

Poznámky k přednášce Klasická elektrodynamika

Magnetická pole stacionární a kvazistacionární

Maxwellovy rovnice – stacionární pole

V situaci, kdy vymizí časové derivace polních veličin \vec{E} , \vec{B} a nábojové hustoty ρ , rozpadnou se Maxwellovy rovnice ve vakuu na již známou sadu rovnic elektrostatiky a sadu rovnic rovnic pro magnetické pole

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (1)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (2)$$

Pokud jediné zdroje pole jsou ty, jenž určují divergenci, mluvíme o zřídlovém charakteru pole. Pokud jediné zdroje pole jsou ty, co určují jeho rotaci, jde o pole vírové. Elektrostatická pole mají ten první charakter, magnetická pole naopak ten druhý.

Je zajímavé, že identity $\text{div rot } \vec{A} = 0$ a $\text{rot grad } f = 0$ umožňují rozdělit libovolné pole na vírovou a zřídlovou část. Tento rozklad je jednoznačný pro pole, které je definováno v celém prostoru a ubývá i derivacemi dostatečně rychle směrem k nekonečnu, jak lze ukázat z jednoznačnosti řešení Laplaceovy rovnice, na kterou se problém díky identitám $\text{div grad } f = \Delta f$ a $\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$ převede.

Integrální verze Ampérova zákona

Ze Stokesovy věty okamžitě plyne Ampérův zákon

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_S. \quad (3)$$

Za válcové symetrie (kdy jsou pole invariantní vůči posunutí a rotaci kolem osy z) lze za použití Ampérova zákona ihned určit pole proudové hustoty $\vec{j} = j(R)\vec{e}_z$, jaká dobře popisuje proudy v koaxiálním vedení. Speciálně tak dostáváme pole tenkého přímého vodiče (ve válcových souřadnicích)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{e}_\phi. \quad (4)$$

Biotův-Savartův-Laplaceův vzorec

1. Studium účinků tohoto pole na střelku našli již Biot, Savart a Laplace za použití analogie s polem nabitě přímky výraz pro magnetické pole buzené proudem a tedy našli řešení polních rovnic magnetizmu, které dnes zapisujeme

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\vec{J}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (5)$$

a kde podle povahy proudu bereme $d\vec{J} = \vec{j}dV$ pro objemovou proudovou hustotu \vec{j} , $d\vec{J} = \vec{j}_{\text{ploš}}dS$ pro plošnou proudovou hustotu $\vec{j}_{\text{ploš}}$ případně $d\vec{J} = Id\vec{l}$ pro proud protékající nekonečně tenkým vodičem.

2. Lze opravdu magnetické pole stacionárního proudu chápat jako součet příspěvků od jednotlivých elementárních proudů $d\vec{J}$? Tzv. pomalá Lorentzova transformace elektromagnetického pole rovnoměrně přímočaře se pohybujícího bodového náboje vysvětluje, že u takového náboje pozorujeme magnetickou složku pole. Z dvou opačných nábojů, z nichž jeden se pohybuje lze sestavit jednoduchý model elementu proudu $d\vec{J}$. Uvažujeme-li superpozici polí takovýchto dvou opačných nábojů Q a $-Q$ z nichž ten první se pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí \vec{v} , pro jejich pole platí

$$[\vec{E}; \vec{B}] = [\vec{E}_0; 0]' - [\vec{E}_0; 0] \doteq [\vec{E}_0; \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}_0] - [\vec{E}_0; 0] = [0; \frac{\vec{v}}{c^2} \times \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}] = [0; \vec{J} \times \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}], \quad (6)$$

kde $\vec{J} = Q\vec{v}$ a $\mu_0 = (c^2\epsilon_0)^{-1}$. Ačkoli proudová hustota takového zdroje není stacionární, přeci jen vysvětluje v jakém smyslu je magnetické pole stacionárního proudu rovno součtu polí jednotlivých nábojů.

3. Protože v přiblížení stacionárních proudů musí \vec{j} splňovat stacionární rovnici kontinuity $\text{div } \vec{j} = 0$, představuje stacionární proudová hustota vírové pole (jednoznačně) určené veličinou $\text{rot } \vec{j}$, která je tedy zároveň i zdrojem magnetického pole. Aplikací rotace na (1) za použití (2) dostáváme

$$\Delta \vec{B} = -\mu_0 \text{rot } \vec{j} \quad (7)$$

a tedy s použitím již známé metody pro řešení Poissonovy rovnice

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \vec{j}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla' \times \frac{\vec{j}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{j}' dV. \quad (8)$$

Ačkoli lze tedy magnetické pole spočítat z rotace pole proudové hustoty, lze za situace, kdy proud vymizí vně nějaké oblasti, první integrál, který má tvar úplné divergence tenzoru druhého řádu, převést na integrál po povrchu na kterém proudy vymizí a z druhého se po provedení gradientu vyklube Biotův-Savartův-Laplaceův vzorec.

4. Splnění rovnice $\text{div } \vec{B} = 0$ lze automaticky zajistit za použití vektorového potenciálu

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (9)$$

Libovolné řešení rovnice,

$$\Delta \vec{A} - \text{grad } \text{div } \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}, \quad (10)$$

jenž vznikne dosazením definice \vec{A} do (1), vede k řešení obou polních rovnic pro \vec{B} .

Nejprve zkusíme předpokládat, že vektorový potenciál splňuje podmínku $\text{div } \vec{A} = 0$. Poté souvislost vektorového potenciálu a proudové hustoty získá tvar

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}, \quad (11)$$

a řešení můžeme psát

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV. \quad (12)$$

Divergence takto spočteného pole

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}' \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}' \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla' \cdot \frac{\vec{j}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\nabla' \cdot \vec{j}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \quad (13)$$

je nulová, pokud proudy vymizí v nekonečnu (první integrál lze s použitím Gaussovy věty psát jako integrál plošný přes velmi vzdálenou sféru) a pokud všude mají nulovou divergenci (předpoklad stacionarity), kdy vymizí druhý integrál. Nyní víme, že $\text{rot } \text{rot } \vec{A} = -\Delta \vec{A}$ a proto s použitím (9) $\Delta(1/|\vec{r} - \vec{r}'|) = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$ magnetické pole splňuje Ampérův zákon (1).

V situaci, kdy máme vektorový potenciál \vec{A}' , který má nenulovou divergenci $\text{div } \vec{A}' \neq 0$, nalezneme nedivergentní vektorový potenciál \vec{A} tak, že vyřešíme rovnici

$$\Delta \chi = \text{div } \vec{A}' \quad (14)$$

pro neznámou funkci χ a \vec{A}' opravíme dle předpisu

$$\vec{A} = \vec{A}' - \nabla \chi \quad (15)$$

V magnetostaticce je vektorový potenciál veličina, pro níž není možno určit hodnotu v nějakém bodě, ovšem cirkulace po libovolné uzavřené křivce má hodnotu magnetického toku touto křivkou a představuje veličinu nezávislou na volbě kalibrace. Omezíme-li se na vektorové potenciály splňující $\text{div } \vec{A} = 0$, musí se potenciály odpovídající témuž magnetickému poli lišit o gradient harmonické funkce (funkce řeší Laplaceovu rovnici). Jediná harmonická funkce, jejíž gradient vymizí v nekonečnu je konstanta. Proto za podmínky, že $\text{rot } \vec{B}$ vymizí v nekonečnu, představuje vztah (12) jediný vektorový potenciál, který vymizí v nekonečnu a splňuje uvedenou kalibrační podmínku.

