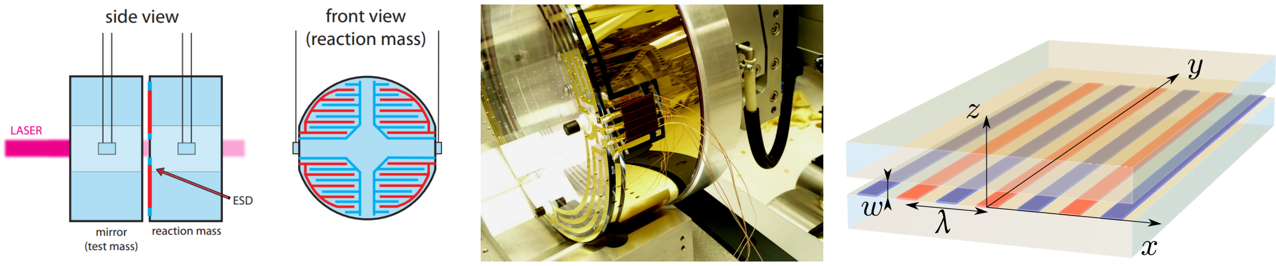
Domácí úloha z Klasické elektrodynamiky

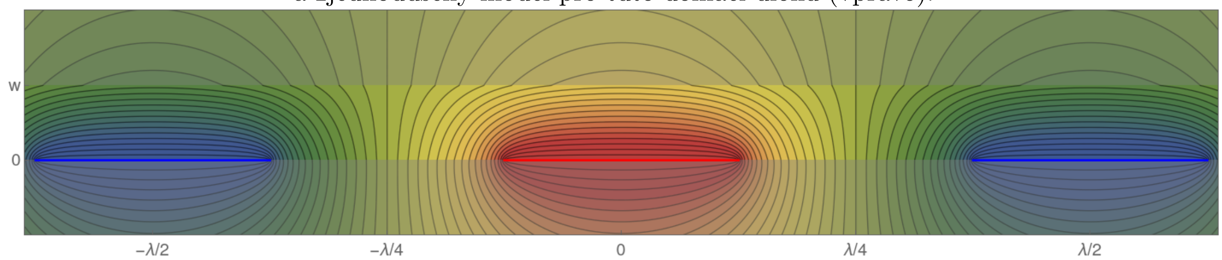
Úvod

V iterferometrických detektorech gravitačních vln je třeba velmi jemně pohybovat zrcadly interferometru. Využívá se elektrostatického působení mezi sadou elektrod a křemenným dielektrikem zrcadla (Obr 1.).

V rámci domácí úlohy nalezněte sílu, jakou působí soustava rovnoběžných páskových elektrod na dielektrický objekt. Problém je zjednodušen do podoby modelu na Obr. 2, kdy plošné páskové elektrody tvoří pravidelně rozložené pruhy nulové výšky (tloušťky) v celé rovině $z = 0$. Kladná a záporná elektroda se nacházejí na potenciálu $\pm U$, jsou široké $\lambda/4$ a stejně široká je i mezera mezi nimi. Pro jednoduchost zvolíme počátek souřadnic na ose kladné elektrody. Dielektrická prostředí jsou zjednodušena do podoby poloprostoru $z \leq 0$ (na jehož hranici jsou umístěny elektrody) a poloprostoru $z > w$ (který představuje zrcadlo). Obě prostředí jsou vyplněna stejným homogenním dielektrikem s relativní permitivitou ϵ_r. Místo celkové síly, která by byla nekonečná, budeme hledat její plošnou hustotu tedy tlak.



Obr. 1. Principiální schéma (vlevo), skutečný tvar elektrod u detektoru Advanced LIGO (uprostřed) a zjednodušený model pro tuto domácí úlohu (vpravo).



Obr. 2. Ekvipotenciály elektrického pole v našem modelu. V dolní části obrázku jsou (v rovině $z = 0$) pravidelně rozmístěny plošné vodivé elektrody uvedené na hodnotu potenciálu $\pm U$ (červená $+U$, modrá $-U$). V hodní ($z > 1/2$) i dolní části ($z < 0$) vidíme pole uvnitř dielektrika s $\epsilon_r > 1$. Zejména na horním rovinném rozhraní se nespojitost elektrického pole projevuje zalomením ekvipotenciál.

