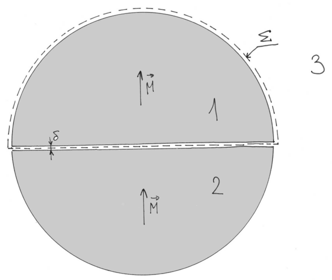
Řešení 2. domácí úlohy z Klasické elektrodynamiky

Spočtěte sílu, jíž se přitahují dvě souosé polokoule vyrobené z materiálu s konstatní magnetizací $\vec{M} = M\vec{e}_z$. Nejprve za předpokladu, že se svými podstavami dotýkají a dohromady vytvářejí kouli o poloměru a, později i v situaci, kdy je mezi podstavami větší vzduchá mezera.



Ilustrace k bodům 1 - 3. Dva těsně přiléhající polokulové permanentní magnety se shodnou magnetizací. Pro účel výkladu k bodu 2 je též znázorněna velmi malá vzduchová mezera δ mezi nimi.

1) Za předpokladu, že magnetické pole je homogenní uvnitř obou magnetů 1 a 2

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_2 \;=\; B_0\vec{e}_z \;=\; B_0\left(\cos\theta\ \vec{e}_r - \sin\theta\ \vec{e}_\theta\right)$$

a dipólové vně (v oblasti 3)

$$\vec{B}_3 \;=\; B_0\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(\cos\theta\ \vec{e}_r + \frac{1}{2}\sin\theta\ \vec{e}_\theta\right)$$

ukažte, že pro $\delta = 0$ a jistou hodnotu B_0 lze na rozhraní $r = a$ dosáhnout spojitosti příslušných složek magnetické indukce $\vec{B}$ a intenzity

$$\vec{H} = \mu_0^{-1}\vec{B} - \vec{M}\ .$$

Jaká hodnota B_0 odpovídá dané magnetizaci M?

Podmínky na rozhraní jsou jednak spojitost normálových složek $\vec{B}$

$$\vec{n}\cdot[\vec{B}] = B_{r\,3} - B_{r\,1,2} = 0,$$

a pak tečných složek $\vec{H}$

$$\vec{n}\times[\vec{H}] \implies H_{\theta\,3} - H_{\theta\,1,2} = 0$$

První je automaticky splněna (protože $a/r = 1$ na rozhraní), ze druhé dostáváme

$$\mu_0^{-1}B_{\theta\,1,2} - M_\theta = \mu_0^{-1}B_{\theta\,3}$$

$$\left(B_0 - \mu_0 M\right)\left(-\sin\theta\right) = B_0\frac{1}{2}\sin\theta.$$

Tak ze spojitosti H_θ dostáváme magnetickou indukci uvnitř koule

$$B_0 = \frac{2}{3}\mu_0 M.$$

2) Použijte dimenzinální argumenty a určete exponenty p, q ve vztahu pro sílu $F_z = \kappa\,\mu_0\,a^p\,M^q$, kde κ je bezrozměrná konstanta.

Obecný postup spočívá v dosazení SI jednotek $[F] = \mathrm{kg.m.s^{-2}}$, $[\mu_0] = \mathrm{kg.m.s^{-2}.A^{-2}}$ a $[M] = \mathrm{A.m^{-1}}$, čímž dostaneme rovnici

$$\mathrm{kg.m.s^{-2}} = \mathrm{kg.m^{1+p-q}.s^{-2}.A^{-2+q}},$$

s řešením $p = q = 2$.

Pokud nemáme po ruce tabulky, můžeme s použimím $W_{\rm mag} = \int w_{\rm mag} dx^3 = \int \frac{1}{2}\mu_0 H^2 d^3x$ získat $[\mu_0] = [w_{\rm mag}]/[H^2]$.

Středoškolská metoda určení „síly magnetu" předpokládá, že téměř veškerá energie pole sídlí ve vzduchové mezeře δ mezi magnety, kde lze pro velmi malé δ magnetické pole určit ze zachování magnetického toku. Derivace této energie podle δ dá pak sílu. Určete, jak velká je síla spočtená touto metodou. Uveďte, jaká hodnota bezrozměrné konstanty κ_2 jí odpovídá.