Silové účinky magnetického pole

Z Lorentzovy síly

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (16)$$

vyplývá síla již působí magnetické pole na médium protékané proudem

$$\vec{F} = \int d\vec{J} \times \vec{B}. \quad (17)$$

Silové působení proudového pole \vec{j}' uvnitř tělesa V' na těleso V uvnitř kterého teče proud \vec{j} z Lorentzovy síly vychází

$$\vec{F} = \int d\vec{J} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j} \times \left[\int_{V'} \vec{j}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \right] dV \quad (18)$$

tedy po úpravě dvojnásobného vektorového součinu

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{j}' \left[\int_V \vec{j} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \right] dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \int_V \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{j} \cdot \vec{j}') dV dV' \quad (19)$$

získáváme dva výrazy. Ten první je ovšem nulový, protože

$$\int_V \vec{j} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV = - \int_V \vec{j} \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV = - \int_V \left(\nabla \cdot \frac{\vec{j}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\nabla \cdot \vec{j}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV = -0 + 0, \quad (20)$$

kde první integrál vymizí kvůli nepřítomnosti proudů vně tělesa a druhý díky zachování náboje. Proto je síla mezi dvěma proudy popsána symetrickým výrazem

$$\vec{F}_{MAG} = - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \int_V \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{j} \cdot \vec{j}') dV dV'. \quad (21)$$

Tento výraz popisuje působení “na dálku” a respektuje zákon akce a reakce. Díky jeho podobnosti s elektrostatickou silou

$$\vec{F}_{ELSTAT} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \int_V \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\rho\rho') dV dV' \quad (22)$$

uhodl Ampère snad již během demonstrace Oesterdova experimentu, přičemž permanentní magnetismus materiálů si vysvětloval “molekulárními proudy”. V případě proudových smyček dostáváme záměnou $(\vec{j} \cdot \vec{j}') dV dV' \rightarrow II' d\vec{l} \cdot d\vec{l}'$ dvojnásobný křivkový integrál popisující sílu mezi dvěma vodiči.

Skutečnost, že princip akce a reakce neplatí pro vzájemné silové působení dvou proudových elementů, ale jen pokud vyintegrujeme podél celé smyčky je připomenutím, že tyto proudové elementy budí nestacionární pole a to vyžaduje použití úplných Maxwellových rovnic.

Pole daleko od lokalizovaných proudů

Vztah (4) zatím představuje zatím jediný příklad magnetického pole proudu a poskytuje představu o tvaru magnetického pole v blízkosti tenkého vodiče. (Mimochodem, při praktických výpočtech můžeme tvar obecné proudové smyčky přiblížit pomocí lomené čáry, přičemž příspěvek od každé úsečky lze přesně spočítat.)

Jak vypadá pole daleko od proudové smyčky či permanentního magnetu? Zapišeme-li Biot-Savartův vzorec ve složkách

$$B_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \epsilon_{ijk} j'_j \frac{r_k - r'_k}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' = - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \epsilon_{ijk} \partial_k \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} j'_j dV', \quad (23)$$

můžeme použít přiblížení platné pro $r \gg r'$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{r_l r'_l}{r^3} + \dots \quad (24)$$

Protože pod integrálem je třeba ponechat jen čárkované veličiny, stačí spočítat za prvé celkový proud

$$J_j = \int j'_j dV' = \int \partial'_n (r'_j j'_n) dV' = \oint dS_n (r'_j j'_n) = 0, \quad (25)$$

který vymizí pokud proudy splňující rovnici kontinuity vymizí vně nějakého objemu. Za druhé pak moment proudové hustoty $\int j'_j r'_l dV'$. Tento tenzor druhého řádu, lze rozdělit na symetrickou a anisymetrickou část,

$$J_{jl} = \int j'_j r'_l dV' = \frac{1}{2} \int (j'_j r'_l + j'_l r'_j) dV' + \frac{1}{2} \int (j'_j r'_l - j'_l r'_j) dV', \quad (26)$$

přičemž podobně jako u (25) je symetrická část nulová, neboť ji lze psát jako úplnou divergenci $j'_j r'_l + j'_l r'_j = \partial'_n (r'_j r'_l j'_n)$. Proto představuje J_{jl} antisymetrický tenzor a ten vyjádříme za pomoci vektoru \vec{m}

$$J_{jl} = \int j'_j r'_l dV' = \epsilon_{ljn} m_n, \quad (27)$$

jehož význam se ukáže po zúžení této rovnice s ϵ_{kjl} , kdy dostáváme

$$\epsilon_{klj} J_{jl} = \int \epsilon_{klj} j'_j r'_l dV' = \epsilon_{klj} \epsilon_{ljn} m_n = -\epsilon_{klj} \epsilon_{jln} m_n = -(\delta_{kl} \delta_{ln} - \delta_{kn} \delta_{ll}) m_n = -(1-3) m_k = 2m_k, \quad (28)$$

tedy \vec{m} představuje *magnetický dipólový moment* zdroje

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j}' dV'. \quad (29)$$

Vzpomeneme-li si, že plochu rovinné smyčky můžeme psát $\vec{S} = \frac{1}{2} \oint \vec{r} \times d\vec{l}$, je magnetický moment proudové smyčky

$$\vec{m} = I \vec{S}. \quad (30)$$

S použitím výsledku, že z prvních dvou členů rozvoje pole (23) v $1/r$ je až ten druhý nenulový dostáváme

$$B_i \doteq -\frac{\mu_0}{4\pi} \epsilon_{ijk} \partial_k \frac{r_l J_{jl}}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \epsilon_{ijk} \partial_k \frac{r_l \epsilon_{ljn} m_n}{r^3}, \quad (31)$$

tedy po příslušném přerovnání indexů dostaneme vektorový potenciál magnetického pole dipólu

$$\vec{A}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad (32)$$

a jeho rotací magnetické pole

$$\vec{B}_{\text{dip}} = \text{rot } \vec{A}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{r}\vec{r} \cdot \vec{m} - \vec{m}r^2}{r^5}, \quad (33)$$

kteří je k nerozlišení od pole dipólu, jaký známe z elektrostatiky – v tomto případě by ale šlo o dvojici velmi blízkých magnetických nábojů. Protože velkou proudovou smyčku si můžeme představit, jako složenou z mnoha malých, jejichž proudy se uvnitř navzájem ruší tak, jak jsme to viděli u “důkazu” Stokesovy věty, je pole velké proudové smyčky součtem polí všech těch malých. Jde o pouhé sčítání ploch ve vztahu (30). Protože každá taková smyčka budí stejné pole jako dvojice opačných magnetických nábojů, budí velká smyčka pole stejné jako tzv. magnetická dvojvrstva – dvě opačné plošné (magneticky) nabitě plochy těsně nad sebou. Příslušné odvození nejdete v učebnicích pod názvem “ekvivalence proudové smyčky a magnetické dvojvrstvy”. Zajímavější je ale naskládat hodně smyček a nebo hodně dvojvrstev na sebe a ukázat, že vnější pole solenoidu (a jak uvidíme tak i ideálního válcového permanentního magnetu) je totožné s vnějším polem dvou rovnoměrně (magneticky) nabitých kruhových desek.