Polní rovnice

Vyjdeme z toho, že uvažovaná periodicky uspořádaná nekonečná soustava elektrod budí jednodušší pole, než např. jediná dvojice elektrod. To proto, že periodické funkce lze rozložit do Fourierovy řady. Proto:

1. Nalezněte funkci h tak, aby pro $z \neq 0$ elektrostatický potenciál

$$\Phi(x, z) = [p_k \cos(kx) + q_k \sin(kx)]\, h(|z|)$$

splňoval Laplaceovu rovnici a podmínku $\lim\limits_{z\to\pm\infty} \Phi_k(x, z) = 0$.

> Pro $z \neq 0$ se zjednoduší derivování absolutní hodnoty a vyjde $\Delta[f(x)h(|z|)] = f''h + fh''$. Protože pro daný tvar $f(x)$ máme $f'' = -k^2 f$ dostáváme $\Delta[f(x)h(|z|)] = f(-k^2h + h'') = 0$. Výraz v závorce představuje známou obyčejnou diferenciální rovnici s řešeními $h(|z|) = e^{\pm k|z|}$. Jen jedno z řešení, $h(|z|) = e^{-k|z|}$, splňuje požadované hraniční podmínky.

2. Pokud uvážíte, že $|x|'' = 2\delta(x)$ a že $|x|' = \pm 1$, jaký význam má nábojová hustota spočtená z Poissonovy rovnice pro uvažované Φ ?

Tentokrát musíme vzít vážně chování funkce $|z|$ v nule. Použijeme navrhované rovnosti a dostaneme (opět s použitím $f'' = -k^2 f$)

$$\Delta\left(f(x)e^{-k|z|}\right) = \left(k^2(\mathrm{sgn}^2(z) - 1) - 2k\delta(z)\right) f(x)e^{-k|z|}.$$

Protože $\mathrm{sgn}^2(z) - 1$ je skoro všude nula, je nábojová hustota dána jen členem s δ-funkcí. Ta odpovídá plošné nábojové hustotě rozložené na ploše $z = 0$

$$\sigma(x) = 2\epsilon_0 k f(x) = 2\epsilon_0 k\left[p_k \cos(kx) + q_k \sin(kx)\right].$$

Symetrie

Zkoumejte omezení, jaká pro hodnoty k, p_k, q_k vyplývají ze symetrií

$$T: \quad \Phi(x + n\lambda, z) = \Phi(x, z), \quad n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$
$$P: \quad \Phi(-x, z) = \Phi(x, z), \tag{2}$$
$$C: \quad \Phi(x + \lambda/2, z) = -\Phi(x, z). \tag{3}$$

3. Jaký mají symetrie T, P a C význam? Z kterých tvrzení v zadání jednotlivé symetrie vyplývají?

T — Φ je **periodická** funkce souřadnice x. P — Φ je sudá funkce souřadnice x. Vyplývá to z volby **počátku souřadnic na ose kladné elektrody**. C — kladné a záporné části Φ jsou stejné, protože **kladné i záporné elektrody jsou stejné**, jen posunuté o polovinu λ a s opačným znaménkem potenciálu.

4. Co vyplývá z těchto symetrií pro směr elektrického pole v $x = 0$ a v $x = \lambda/4$?

Derivací (2) dostaneme $-\Phi_x(0, z) = \Phi_x(0, z)$, tedy $E_x(0, z) = -E_x(0, z)$, což znamená, že $E_x(0, z) = 0$, tedy $\vec{E}$ zde míří ve směru z.

Postupnou aplikací T, P, C dostaneme $\Phi(\lambda/4, z) = \Phi(-3\lambda/4, z) = \Phi(3\lambda/4, z) = -\Phi(\lambda/4, z)$, tedy $\Phi(\lambda/4, z) = 0$. Z toho také vyplývá, že $E_z(\lambda/4, z) = 0$, tedy $\vec{E}$ zde míří ve směru x.