Využijeme spojitost B_z v mezeře mezi magnety, fakt, že ve vzduchu bereme přibližně $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ a energii odhadneme jako

$$W_{\rm mag} = \int \frac{1}{2}\mu_0 |\vec{H}|^2 d^3x \doteq \frac{1}{2}\mu_0 H_z^2 \pi a^2 \epsilon$$

Po dosazení $H_z = \frac{2}{3}M$ do $F_z = -dW_{\rm mag}/d\epsilon$ tak dostaneme

$$\kappa_2 = -\frac{2}{9}\pi.$$

Znaménko jsme vybrali tak, abychom se připravili na další úkoly, kde se mluví o síle na vrchní polokouli. Na spodní polokouli působí síla v kladném směru osy z.

3) Obklopte horní magnet plochou Σ a spočtěte tok Maxwellova tenzoru T_{ij} touto plochou. Protože Σ celá leží mimo magnet, platí v místech integrace lineární vztah $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$. Označíme-li $d\vec{S} = \vec{n}\, dS$ je příspěvek k toku

$$d\vec{F} \;=\; dS_i T_{ij} \vec{e}_j \;=\; \left[\vec{H}(\vec{B}.\vec{n}) - \frac{1}{2}\vec{n}(\vec{B}.\vec{H}) \right] dS$$

Nalezněte složku síly rovnoběžnou s $\vec{M}$

$$F_z \;=\; \vec{e}_z . \oint_\Sigma d\vec{F} \;,$$

uveďte zvlášť, jaký je tok podstavou a polosférou, jež tvoří Σ. Jaká hodnota bezrozměrné konstanty κ_3 jí odpovídá?

Zadání požaduje spočíst dva plošné integrály. První $F_z^{(1-2)}$ ve vzduchové mezeře mezi magnety 1, 2, kde $\vec{n} = -\vec{e}_z$ vyžaduje dosadit

$$n_z \vec{B}.\vec{H} = -\mu_0 H_z^2, \quad H_z(\vec{B}.\vec{n}) = -\mu_0 H_z^2, \quad H_z = \frac{2}{3} M_z$$

a tedy

$$F_z^{(1-2)} = \int \left(-\mu_0 H_z^2 + \frac{1}{2}(-\mu_0 H_z^2) \right) dS = -\frac{1}{2}\mu_0 H_z^2 (\pi a^2) = -\frac{2}{9}\pi \mu_0 M^2 a^2.$$

Získali jsme tedy stejný výsledek jako v bodě 2, přičelmž záporné znaménko říká, že na horní magnet působí síla směrem dolů.

Druhý integrál $F_z^{(1-3)}$ vně polo-sféry mezi magnetem 1 a okolím 3, kde $\vec{n} = \vec{e}_r$ vyžaduje dosadit $\vec{e}_z.\vec{e}_r = \cos\theta$, $\quad \vec{e}_z.\vec{e}_\theta = -\sin\theta$,

$$\vec{B}.\vec{H} = \mu_0^{-1} B_0^2 \left(\cos^2\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta \right), \quad \vec{B}.\vec{n} = B_r, \quad B_z = B_0(\cos^2\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta)$$

$$n_z \vec{B}.\vec{H} = \cos\theta \mu_0^{-1} \left(\cos^2\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta \right) B_0^2, \quad H_z(\vec{B}.\vec{n}) = \mu_0^{-1} B_0(\cos^2\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta)(B_0\cos\theta).$$

Díky axiální symetrii můžeme položit $dS = 2\pi a^2 \sin\theta d\theta$, použít substituci $\cos\theta$ a psát

$$F_z^{(1-3)} = \mu_0^{-1} B_0^2 \int \left[(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(\frac{3}{4}\cos^2\theta + \frac{1}{4}) \right] \cos\theta dS =$$

$$= 2\pi a^2 \mu_0^{-1} B_0^2 \int_0^1 \left[\frac{9}{8}c^3 - \frac{5}{8}c \right] dc = -\frac{1}{16}\pi a^2 \mu_0^{-1} B_0^2.$$