Silové působení na magnetický dipól

Zatímco v elektrostatice představují elementární objekty bodové náboje, základním magnetickým objektem je magnetický dipól, např. malá proudová smyčka. Silové působení magnetického pole na magnetický dipól získáme opět rozvojem, tentokrát vnějšího pole v místě malé proudové smyčky

$$F_i = \int \epsilon_{ijk} j_j B_k dV = \int \epsilon_{ijk} j_j (B_k|_{\vec{r}=0} + r_l \partial_l B_k|_{\vec{r}=0}) dV = \epsilon_{ijk} (J_j B_k|_{\vec{r}=0} + J_{jl} \partial_l B_k|_{\vec{r}=0}). \quad (34)$$

Opět nultý moment proudů je nulový a první moment J_{jl} je dán (27), tedy

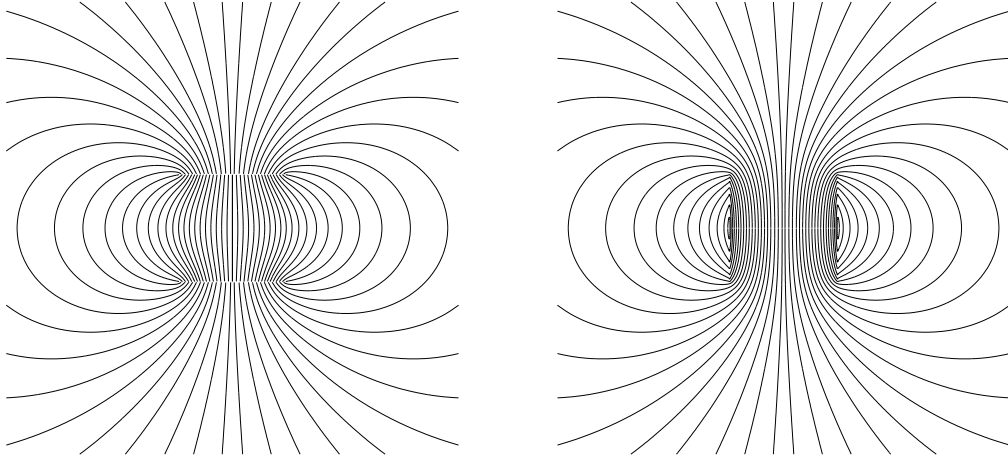
$$F_i = \epsilon_{ijk} \epsilon_{ljn} m_n \partial_l B_k = (\delta_{il} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{kl}) m_n \partial_l B_k \quad (35)$$

Protože druhý člen (úměrný δ_{kl}) je úměrný $\text{div } \vec{B}$, je síla na působící na magnetický dipól dána nehomogenitami magnetického pole vztahem

$$\vec{F} = \text{grad } \vec{m} \cdot \vec{B} \quad (36)$$

Tento zápis předpokládá, že při derivování se magnetický dipól chová jako konstanta. To nemusí ale být vždy pravda, pokud magnetický dipólový moment vzniká reakcí na na magnetické pole, např. skrze vztah

$$\vec{m} = \alpha_M \vec{B}, \quad (37)$$



Obrázek 1. Pole válce s nabitými podstavami a pole plošného proudu tekoucího po plášti téhož válce. Pole vně válce se nijak neliší. To souvisí i s tím, že levý resp. pravý obrázek představuje pole \vec{H} resp. \vec{B} vně i uvnitř permanentního magnetu s konstantní magnetizací rovnoběžnou s osou válce.

který popisuje proces magnetizace objektu po jeho vložení do externího pole. Poté bychom museli použít zápis ve složkách

$$F_i = m_k \partial_i B_k. \quad (38)$$

Pokud v místě, kde se dipól nechází netečou proudy, je $\text{rot } \vec{B} = 0$ a může tentýž vztah zapsat

$$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B}. \quad (39)$$

Moment sil působící na magnetický dipól spočteme podobně

$$M_l = \epsilon_{lmi} \int r_m dF_i = \epsilon_{lmi} \int r_m \epsilon_{ijk} j_j B_k dV = \epsilon_{lmi} \epsilon_{ijk} B_k J_{jm} = \epsilon_{lmi} \epsilon_{ijk} B_k \epsilon_{mjn} m_n, \quad (40)$$

přičemž po použití $\epsilon\epsilon = \delta\delta - \delta\delta$ a za nulové stopy $\delta_{mj}\epsilon_{mjn}$ vychází

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}. \quad (41)$$

Tato rovnice popisuje moment sil, který v homogenním poli “otáčí” střílkou kompasu. Zkoumáním jejího rovnovážného směru a frekvence kmitů střílky okolo něj měřili Biot a Savart veličinu \vec{B} , aniž by tou dobou existoval pojem magnetické pole.

Tyto vztahy byly odvozeny za předpokladu, že za magnetický moment tělesa a za silové působení vnějšího magnetického pole na něj jsou odpovědné proudy uvnitř tělesa. Při zkoumání zákona zachování hybnosti a momentu hybnosti elektromagnetického pole zjistíme, že veličina \vec{m} charakterizující magnetické pole buzené tělesem je tatáž, jako veličina \vec{m} charakterizující silové působení vnějšího pole na těleso nezávisle na materiálu tělesa, tedy i v případě, že původ magnetismu tělesa nepatří do klasické fyziky.

Elektrické a magnetické pole v prostředí

Uvážíme-li, že viděný svět je vlastně obrazem elektromagnetických vlastností materiálů, je z jeho pestrosti zřejmé, že následující odstavce budou jen velmi zjednodušeným výkladem. Především se budeme zabývat prostředím ve stacionárním přiblížení Maxwellových rovnic. Dále použijeme naivní představu, že látka je složena z velmi malých atomů a jejichž vlastnosti jsou dostatečně přesně zapsatelné v podobě (po částech) spojitých prostorových funkcí.

Nejprve stojí za povšimnutí, že jsou-li takovéto neutrální “atomy” o rozměru a zdroji elektrického a magnetického pole, jsou to jen jejich dipólové momenty, které přirozeně přispívají k makroskopickému poli. Uvažujme těleso o hraně délky $L = Na$. K poli vně takového tělesa přispívá l -tý multipólový člen rozvoje zhruba jako $E_0 (a/r)^{l+2}$ přičemž uvnitř tělesa je cca N^3 atomů a E_0 představuje velikost pole na atomové škále. Celkové pole v typické makroskopické vzdálenosti L má tedy velikost zhruba

$$E \sim N^3 E_0 (a/L)^{l+2} = E_0 N^{1-l}. \quad (42)$$

Zatímco příspěvek např. kvadrupólového momentu atomů je na makroskopických škálách tedy zanedbatelný, mikroskopické dipólové pole se na makroskopických škálách projevívá.