5. Jak vypadá nejobecnější řešení $\Phi_k(x, z)$ splňující všechny tyto symetrie?

Symetrie T určuje, že $k = 2\pi n/\lambda$, kde $n \in \mathbb{N}_0$. Symetrie P dává $q_k = 0$. Symetrie C pak, omezí $k = 2\pi(2n - 1)/\lambda$, kde $n \in \mathbb{N}$.

6. Jak vypadá množina $\mathcal{K}$ tvořená všemi přípustnými hodnotami k tak, aby Φ_k byly navzájem lineárně nezávislé funkce? Zvolte bázi řešení $\Psi_k(x, z)$ tak, aby bylo možno pro superpozici používat zápis ve tvaru součtu

$$\tilde{\Phi}(x, z) = \sum_{k_i \in \mathcal{K},\, i \in \mathbb{N}} a_k \Psi_{k_i}(x, z), \tag{4}$$

tedy, že lze přípustné hodnoty k očíslovat celými čísly $i = 1, 2, ...$ a tedy psát k_i.

Množinu přípustných hodnot k jsme nalezli výše

$$\mathcal{K} = \{k_i = 2\pi(2i - 1)/\lambda\ ,\ i \in \mathbb{N}\}.$$

Nezávislost funkcí vyžaduje uvažovat jen kladná i. Funkce Ψ_i mají tedy tvar

$$\Psi_i(x, z) = \cos\left(k_i x\right) e^{-k_i|z|}$$

Rozhraní prostředí

Uvažovaný problém znamená řešit rovnici $\Delta\Phi = 0$ ve třech oblastech $a = 1, 2, 3$ odpovídajících $\Omega_1 : \{\vec{x} \mid z < 0\}, \Omega_2 : \{\vec{x} \mid 0 < z < w\}$ a $\Omega_3 : \{\vec{x} \mid z > w\}$, kde na rozhraních je potřeba splnit podmínky

$$\vec{n} \times \left[\vec{E}\right] = 0, \quad \vec{n} \cdot \left[\vec{D}\right] = 0,$$

kde $\vec{D}^{(a)} = \epsilon_0 \epsilon_r^{(a)} \vec{E}^{(a)}$. Vlastnosti prostředí jsou $\epsilon_r^{(1)} = \epsilon_r^{(3)} = \epsilon_r$ a $\epsilon_r^{(2)} = 1$. Používáme označení pro nespojitost pole $[\vec{E}] = \lim_{\epsilon\to 0} \vec{E}(\vec{x}_0 + \epsilon\vec{n}) - \vec{E}(\vec{x}_0 - \epsilon\vec{n})$ v bodě $\vec{x}_0$ ležícím na rozhraní ve směru normály $\vec{n}$ k tomuto rozhraní.

Kvůli existenci dvou význačných ploch $z = 0$ a $z = w$ budeme od teď předpokládat, že elektrostatický potenciál vznikne superpozicí polí zdrojů na rovinách $z = 0$ a $z = w$ a má tak tvar

$$\Phi(x, z) = \sum_{k_i \in \mathcal{K},\, i\in\mathbb{N}} a_i \Psi_{k_i}(x, z) + \sum_{k_i \in \mathcal{K},\, i\in\mathbb{N}} b_i \Psi_{k_i}(x, z - w). \tag{5}$$

Pro pohodlí si tuto rovnici přepíšeme za po užití nalezeného tvaru Ψ

$$\Phi(x, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(a_i e^{-k_i|z|} + b_i e^{-k_i|z-w|}\right) \cos(k_i\, x) \tag{6}$$

7. Jaká rovnice R_1 pro potenciál $\Phi(x, z)$ platí v místech, kde jsou elektrody?

Jako obvykle přítomnost elektrod v elektrostatice znamená hraniční podmínku pro potenciál. Zde tedy

$$\Phi(x, z = 0) = \pm U, \quad x \in \langle -\tfrac{1}{8}\lambda + [n + \tfrac{1}{4}(1 \mp 1)]\lambda, \tfrac{1}{8}\lambda + [n + \tfrac{1}{4}(1 \mp 1)]\lambda\rangle, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Protože naše bázové funkce již splňují požadované symetrie, stačí tuto podmínku vyžadovat jen na jedné elektrodě

$$\Phi(x, z = 0) = U, \quad x \in \langle -\tfrac{1}{8}\lambda, \tfrac{1}{8}\lambda\rangle.$$

tedy po dosazní do (6)

$$R_1 : \qquad \sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i e^{-k_i w}) \cos(k_i x) = U, \quad x \in \langle -\tfrac{1}{8}\lambda, \tfrac{1}{8}\lambda\rangle.$$