S použitím $B_0 = \frac{2}{3}\mu_0 M$ tak vyjde

$$F_z^{(1-3)} = -\frac{1}{36}\pi a^2 \mu_0 M^2$$

a sečtením faktorů $-2/9$ a $-1/36$ dostaneme

$$F_z = -\frac{1}{4}\pi a^2 \mu_0 M^2,$$

tedy

$$\kappa_3 = -\frac{1}{4}\pi.$$

4) Ukažte, že v místech, kde tečou plošné proudy, a kde tedy je magnetické pole nespojité, platí pro plošnou sílu vztah $\vec{f}_{\text{ploš}} = \vec{j}_{\text{ploš}} \times \{\vec{B}\}$, kde $\{\vec{B}\} = \frac{1}{2}(\vec{B}_1 + \vec{B}_2)$ je průměr polí z obou stran. Intuitivně je faktor $\frac{1}{2}$ dán plochou lichoběžníka jenž tvoří profil objemové hustoty síly, která vznikne zespojitěním při uvážení konečné tloušťky plošného proudu s konstantním profilem proudové hustoty. Nalézněte přesný důkaz spočtením toku Maxwellova tenzoru přes uzavřenou plochu tvaru velmi nízkého válce těsně obklopujícího malou plošku rozhraní. Dokažte klíčový vztah

$$H_{2i}B_{2j} - H_{1i}B_{1j} = [H_i]\{B_j\} + \{H_i\}[B_j]$$

a poté při vědomí opačné orientaci podstav válce a za užití vztahu pro dvojný vektorový součin dokažte, že $\vec{f}_{\text{ploš}} = \vec{j}_{\text{ploš}} \times \{\vec{B}\}$.

Začneme dosazením do

$$2[H_i]\{B_j\} + 2\{H_i\}[B_j] = (H_{2i} - H_{1i})(B_{2j} + B_{1j}) + (H_{2i} + H_{1i})(B_{2j} - B_{1j}) =$$

$$= 2H_{2i}B_{2j} - 2H_{1i}B_{1j} + H_{2i}B_{1j} - H_{2i}B_{1j} - H_{1i}B_{2j} + H_{1i}B_{2j} = 2H_{2i}B_{2j} - 2H_{1i}B_{1j}$$

V dalším kroku spočteme sílu vyvěrající z plochy rozhraní těsně obklopené plochami $\vec{dS}_{12} = \pm\vec{n}dS$ (tedy $\vec{n} = \vec{n}_2 = -\vec{n}_1$)

$$dF_j = dS_i T_{ij} = \left(H_{2j}(B_{2i}n_{2i}) - \frac{1}{2}n_{2j}(B_{2i}H_{2i}) \right) dS + \left(H_{1j}(B_{1i}n_{1i}) - \frac{1}{2}n_{1j}(B_{1i}H_{1i}) \right) dS$$

$$= [H_j]\{B_i\}n_i + \{H_j\}[B_i]n_i - \frac{1}{2}n_j(\{B_i\}[H_i]) - \frac{1}{2}n_j([B_i]\{H_i\}).$$

Z opačného konce dostaneme

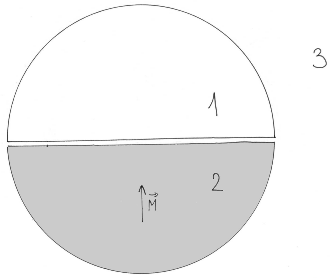
$$dF_j = \epsilon_{jkl}\left(\epsilon_{kim} n_i [H_m]\{B_l\}\right) = \left(\delta_{jm}\delta_{li} - \delta_{ji}\delta_{ml}\right) n_i [H_m]\{B_l\} = n_i[H_j]\{B_i\} - n_j[H_i]\{B_i\}$$

Po uvážení, že $[B_i]n_i = \vec{n}\cdot[\vec{B}] = 0$ je dáno plošnou variantou rovnice $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ vidíme, že oba výrazy se budou shodovat, pokud bude

$$\{B_i\}[H_i] = [B_i]\{H_i\},$$

tedy zejména pokud v obou prostředích platit stejná lineární úměra mezi $\vec{B}$ a $\vec{H}$, například ve vakuu, kde $\vec{M} = 0$ a $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ a tedy $\{B_i\}[H_i] = [B_i]\{H_i\} = \mu_0 [H_i]\{H_i\}$. To souvisí s tím, že i na vázané proudy působí Lorentzova síla.