Elektrické náboje stojící na pravé straně vakuových Maxwellových rovnic rozdělíme na dva typy. Náboje vázané budou tvořené svázanými kladnými a zápornými navzájem posunutými náboji, které budou vytvářet v každém malém objemu dV elektrický dipól

$$d\vec{p} = \vec{P}(\vec{r})dV . \quad (43)$$

Zbylé náboje nebudou takto spárované a jsou popsány nábojovou hustotou $\rho_v(\vec{r})$. Dipól v místě \vec{r}' budí elektrické pole

$$\vec{E} = -\nabla\Phi_{dip} = -\nabla\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = -\nabla\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\vec{p}\cdot\nabla'\psi , \quad (44)$$

kde $\psi = 1/|\vec{r}-\vec{r}'|$. Elektrické pole buzené nábojovou hustotou je

$$\vec{E} = -\nabla\Phi = -\nabla\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\nabla\frac{1}{4\pi\epsilon_0}Q\psi . \quad (45)$$

Složením obou polí při použití $Q \rightarrow \rho'_v dV'$ a $\vec{p} \rightarrow \vec{P}' dV'$ lze získat pole vytvářené volnými a vázanými náboji dohromady

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\rho'_v\psi + \vec{P}'\cdot\nabla'\psi\right]dV' , \quad (46)$$

Předpokládáme, že tělesa uvnitř kterých se vyskytují vázané náboje jsou konečná a lze je tedy obklopit plochou, na které \vec{P} vymizí. Proto úpravou $\vec{P}'\cdot\nabla'\psi = \nabla'\cdot(\vec{P}'\psi) - \psi\nabla'\cdot\vec{P}'$ dostáváme

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int(\rho'_v - \nabla'\cdot\vec{P}')\psi dV' , \quad (47)$$

jako řešení Maxwellovy rovnice

$$\text{div } \epsilon_0\vec{E} = \rho_v - \text{div } \vec{P} , \quad (48)$$

tedy

$$\text{div } (\epsilon_0\vec{E} + \vec{P}) = \text{div } \vec{D} = \rho_v , \quad (49)$$

kterýmžto vztahem je definována *elektrická indukce* \vec{D} . Rozdělení na volné a vázané náboje je na našem uvážení, obvykle ale vektor polarizace chápeme jako vlastní danému prostředí (fero- a piezo-elektrika) nebo jako projev reakcí prostředí na elektrické pole – nejnázatelnější a nejčastěji vyjádřitelný lineárním vztahem

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E} . \quad (50)$$

Podobně i proudy stojící na pravé straně vakuových Maxwellových rovnic rozdělíme na dva typy. Vázané budou tvořené malými proudovými smyčkami a budou vytvářet v každém malém objemu dV magnetický dipól

$$d\vec{m} = \vec{M}(\vec{r})dV . \quad (51)$$

Ostatní proudy jsou popsány proudovou hustotou $\vec{j}_v(\vec{r})$. Magnetický dipól v místě \vec{r}' budí pole

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}_{dip} = \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m} \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \nabla\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{m} \times \nabla'\psi , \quad (52)$$

kde opět $\psi = 1/|\vec{r}-\vec{r}'|$. Složením tohoto pole s magnetickým polem buzeným proudovou hustotou $\vec{j}_v(\vec{r})$ při použití $\vec{m} \rightarrow \vec{M}' dV'$ lze získat celkové magnetické pole

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\vec{j}_v\psi + \vec{M}' \times \nabla'\psi\right]dV' , \quad (53)$$

Předpokládáme, že tělesa jsou konečná a lze je tedy obklopit plochou, na které \vec{M} vymizí. Povšimneme-li si, že $\nabla \times (\vec{M}\psi)$ představuje úplnou divergenci jistého tenzoru druhého řádu, úpravou $\vec{M} \times \nabla\psi = -\nabla \times (\vec{M}\psi) + \psi\nabla \times \vec{M}$ dostáváme

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\nabla\frac{\mu_0}{4\pi}\int(\vec{j}_v + \nabla' \times \vec{M}')\psi dV' , \quad (54)$$

tedy řešení Maxwellovy rovnice

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0(\vec{j}_v + \text{rot } \vec{M}) , \quad (55)$$

a tedy konečně

$$\text{rot } (\mu_0^{-1}\vec{B} - \vec{M}) = \text{rot } \vec{H} = \vec{j}_v . \quad (56)$$

Tímto vztahem je definována *magnetická intenzita* \vec{H} . Opět vektor magnetizace \vec{M} chápeme jako vlastní danému prostředí (tvrdá feromagnetika) nebo jako projev reakcí prostředí na magnetické pole – v nejjednodušším případě vyjádřitelný lineárním vztahem

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0\mu_r\vec{H} . \quad (57)$$

Je třeba dodat, že takto definované veličiny vystupují i v plných Maxwellových rovnicích, ve kterých časová derivace polarizace vystupuje jako další proud, pro pochopení zavedení \vec{D} a \vec{H} je ale stacionární problém dostačující.

Alternativně lze např. při zavedení \vec{D} postupovat tak, že položíme $\rho_{váz} = -\text{div}\vec{P}$, kde \vec{P} je zatím neznámé vektorové pole nenulové uvnitř tělesa. Tuto volbu lze zdůvodnit tak, že celkový náboj tělesa dá až na znaménko z Gaussovy věty tok pole \vec{P} plochou za hranicemi tělesa. Zde je $\vec{P} = 0$ a tedy takovéto zavedení je vhodné pro popis polarizovaných ale celkově elektricky neutrálních těles. Poté spočteme dipólový moment buzený takovouto nábojovou hustotou v libovolném objemu V

$$p_i = \int_V r_i (-\partial_j P_j) dV = \int_V -\partial_j (r_i P_j) dV + \int_V (\partial_j r_i) P_j dV = \int_V \delta_{ij} P_j dV , \quad (58)$$

kde integrál z úplné divergence tenzoru $r_i P_j$ přes objem zahrnující celé těleso vymizí (plošný integrál za hranicemi tělesa je nulový) a tedy

$$\vec{p} = \int_V \vec{P} dV . \quad (59)$$

Tento vztah říká, že \vec{P} představuje objemovou hustotu dipólového momentu.

Cvičení: Ukažte analogické zavedení \vec{H} .

Maxwellovy rovnice na rozhraní prostředí

Na rozhraní dvou prostředí s různými materiálovými vztahy nebo pokud zdroje pole mají plošný charakter vyplývají z Maxwellových rovnic podmínky pro nespojitosti polí. Vznik těchto podmínek lze snadno pochopit z úvahy, že když ztrácejí kvůli neexistenci derivací význam operace div a rot , integrální verze Maxwellových rovnic musejí zůstat v platnosti.

Alternativně lze pole v okolí plochy nespojitosti $u(\vec{r}) = 0$ rozdělit na regulární a nespojitou část, například

$$\vec{D} = \vec{D}_0 + [\vec{D}]\Theta(u(\vec{r})) , \quad (60)$$

kde

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (61)$$

je Heavisideova skoková funkce. Funkce prostorových souřadnic $u(\vec{r})$ představuje (obecně křivočarou) souřadnici na jejíž souřadnicové ploše $u = 0$ dochází ke skoku polních veličin.

