text{rad}}}{d\Omega} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi^2} \left(\frac{\cos(kd \cos \theta) - \cos(kd)}{\sin \theta} \right)^2. \quad (36)$$

Tato hodnota nezávisí na ϕ a lze ji tedy snadno zachytit graficky. Nezapomeňme, že anténa je dlouhá $2d$, tedy pro anténu dlouhou ξ -násobek vlnové délky $2d = \xi\lambda = \xi(2\pi)/k$, tedy $kd = \pi\xi$.



Vyzařovací charakteristika bodového dipólu (vlevo), ideálně izolované drátové dipólové antény s délkou $\lambda/2$ (uprostřed), a $3/2\lambda$ (vpravo).

Jak se skutečnost, že anténa vyzařuje energii jeví zdroji, jenž do antény dodává proud? Z jeho pohledu má anténa reálnou část impedance. Připomeňme, že ideální kondenzátor (což je limita malých frekvencí) odebírá čistě jalový výkon. Při rostoucích frekvencích bude z pohledu zdroje střídavého proudu nutno přidat do obvodového schématu sériový odpor. Jeho hodnota bude taková, aby v něm došlo právě ke „spálení“ vyzařovaného výkonu. Protože svorkami protéká proud, který dostaneme dosazením $z = 0$ do (28), určíme tuto hodnotu z rovnosti

$$\frac{1}{2} R_{\text{rad}} I_{\text{svork}}^2 = \frac{1}{2} R_{\text{rad}} I_0^2 \sin^2(kd) = \int \frac{dP_{\text{rad}}}{d\Omega} d\Omega. \quad (37)$$

Pro v praxi důležitý půlvlnný dipól vyjde 73Ω . Povšimněte si, že tato úvaha nefunguje pro celovlnný dipól, pro něj by I_{svork} vyšlo nulové. To proto, že jsme proudové pole podél antény předepsali bez ohledu na splnění rovnic pole.

Síla působící na vyzařující částici

Zatímco pole v radiční zóně má docela přehledný tvar

$$\vec{S} = c\vec{n}w(\theta, \phi) = c\vec{n}w(\vec{n}) \quad (38)$$

v blízkosti zdroje záření je tvar Poyntingova vektoru velmi komplikovaný. Kdybychom dokázali nalézt pole v blízkosti zdroje splňující příslušné okrajové podmínky (obvykle tam jsou nějaké vodiče), dokázali bychom určit kolik z energie přiváděné, řekněme do rozlehlého deskového kondenzátoru se motá v jeho okolí a slouží jen k výrobě blízkých polí (jalové proudy) a kolik energie systém opustí a v podobě záření odletí pryč. Nalézt takové řešení lze v podstatě ale jen pro nejjednodušší problémy a to jen za silně omezujících předpokladů, např., že rozměry musejí být mnohem menší, než uvažovaná vlnová délka. To znamená, že třeba rozložení polí v okolí antény je analyticky neuvěřitelné, protože dobrá anténa nemůže být mnohem menší než vlnová délka.

Podobě je ale velmi komplikovaný i problém zdánlivě nejjednodušší – energetická bilance v okolí urychlované bodové částice. Důvodem pro to je, že klasická bodová částice je fyzikálním obrazem matematického objektu popsaného δ -funkcí a příslušnými Greenovými funkcemi. Ty mají velmi dobrý smysl v rámci lineární

teorie svazující pole a jeho zdroje. Energie a její toky jsou ale popsány kvadratickými výrazy a tam jistota s níž používáme δ -funkce atp. končí.

Podobně, jako jsme provedli integraci odcházejícího výkonu u dipólu, lze (s trikem, kdy pro integraci zavedeme okamžité souřadnice tak, že osa z míří směrem okamžitého zrychlení) spočít celkový výkon, který vyzařuje v daný okamžik částice s předepsaným pohybem $\vec{x}(t)$. Výsledný vztah se zaývá *Larmorova formule*

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2 |\ddot{\vec{x}}|^2}{3c^3}. \quad (39)$$

To ale vyžaduje, aby na částici působilo odlétající elektromagnetické pole silou, která jí odejme příslušnou vyzařenou energii. Její výpočet vyžaduje pracný výpočet limity, kdy se stále menší částice stává bobovou a její pole stále silnější a jeho energie roste nade všechny meze. Existuje pojem *klasický poloměr elektronu*, což je poloměr sférické nabitě slupky, jejíž energie je ekvivalentní právě hmotě elektronu. Limita bodové částice pak vyžaduje pokračovat ve zmenšování a nějak pracovat s energií pole převyšující ekvivalent hmotnosti částice, energií v limitě nekonečnou. Poté, co se vhodným postupem takového nekonečna zbavíme, zbyde v pohybové rovnici konečná síla úměrná druhé derivaci rychlosti. My si v následujícím zjednodušeném odvození ukážeme, že právě taková síla by mohla být odpovědná za výkon odnášený elektromagnetickými vlnami.