8. Jaká rovnice R_2 pro potenciál $\Phi(x, z)$ vyplývá z podmínek na rozhraní $z = 0$ v místech, kde nejsou elektrody?

V těchto místech nejsou volné náboje, takže příslušná rovnice je $\vec{e}_z \cdot [\vec{D}] = 0$ v rovině $z = 0$. Povšimněme si že rovnice $\vec{n} \times [\vec{E}] = 0$ je splněna v důsledku spojitosti potenciálu na obou rozhraních. Potenciál je pak spojitý proto, že všechny v něm se objevující funke včetně $|z|$ jsou spojité. Zderivujeme (6) a dostaneme

$$E_z(x, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(a_i \operatorname{sgn}(z)\, e^{-k_i|z|} + b_i \operatorname{sgn}(z - w)\, e^{-k_i|z-w|}\right) k_i \cos(k_i\, x). \tag{7}$$

Dále

$$\vec{n} \cdot [\vec{D}] = D_z(x, z = 0^+) - D_z(x, z = 0^-) = \epsilon_0 E_z(x, z = 0^+) - \epsilon_0 \epsilon_r E_z(x, z = 0^-),$$

$$E_z(x, z = 0^\pm) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\pm a_i\ - b_i\ e^{-k_i w}\right) k_i \cos(k_i\, x).$$

tedy

$$R_2: \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \left[(1+\epsilon_r)a_i \; + (\epsilon_r - 1)b_i\, e^{-k_i w}\right] k_i \cos(k_i\, x) = 0, \quad x \in \langle \tfrac{1}{8}\lambda, \tfrac{3}{8}\lambda\rangle.$$

9. Jaká rovnice R_3 pro potenciál $\Phi(x,z)$ vyplývá z podmínek na rozhraní $z = w$?

Vyjdeme z rovnice (7) a spočteme $\vec{e}_z \cdot [\vec{D}] = 0$ v rovině $z = w$:

$$\vec{n} \cdot [\vec{D}] = D_z(x, z = w^+) - D_z(x, z = w^-) = \epsilon_0 \epsilon_r E_z(x, z = w^+) - \epsilon_0 E_z(x, z = w^-),$$

$$E_z(x, z = w^{\pm}) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(e^{-k_i w} a_i \; \pm b_i\,\right) k_i \cos(k_i\, x). \tag{8}$$

tedy

$$R_3: \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \left[(\epsilon_r - 1)a_i\, e^{-k_i w} + (\epsilon_r + 1)b_i\right] k_i \cos(k_i\, x) = 0, \quad x \in \langle -\tfrac{1}{2}\lambda, \tfrac{1}{2}\lambda\rangle.$$

10. Jaké řešení má rovnice R_3, má-li být splněna podél celého rozhraní $z = w$, pokud za neznámé považujeme koeficienty b_i?

Protože funkce $\cos(k_i\, x)$, pokud R_3 platí pro všechna x, z $\langle -\frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{2}\lambda\rangle$ jsou navzájem nezávislé, musí být každý z koeficientů Fourierovy řady R_3 rovný nule. Proto

$$b_i = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1}\, e^{-k_i w}\, a_i. \tag{9}$$

Znaménko minus před výrazem znamená, že indukovaná vázaná nábojová hustota má opačné znaménko, než náboje na *protější* elektrodě. To v důsledku dá přitažlivou sílu mezi objekty.

Pozn. Rovnice R_1 a R_2 neplatí pro všechna x a proto příslušné závorky nejsou nulové. Jinak řečeno, zatímco R_3 představuje Fourierovu řadu pro identicky nulovou funkci a ta má tedy nulové koeficienty, rovnice R_1 a R_2 přestavují Fourierovu řadu pro funkce, které jsou nulové jen na jistých intervalech. Takové funkce pak mají (až na výjimku identicky nulové funkce) netriviální koeficienty.