Protože budeme chtít popisovat plošné hustoty zdrojů, vyplatí se předpokládat, že funkce $u(\vec{r})$ je zvolena tak, že normálový vektor k ploše $u(\vec{r}) = 0$, který spočteme podle předpisu

$$\vec{n} = \text{grad } u(\vec{r}) \quad (62)$$

je jednotkový, tedy Laméův koeficient $h_u = 1$. Když totiž např. plošnou nábojovou hustotu zapíšeme

$$\rho = \sigma(\vec{r})\delta(u(\vec{r})) \quad (63)$$

a zavedeme spolu s u ještě další dvě ortogonální souřadnice v a w , snadno se přesvědčíme, že výraz pro náboj uvnitř nějakého objemu

$$Q = \int \rho dV = \int \sigma(u, v, w)\delta(u) \frac{du dv dw}{|\nabla u||\nabla v||\nabla w|} = \int \sigma(0, v, w) \frac{dv dw}{|\nabla v||\nabla w|} = \int \sigma dS \quad (64)$$

dokazuje, že $\sigma(\vec{r})$ představuje plošnou nábojovou hustotu. (Použito bylo vztahů $dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$, $dS_1 = h_2 h_3 dq_2 dq_3$, $|\nabla q_i| = 1/h_i$ a speciální volby souřadnice u takové, že $h_u = 1$.)

Jak vypadá derivace Hevisideovy skokové funkce? Samozřejmě, právě vztah $d/dx\Theta(x) = \delta(x)$ představuje nejsrozumitelnější definici Diracovy δ -funkce. Protože $\nabla \cdot (\vec{A}f) = f\nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla f$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \vec{D}_0 + \nabla \cdot ([\vec{D}]\Theta(u)) = \nabla \cdot \vec{D}_0 + \Theta(u)\nabla \cdot [\vec{D}] + \vec{n} \cdot [\vec{D}]\delta(u) = \rho_0 + \sigma\delta(u) . \quad (65)$$

Poslední rovnost v tomto vztahu říká, že regulární část nábojové hustoty je určena divergencí \vec{D} v místech, kde derivace existuje, zatímco δ -funkci úměrné členy vedou k druhé z následujících Maxwellových rovnic na nepohybujícím se rozhraní dvou prostředí

$$\text{Rot } \vec{H} = \vec{n} \times [\vec{H}] = \vec{j}_{\text{ploš}} \quad (66)$$

$$\text{Div } \vec{D} = \vec{n} \cdot [\vec{D}] = \sigma \quad (67)$$

$$\text{Rot } \vec{E} = \vec{n} \times [\vec{E}] = 0 \quad (68)$$

$$\text{Div } \vec{B} = \vec{n} \cdot [\vec{B}] = 0. \quad (69)$$

Pokud se rozhraní či plošný zdroj pohybují, je příslušná nespojitost tvaru $[\vec{X}]\Theta(u-vt)$ a parciální derivace podle času, které stojí v úplných Maxwellových rovnicích, přispějí také členem úměrným δ -funkci, který nesmíme opomenout.

Na rozhraní prostředí dávají tyto vztahy hodnoty plošných vázaných nábojů $\sigma = -\text{Div } \vec{P}$ a proudů. $\vec{j}_{\text{ploš}} = \text{Rot } \vec{M}$. Pokud ovšem vycházíme z veličin \vec{D} a \vec{H} , jsou v místech skoků polarizace či magnetizace plošným zdrojem těchto polí naopak $\text{Rot } \vec{P}$ a $\text{Div } \vec{M}$.

Příklad. Hledáme-li pole permanentního magnetu vyrobeného z materiálu s pevně danou konstantní magnetizací, můžeme postupovat dvěma cestami. Jednak lze spočít magnetickou indukci buzenou plošným proudem $\vec{j}_{\text{ploš}} = \vec{n} \times \vec{M}$, který neteče po povrchu permanentního magnetu jen v místech, kde je magnetizace kolmá k jeho povrchu. Proto pole B vypadá jako pole solenoidu příslušného tvaru.

Také ovšem můžeme za hledanou veličinu vzít \vec{H} a řešit rovnice

$$\text{rot } \vec{H} = 0 \quad \text{div } (\vec{H} + \vec{M}) = 0.$$

Pro uvažovaný magnet s konstantní magnetizací vymizí objemový zdroj $-\text{div } \vec{M}$ a jediným zdrojem (nevířivé) magnetické intenzity je skok kolmé složky magnetizace na povrchu tělesa, $\text{Div } \vec{H} = -\text{Div } \vec{M}$. Tento vztah je analogický s elektrostatickou úlohou pro pole plošného náboje na povrchu polarizovatelného tělesa. Siločáry polí \vec{B} i \vec{H} válcového permanentního magnetu jsou na obr. 1.

Cvičení: Odvoďte rovnici (66).

Cvičení: Zjistěte, kdy je $\vec{E} = \vec{E}_0\Theta(z-vt)$ a $\vec{B} = \vec{B}_0\Theta(z-vt)$ řešením úplných vakuových Maxwellových rovnic bez (plošných) nábojů i proudů.

Cvičení: Přesvědčte se, že permanentní magnet ve tvaru koule s $\vec{M} = \text{konst.}$ budí okolo sebe přesně dipólové pole, zatímco uvnitř je pole homogenní.

Silové působení na plošné proudy a náboje

Protože v místech, kde tečou plošné proudy, není magnetické pole spojitě, není jasné, jaký význam má vztah určující sílu

$$\vec{F} = \int \vec{j}_{\text{ploš}} \times \vec{B} dS \quad (70)$$

a podobně je to i plošným nábojem. Víme, že když počítáme sílu působící na bodový náboj, rozdělíme elektrické pole na pole tohoto bodového náboje (divergující v místě náboje) a na pole zbylých nábojů. Jen jejich pole pak použijeme k výpočtu síly. Protože plošný proud či nábojová hustota jsou zdrojem skoku pole, zapíšeme pole v okolí plošného zdroje

$$\vec{B} = \frac{1}{2}(\vec{B}_1 + \vec{B}_2) + \frac{1}{2}(\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\text{sign}(u((\vec{r})). \quad (71)$$

Bez důkazu uvedme, že druhý člen lze chápat pole jako buzené plošným proudem v daném místě a tedy jej lze vyloučit z výpočtu síly působící na daný kus plošného proudu. Ten se tedy z hlediska výpočtu síly jakoby nachází v průměru polí z obou stran. Proto zavedeme průměry $\{\vec{B}\} = \frac{1}{2}(\vec{B}_1 + \vec{B}_2)$ a $\{\vec{E}\} = \frac{1}{2}(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)$ a Lorentzovu sílu na plošné náboje a proudy zapíšeme

$$\vec{F} = \int \left(\sigma \{\vec{E}\} + \vec{j}_{\text{ploš}} \times \{\vec{B}\} \right) dS. \quad (72)$$

Cvičení: Spočtete sílu, jíž na sebe působí desky idealizovaného rovinného kondenzátoru. Totéž spočtete s použitím zákona zachování energie, přičemž uvažujte jak kondenzátor připojený ke zdroji napětí, tak kondenzátor odpojený.

Cvičení: Spočtete sílu, jíž je namáháno vinutí idealizovaného solenoidu.