Pro jednoduchost uvažujme nabitou částici, která se nejdříve v časech $t \leq t_1$ nachází v rovnoměrném přímočarém pohybu, pak na ni chvíli působí všelijaké síly, které ji urychlují a brzdí, aby ji nakonec v $t \geq t_2$ ponechaly ve stejném rovnoměrném přímočarém pohybu. Taková částice podle (39) vyzáří energii

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} k |\dot{\vec{v}}|^2 dt = k \int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{v}} \cdot \dot{\vec{v}} dt = k \left([\dot{\vec{v}} \cdot \dot{\vec{v}}]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\vec{v}} \cdot \dot{\vec{v}} dt \right), \quad (40)$$

kde $k = (q^2 / (6\pi\epsilon_0 c^3))$.

Předpokládáme, že energii do systému dodává nějaká síla \vec{F} působící na částici

$$E = \int \vec{F} \cdot \dot{\vec{v}} dt. \quad (41)$$

Protože okrajové členy jsou za daného počátečního a koncového stavu nulové za předpokladu platnosti zákona zachování energie dostáváme

$$0 = \int \left(-m\ddot{\vec{v}} + \vec{F} + k\ddot{\vec{v}} \right) \cdot \dot{\vec{v}} dt. \quad (42)$$

což by mohlo vést k domněnce, že pohybová rovnice pro nabitou částici musí být modifikována do tvaru

$$m(\ddot{\vec{a}} - \tau\ddot{\vec{a}}) = \vec{F}, \quad (43)$$

kde $\tau = k/m$ je extrémně krátká charakteristická doba, pro elektron je $\sim 10^{-24}$ s, což je hodnota odpovídající času, který světlu trvá překonat klasický poloměr elektronu – to připomíná, že záření souvisí s jevem retardace.

To je ovšem jen stěží přijatelné: (1) je to diferenciální rovnice třetího řádu, (2) ta řešení na něž jsme z Newtonovské dynamiky zvyklí se ztrácejí mezi velmi ošklivými řešeními exponenciálně rostoucími v čase, (3) kdybychom chtěli vybrat mezi řešeními to správné (to poznáme podle toho, že dobře dopadne – viz naše podmínky na koncovou rychlost částice) máme jasně nekausální teorii.

Ukazuje se, že rozumný smysl lze Abrahamově-Lorentzové síle

$$\vec{F}_{brzd} = k\ddot{\vec{a}} \quad (44)$$

dát, pokud třetí derivaci polohy chápeme jako časovou derivaci zrychlení vypočteného z původní pohybové rovnice bez brzdění síly. Věci se komplikují ještě nutností zahrnout speciální relativitu, nicméně pro newtonovský model vodíkového atomu s pevným centrem máme původní sílu

$$\vec{F} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

Po zderivování výrazu $k\ddot{\vec{a}} = k\vec{F}/m$ podle času dostaneme pravou stranu (44) a tedy

$$\vec{F}_{brzd} = -\tau\vec{F} = -\tau \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}|\vec{x}|^2 - 3\vec{x}(\vec{x} \cdot \vec{x})}{|\vec{x}|^5}.$$

Jde o sílu, která u klasické kruhové trajektorie působí proti směru rychlosti v souladu s obvyklým jevem disipace. Místo vazkých efektů má ale popisovat brzdění v důsledku vyzařovaných elektromagnetických vln.

Cvičení: Vyjádřete u kruhové dráhy zrychlení jako funkci energie a sestavte za pomoci (39) diferenciální rovnici vyjadřující časový vývoj energie klasického vodíkového atomu. Spočtete dobu jeho života.

Poznámky k přednášce Klasická elektrodynamika
Vybrané vztahy vektorové analýzy

Identity, Leibnizovo pravidlo

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \quad (2)$$

$$\nabla (fg) = f \nabla g + g \nabla f \quad (3)$$

$$\nabla \cdot (f \vec{A}) = (\nabla f) \cdot \vec{A} + f \nabla \cdot \vec{A} \quad (4)$$

$$\nabla \times (f \vec{A}) = (\nabla f) \times \vec{A} + f \nabla \times \vec{A} \quad (5)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (6)$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \quad (7)$$

$$\nabla (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) \quad (8)$$

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A}) \quad (9)$$

Gaussova věta

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{A} \, dV = \oint_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot \vec{A} \, dS \quad (10)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \times \vec{A} \, dV = \oint_{\partial\Omega} \vec{n} \times \vec{A} \, dS \quad (11)$$

$$\int_{\Omega} \nabla f \, dV = \oint_{\partial\Omega} \vec{n} f \, dS \quad (12)$$

Stokesova věta

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (13)$$

$$\int_{\Omega} \nabla f \times d\vec{S} = \oint_{\partial\Omega} f \, d\vec{l} \quad (14)$$