Síla

11. Spočtěte plošnou hustotu z-složky síly (tlak), kterou působí elektrické pole na (vázané) náboje v rovině $z = w$. Jaká je tato hodnota $\bar{p}$ po zprůměrování přes periodu $x \in (0, \lambda)$? Jaká je výsledná síla působení nábojů v rovině $z = w$ na tytéž náboje? Lze to zdůvodnit nějakou symetrií ve vztazích pro jejich elektrické pole?

Z přednášky víme, že plošná síla v místě nespojitého pole se počítá podle vztahu

$$\vec{f}_{\text{ploš}} = \sigma\{\vec{E}\}, \quad \text{kde} \quad \{\vec{E}\} \equiv \frac{1}{2}\left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right).$$

Plošnou hustotu vázaného náboje σ na rozhraní $z = w$ a průměrnou hodnotu $\{\vec{E}\}$ tamtéž spočteme s použitím (8)

$$\sigma = \epsilon_0\, \vec{n} \cdot [\vec{E}] = \epsilon_0 \sum_{i=1}^{\infty} 2b_i\; k_i \cos(k_i\, x)$$

$$\{E_z\} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i k_i e^{-k_i w} \cos(k_i\, x)$$

Výsledná f_z je součinem těchto dvou funkcí. Středování nám vztah zjednoduší, protože

(všechna $k_i \neq 0$)

$$\overline{\cos(k_i\,x)\cos(k_j\,x)} = \begin{cases} \frac{1}{2} & i = j \\ \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

a tedy

$$\overline{p} = \epsilon_0 \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i\; k_i^2 e^{-k_i w} = -\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2\; k_i^2 e^{-2k_i w}$$

Otázka na působení indukované plošné nábojové hustoty na sebe samu měla zejména motivovat ke kontrole, zda náhodou ve výsledném vztahu v důsledku chybných úprav nezbyl příslušný člen úměrný kvadrátu b_i.

Intenzitu zapříčiněnou koeficienty b_i označíme $\vec{E}^{(\sigma)}$ a sílu, jíž tato část elektrického pole působí na plošný náboj v $z = w$, který ji způsobuje, pak $\vec{f}^{(\sigma)}$. Složka plošné hustoty síly $f_z = \sigma E_z^{\sigma}$ vymizí, protože $\{E_z^{(\sigma)}\} = 0$. To proto, že průměr $\{\mathrm{sign}(z - w)\} = 0$. Složka síly $f_x^{(\sigma)} = \sigma\{E_x^{(\sigma)}\}$ ovšem vyjde nula až po vystředování, v důsledku toho, že $\overline{\cos(k_i\,x)\sin(k_j\,x)} = 0$. Protože se zadání ptá na složku f_z, nebylo to potřeba uvažovat při určování $\overline{p}$.

Přibližné řešení

Za neznámé nyní uvažujte pouze hodnoty a_1 a b_1, ostatní zanedbejte (položte rovny nule).

12. Spočtěte $a_1, b_1, \bar{p}$ pokud budete požadovat splnění R_1 v $x = z = 0$ a R_3 v $x = 0, z = w$.

Nejprve vyčíslíme

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Hodnotu b_1 získáme ze vztahu (9), který představuje řešení rovnice R_3 pro libovolné x,

$$b_1 = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1}\, e^{-k_1 w}\, a_1.$$

Rovnice R_1 pak v našem zjednodušeném problému má tvar

$$(a_1 + b_1 e^{-k_i w}) = a_1 \left(1 - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1}\, e^{-2k_1 w}\right) = U.$$

Odsud

$$a_1 = U \left(1 - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1}\, e^{-2k_1 w}\right)^{-1}, \quad b_1 = -U \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1}\, e^{-k_1 w} \left(1 - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1}\, e^{-2k_1 w}\right)^{-1},$$

$$\overline{p} = -\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} U^2 \left(1 - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1}\, e^{-2k_1 w}\right)^{-2} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 e^{-2k_1 w}, \qquad 2k_1 w = \frac{4\pi w}{\lambda}.$$