Cvičení: Po nastudování zákona zachování hybnosti elektromagnetického pole dokažte (72). Při integraci toku Maxwellova tenzoru plochou obepínající rozhraní prostředí 1 a 2 se může hodit identita $H_i^{(2)}B_j^{(2)} - H_i^{(1)}B_j^{(1)} = [H_i]\{B_j\} + \{H_i\}[B_j]$ a odpovídající výraz pro D_iE_j .

Kvazistacionární přiblížení

Kvazistacionární přiblížení

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} \quad (73)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (74)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \quad (75)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (76)$$

$$(77)$$

svazuje elektrické pole s magnetickým. Ještě donedávna bylo zanedbání členu $\partial_t \vec{D}$ (tzv. Maxwellova proudu) možné ve většině aplikací Maxwellových rovnic. Rozhodnout, do jaké míry lze konkrétní problém řešit v kvazistacionárním přiblížení není snadné. To, zda je Maxwellův proud zanedbatelný oproti ostatním proudům se obvykle pozná tak, že charakteristické rozměry úlohy jsou po vydělení rychlostí světla zanedbatelné proti charakteristickým časům, jenž se v úloze vyskytují.

Předpokládejme nejprve, že proudy a náboje jsou určeny předem a nejsou ovlivněny jimi buzeným polem. Protože v kvazistacionárním přiblížení jsou rovnice určující magnetické pole totožné s rovnicemi pro pole stacionární, lze při zadaném proudu použít tytéž metody řešení. Elektrické pole ovšem nyní má předepsanou jak divergenci, tak i nenulovou rotaci.

I když bychom mohli takovou úlohu rozdělit na dvě – tedy počítat zvlášť vírovou a zřídlovou část elektrického pole, lze si problém zjednodušit automatickým vyřešením homogenní rovnice (75). Protože $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$, dostáváme

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \partial_t \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot} (\vec{E} + \partial_t \vec{A}) = 0 \quad (78)$$

protože rotace $\vec{E} + \partial_t \vec{A}$ je nulová musí to být gradient nějaké skalární funkce. Při těchto úpravách jsme nevyužili zanedbání Maxwellova proudu a tedy i v obecném případě zavádíme elektromagnetické potenciály vztahy

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad (79)$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi - \partial_t \vec{A}. \quad (80)$$

Při použití kalibrační podmínky $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ tak ze zbylých Maxwellových rovnic dostáváme pro potenciály

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}, \quad (81)$$

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (82)$$

Tyto rovnice pro elektromagnetické potenciály v kvazistacionárním přiblížení za předpokladu, že proudy a náboje jsou dány, představují dvě (eliptické) rovnice popisující okamžité vytváření pole zdroji v celém prostoru najednou (působení na dálku).

Elektromagnetické pole v kvazistacionárním přiblížení nemá vlastní dynamické stupně volnosti, jen poslouchá co mu náboje a proudy poručí.

Energie pole stacionárních proudů

Zatímco v elektrostatice jsme energii soustavy nábojů uhodli na základě práce nutné k jejich přenesení z nekonečna, je v magnetismu třeba proudy pomalu zapínat. Tento proces ale vede k vzájemné i vlastní indukci a tedy energii magnetického pole lze odvodit až v rámci kvazistacionárního přiblížení. Tehdy je výkon potřebný k vzniku magnetického pole $-\int \vec{j} \cdot \vec{E} dV$ za použití $\nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{E}) = \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E})$ a zákona indukce (75)

$$-\int \vec{j} \cdot \vec{E} dV = -\int (\nabla \times \vec{H}) \cdot \vec{E} dV = -\int \nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{E}) dV - \int H \cdot (\nabla \times \vec{E}) dV = \int \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dV + \int \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} dV. \quad (83)$$

Za použití stejného postupu, jaký budeme použijeme u úplných Maxwellových rovnic a za stejného předpokladu linearit vztahu $\vec{B} = \mu \vec{H}$ dostáváme, že z kvazistacionárního přiblížení Maxwellových rovnic vyplývá jistý zákon zachování energie

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \right) + \operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{E} \cdot \vec{j}. \quad (84)$$

Zanedbání členu $\partial_t \vec{D}$ jednak způsobí, že pole izolovaných zdrojů slábnou pro $r \rightarrow \infty$ natolik, že plošný integrál lze při integraci přes celý objem zanedbat. V kvazistacionárním přiblížení mají zdroje energie

jimi buzeného pole beze zbytku “pod kontrolou”. Absence Maxwellova proudu také způsobila, že v (84) není zahrnuta energie eklektického pole. Kvazistacionární přiblížení tedy popisuje problémy, kde elektrická složka hustoty elektromagnetické energie je zanedbatelná. (Kondenzátory, v jejichž dielektriku z principu tato nerovnost neplatí, se do kvazistacionárního přiblížení zavedou jako prvky, u nichž je časová změna energie popsána pravou stranou této rovnice $-\int \vec{E} \cdot \vec{j} dV = -UI = -\partial_t CU^2/2$.)

Podobně jako v elektrostatice, lze i u magnetického pole ustálených proudů místo energie pole mluvit o potenciální energii zdroje. S použitím $\nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{A}) = \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{A})$ a (73) dostáváme

$$\frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot \vec{B} dV = \frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{A}) dV = -\frac{1}{2} \oint (\vec{H} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \vec{j} dV . \quad (85)$$

a tedy po zanedbání povrchového členu

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot \vec{B} dV = \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \vec{j} dV . \quad (86)$$

Indukčnost

Spolu s elektromagnetickou indukcí se objevují pojmy vlastní a vzájemná indukčnost. Napětí indukované podél uzavřené proudové smyčky C_A ohraničující plochu S_A je rovno změně magnetického toku $-\dot{\Psi}_A$

$$U_{iA} = \oint_{C_A} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\dot{\Psi}_A = -\partial_t \int_{S_A} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\partial_t \int_{S_A} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} = -\partial_t \int_{C_A} \vec{A}(I_B) \cdot d\vec{l} = -L_{AB} \dot{I}_B . \quad (87)$$

Lineární závislost pole na zdroji tedy podobně jako v elektrostatice vede na matici koeficientů L_{AB} . Konkrétně,

$$U_{iA} = -\partial_t \int_{C_A} \vec{A} \cdot d\vec{l} = -\partial_t \int_{C_A} \left[\sum_B \frac{\mu_0 I_B}{4\pi} \int_{C_B} \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \cdot d\vec{l} \Rightarrow L_{AB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_A} \int_{C_B} \frac{d\vec{l} \cdot d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \quad (88)$$

Ze vztahu (86) dále pro lineární proudy vyplývá, že

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \sum_B I_B \int_{C_B} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} \sum_{A,B} L_{AB} I_A I_B . \quad (89)$$

Bohužel, diagonální prvky takto definované matice indukčností soustavy nekonečně tenkých vodičů jsou nekonečné. Zdrojem potíží je nekonečně silné pole v blízkosti takto tenkého drátu. Například na úseku přímého vodiče lze ukázat, že proudem buzený magnetický tok stejně taj jako energie tohoto pole logaritmicky diverguje s poloměrem vodiče jdoucím k nule.

Za povšimnutí stojí, že zákon zachování energie vyžaduje jev vlastní indukčnosti: Magnetické pole je kvůli linearitě polních rovnic úměrné budícímu proudu, a tedy energie pole $\frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot \vec{B} dV$ musí být úměrná kvadrátu proudu. Je-li proudová smyčka chápána jako část elektrického obvodu, musí změnu proudu smyčkou doprovázet vznik indukovaného napětí tak, aby dodávaný výkon souhlasil s rychlostí změny energie pole.

Cvičení: Jak vypadají pole \vec{A} , \vec{B} , \vec{E} a Φ v homogenním střídavém magnetickém poli?

Cvičení: Ukažte, že (86) je invariantní v rámci kalibrační volnosti kvazistacionárního přiblížení.

Cvičení: Jak zhruba vypadají pole \vec{A} , \vec{B} , \vec{E} a Φ , když do homogenního střídavého magnetického pole vložíte (hodně dlouhou) spirálu z tenkého vodiče, kterým neprotéká proud a tedy tečné složky elektrického pole (což u tenkého vodiče je jediná složka podélná) jsou nulové? Hledejte jako superpozici původního pole a nového pole Φ' .

Cvičení: Studujte elektrické a magnetické pole v transformátoru. Za nejjednodušší model můžete vzít dva koaxiální ideální dlouhé solenoidy. Jaký význam má použití jádra s $\mu_r \gg 1$? Uvažujte transformátor naprázdno (ten má sekundární obvod rozpojený) a nakrátko (zde lze pro jednoduchost sekundární vinutí považovat za plošný vodič, tedy každý závit zkratovat zvlášť).

Skinový jev

Charakter první z rovnic se ale změní, pokud proud závisí na elektrickém poli. Nejjednodušším a přitom naprosto běžným případem je lineární závislost popsaná Ohmovým zákonem v nepohybujícím se izotropním a homogenním prostředí

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} . \quad (90)$$

Zanedbáme-li volné náboje a tedy položíme $\Phi = 0$, stále je přítomno indukované elektrické pole $-\partial_t \vec{A}$. Jsou-li proudy určeny Ohmovým zákonem dostáváme (v kalibraci $\text{div } \vec{A} = 0$) pro vektorový potenciál rovnici

$$\Delta \vec{A} = +\mu_0 \gamma \partial_t \vec{A}, \quad (91)$$

Rotací této rovnice získáváme rovnici pro difuzi magnetického pole

$$\Delta \vec{B} = +\mu_0 \gamma \partial_t \vec{B}, \quad (92)$$

naprosto stejné povahy. Tyto rovnice v místech, kde $\gamma > 0$ mají charakter evoluční (parabolické) rovnice, zatímco tatáž rovnice v místech s $\gamma = 0$ představuje (eliptickou) Laplaceovu rovnici okamžitého nabývání rovnováhy pole se zdroji. Tento dvojitý charakter lze chápat též tak, že (91) i (92) nepředstavují evoluční rovnice pro magnetické pole, nýbrž pohybové rovnice pro jakousi kapalinu nosičů náboje podléhající Ohmovu zákonu. To nejsnáze uvidíme z časové derivace (91)

$$\Delta \vec{j} = +\mu_0 \gamma \partial_t \vec{j}, \quad (93)$$

kteřá představuje rovnici difuze pole proudové hustoty. Ani v této situaci tedy nemá elektromagnetické pole vlastní dynamické stupně volnosti, ty náleží jen proudovému poli ve vodičích.

Jako nejjednodušší příklad poslouží tenká ($x \in \langle -a, a \rangle$) vodivá destička vložená podélně do magnetického pole $\vec{B} = B_z(x) \vec{e}_z$.

Problém můžeme chápat jako **evoluční úlohu** se zadanou počáteční konfigurací magnetického pole. Předpoklad $\vec{B} = B_z(x) \vec{e}_z$ znamená vně destičky, kde netečou žádné proudy závislost $B_z(x) = \text{konst.}$ Budeme zkoumat situaci, kdy destička je vložena v homogenním magnetickém poli $B_0 \vec{e}_z$, které je náhle vypnuto. V kvazistacionárním přiblížení pole vně destičky po vypnutí proudů (např. v budícím elektromagnetu) okamžitě zmizí a tak za počáteční podmínky vezmeme nulové pole vně a konstantní pole uvnitř (oprávněnost bude diskutována později).

Díky velmi zjednodušené situaci je vnější magnetické pole nulové a uvnitř zbývá splnit jedinou skalární rovnici

$$\Delta B_z(x, t) = +\mu_0 \gamma \partial_t \vec{B}_z(x, t). \quad (94)$$

Při jejím řešení, si povšimneme, že

$$\Delta f_n = \Delta \cos\left(n \frac{\pi}{2a} x\right) = -\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 n^2 \cos\left(n \frac{\pi}{2a} x\right) = -\lambda_n^2 f_n, \quad (95)$$

přičemž tyto funkce byly vybrány proto že, (1) jsou to vlastní funkce Laplaceova operátoru, (2) splňují hraniční podmínku danou nulovým vnějším polem a (3) tvoří úplnou bázi (ve smyslu úplnosti Fourierových řad).

Zbývá rozvinout počáteční data do této báze s pomocí známé Fourierovy řady

$$\cos(t) - \frac{1}{3} \cos(3t) + \frac{1}{5} \cos(5t) - \frac{1}{7} \cos(7t) + \frac{1}{9} \cos(9t) \mp \dots \rightarrow \frac{\pi}{4} \text{sign}(\cos t). \quad (96)$$

Konkrétně

$$B_z(t=0, x) = B_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos\left[(2k+1) \frac{\pi}{2a} x\right] \quad (97)$$

Koeficienty nyní prohlásíme za funkce času,

$$B_z(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) \cos\left[(2k+1) \frac{\pi}{2a} x\right] \quad (98)$$

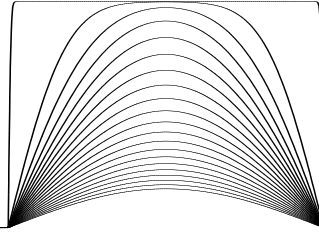
a dosazením do rovnice (94) dostaneme evoluční rovnici pro jednotlivé koeficienty rozvoje

$$-\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 (2k+1)^2 a_k(t) = \mu_0 \gamma \partial_t a_k(t). \quad (99)$$

Řešení této jednoduché lineární rovnice prvního řádu mají charakter

$$a_k(t) = a_k(t=0) e^{-\frac{t}{\tau_k}} \quad \tau_k = \frac{\tau_0}{(2k+1)^2} \quad \tau_0 = \mu_0 \gamma \left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 \quad (100)$$

a popisují disipaci jednotlivých fourierovských složek počátečního magnetického pole. Použití slova disipace je na místě nejen kvůli tomu, že studujeme rovnici difuze, ale též proto, že energie pole se přeměňuje na jouleovské teplo. V souladu s očekáváním, se prodlužuje doba zániku pole s jeho rostoucími rozměry



Obrázek 2. Rozložení podélné složky magnetického pole v tenké vodivé desce v časech $t/\tau_0 = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1.9, 2$ od vypnutí budícího pole.

tělesa. Zde jde o tloušťku vodivé desky, ovšem τ_0 roste s její druhou mocninou a tak u rovnice difuze nelze mluvit o rychlosti šíření informace (o změně pole na kraji desky). Podobně se relaxační doba prodlužuje s rostoucí vodivostí (až na nekonečno u supravodičů).

Nyní jsme odhalili časovou škálu τ_0 , na níž pole uvnitř vodivé destičky zaniká. Pokud zánik budícího pole je mnohem rychlejší, byl předpoklad o počátečních podmínkách difuzní rovnice oprávněný.

Řešení **ve frekvenčním obraze** spočívá v přechodu k harmonickým časovým závislostem. To má smysl jak při teoretických úvahách tak i v praxi. Skrze Fourierovu transformaci lze takto popsat i složitý časový vývoj, zde budeme ale zkoumat situaci, kdy budící pole má harmonický průběh a po odeznění přechodových jevů (to se odehraje na časové škále τ_0) mají harmonický průběh i ostatní veličiny

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}) e^{-i\omega t} . \quad (101)$$

Předpokládáme kvůli symetrii opět jedinou nenulovou komponentu magnetického pole. Pole vně musí být kvůli $\text{rot } \vec{B} = 0$ konstantní

$$\hat{B}_z(\vec{r}) = \hat{B}_0 \quad |x| > a \quad (102)$$

Uvnitř se řídí rovnicí (94), tedy

$$\partial_{xx} \hat{B}_z(x) = -i\omega\mu_0\gamma \hat{B}_z(x) \quad |x| < a . \quad (103)$$

Hledáme tedy sudá řešení rovnice $f'' = -kf$ (naše hraniční podmínky (102) jsou sudé) což jsou funkce $A \cos \sqrt{k}x$ a tedy

$$\hat{B}_z(x) = A \cos \sqrt{i\omega\mu_0\gamma} x . \quad (104)$$

Zavedeme-li reálné číslo δ vztahem

$$\sqrt{i\omega\mu_0\gamma} = \frac{1+i}{\delta} \quad \Rightarrow \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\gamma\mu_0}} . \quad (105)$$

a splníme-li okrajové podmínky, které získáme dosazením $x = \pm a$ do (104), dostáváme

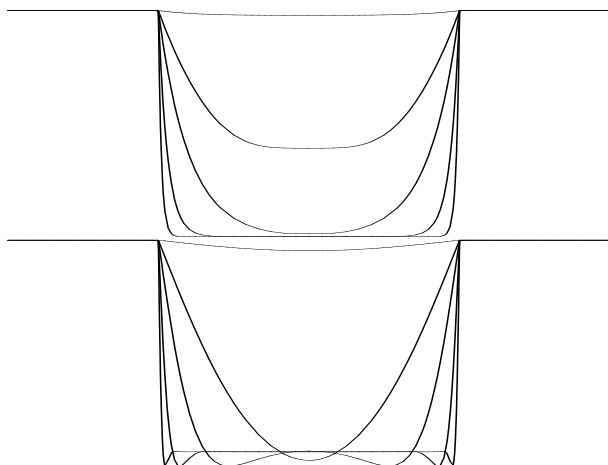
$$\hat{B}_z(x) = B_0 \frac{\cos(1+i)\frac{x}{\delta}}{\cos(1+i)\frac{a}{\delta}} = B_0 \frac{e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i\frac{x}{\delta}} + e^{\frac{x}{\delta}} e^{-i\frac{x}{\delta}}}{e^{-\frac{a}{\delta}} e^{i\frac{a}{\delta}} + e^{\frac{a}{\delta}} e^{-i\frac{a}{\delta}}} = B_0 \frac{e^{\frac{x-a}{\delta}} e^{-i\frac{x-a}{\delta}} + e^{-\frac{x+a}{\delta}} e^{i\frac{x+a}{\delta}}}{1 + e^{-2\frac{a}{\delta}} e^{2i\frac{a}{\delta}}} \quad |x| < a . \quad (106)$$

Uvnitř vodivé desky v okolí pravého okraje $x = a$ dominuje člen $e^{\frac{x-a}{\delta}}$, zatímco u druhého okraje $e^{-\frac{x+a}{\delta}}$. Je vidět, že vnější harmonické pole proniká dovnitř vodiče jen do hloubky $\sim \delta$ a proto se této veličině závislé na frekvenci a vodivosti říká hloubka vniku. Je vidět, že směrem dovnitř vodiče nejen exponenciálně klesá amplituda magnetického pole, ale též se mění fáze. Pokud uvažujeme frekvence, kdy $\delta \gg 2a$, vířivé proudy jen nepatrně mění magnetické pole ve vodiči. Naopak, pro velmi malé hloubky vniku můžeme uvažovat plošné proudy tekoucí jen na povrchu vodičů.

Doposud jsme mluvili o magnetickém poli ve vodiči. Protože stejnou parabolickou rovnicí se řídí i proudová hustota, je proud harmonického průběhu ve vodiči také soustředěn u povrchu. Jako příklad uvažujme vodič ve tvaru válce. Protože vlastní funkce Laplaceova operátoru respektující válcovou symetrii problému je Besselova funkce $J_0(kR)$, splňující $\Delta J_0(kR) = -k^2 J_0(kR)$, po vynásobení vhodnou konstantou, jejíž hodnotu určíme z celkového proudu vodičem, dostáváme pole proudové hustoty

$$\vec{j} = I \frac{1+i}{2\pi a \delta} \frac{J_0\left(\frac{1+i}{\delta} R\right)}{J_1\left(\frac{1+i}{\delta} a\right)} \vec{e}_z \quad (107)$$

odpovídající celkovému proudu I tekoucímu ve válcovém vodiči o poloměru a . Protože pro malá δ platí $J_\nu\left(\frac{z}{\delta}\right) \doteq \sqrt{\frac{2\delta}{\pi z}} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{2}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right)$, proud tekoucí vodičem se soustředí v blízkosti povrchu stejně, jako



Obrázek 3. Efektivní a vybraná okamžitá hodnota podélné složky magnetického pole v tenké vodivé desce při hloubce vniku $\delta/2a = 1, 0.3, 0.1, 0.03, 0.01$.

v jednoduchém příkladě s destičkou. Magnetické pole lze určit přímo z Ampérova zákona s použitím $\int x J_0(x) dx = x J_1(x)$

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \frac{J_1\left[(1+i)\frac{R}{\delta}\right]}{J_1\left[(1+i)\frac{a}{\delta}\right]} \vec{e}_\phi & R < a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{e}_\phi & R > a \end{cases} \quad (108)$$

V obou výše uvedených případech bylo magnetické pole tečné k povrchu vodiče. Takovéto magnetické pole může lokálně vyrušit povrchový proud a skinový jev lze tedy chápat jako lokální jev. Ukazuje se ovšem, že i kolmá složka magnetického pole je z vodiče vytlačována. V tomto případě je vnější pole odstíněno složeným polem proudů tekoucích blízko povrchu vodiče. Jako nejjednodušší model popisující tento jev lze vzít dokonale vodivou kouli. V tomto případě stačí uvažovat nulové pole uvnitř a vně vzít superpozici budícího homogenního magnetického pole a magnetického pole dipólu. Zvolíme-li takový magnetický dipólový moment, jenž vyruší budící pole na obou pólech, zaručí symetrie úlohy splnění podmínky $\text{Div} \vec{B} = 0$ všude na povrchu koule.