5) Uvažujte, že magnet 1 je místo objemové magnetizace magnetický v důsledku existence povrchových plošných proudů $\vec{j}_{\text{ploš}} = \vec{n} \times [\vec{M}]$ daných nespojitostí magnetizace $\vec{M}$ na povrchu magnetu, kde uvažujeme pole jednotkových normál $\vec{n}$. Určete tyto proudy na podstavě a polosféře, jež tvoří povrch magnetu. Jaká je v tomto případě magnetická intenzita $\vec{H}_1$?



Ilustrace k bodům 5 a 6: Dva těsně přiléhající polokulové permanentní magnety se shodnou magnetizací, přičemž vrchní je místo magnetizace tvořen povrchovými proudy.

Hledáme tedy proudové pole, které stojí za nespojitosmi tečných složek $\vec{H}$. Protože na podstavě jsou tečné složky $\vec{H}$ nulové, proudy $\vec{j}_{\text{ploš}}$ jsou přítomné jen jen na sféře $r = a$ (kde $\vec{n} = \vec{e}_r$ je pole vnějších normál),

$$\vec{j}_{\text{ploš}} = \mu_0^{-1} \vec{n} \times (\vec{B}_3 - \vec{B}_1) = \mu_0^{-1} B_0 \vec{e}_r \times (\frac{1}{2} \sin\theta - (-\sin\theta))\vec{e}_\theta = \frac{3}{2} \mu_0^{-1} B_0 \sin\theta \vec{e}_\phi = M \sin\theta \vec{e}_\phi.$$

Pokud použijeme vztah $\vec{j}_{\text{ploš}} = \vec{n} \times [\vec{M}]$ navržený v zadání vyjde (pro magnetizaci vně a uvnitř bereme $M_3 = 0, M_1 = M$)

$$\vec{j}_{\text{ploš}} = \vec{n} \times [\vec{M}] = \vec{e}_r \times (-M\vec{e}_z) = M \sin\theta \vec{e}_\phi$$

s použitím rozkladu $\vec{e}_r = \cos\theta \vec{e}_z + \sin\theta \vec{e}_R$ ve válcových souřadnicích, kde je také $\vec{e}_R \times \vec{e}_z = -\vec{e}_\phi$.

6) Spočtěte sílu

$$\vec{F} \;=\; \int \vec{j}_{\text{ploš}} \times \{\vec{B}\} dS \;,$$

jíž působí magnetické pole na tyto povrchové proudy. Jaká hodnota bezrozměrné konstanty κ_6 jí odpovídá?

Nejprve spočteme průměrnou hodnotu

$$\{\vec{B}\} = \frac{1}{2}(\vec{B}_1 + \vec{B}_3) = B_0 \left(\cos\theta\ \vec{e}_r - \frac{1}{4} \sin\theta\ \vec{e}_\theta\right)$$

Dále ověříme, že kartézské složky F_x, F_y jsou nulové protože

$$\vec{e}_x \cdot \int \vec{e}_\phi \times \cos\theta \vec{e}_r\ dS = \int ...\, d\theta \int_0^{2\pi} \cos\phi\, d\phi = 0$$

a podobně pro další tři integrály

$$\vec{e}_x \cdot \int \vec{e}_\phi \times \sin\theta \vec{e}_\theta\ dS, \vec{e}_y \cdot \int \vec{e}_\phi \times \cos\theta \vec{e}_r\ dS, \vec{e}_y \cdot \int \vec{e}_\phi \times \sin\theta \vec{e}_\theta\ dS.$$

Proto

$$F_z = \vec{e}_z \cdot \int M \sin\theta \vec{e}_\phi \times B_0 \left(\cos\theta \ \vec{e}_r - \frac{1}{4} \sin\theta \ \vec{e}_\theta \right) dS$$
$$= \int M \sin\theta B_0 \left(\cos\theta \ \vec{e}_z \cdot (\vec{e}_\phi \times \vec{e}_r) - \frac{1}{4} \sin\theta \ \vec{e}_z \cdot (\vec{e}_\phi \times \vec{e}_\theta) \right) dS.$$

Po dosazení $\vec{e}_z \cdot (\vec{e}_\phi \times \vec{e}_r) = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_\theta = -\sin\theta$ a $\vec{e}_z \cdot (\vec{e}_\phi \times \vec{e}_\theta) = \vec{e}_z \cdot (-\vec{e}_r) = -\cos\theta$

$$F_z = MB_0 2\pi a^2 \int \sin\theta B_0 \left(-\frac{3}{4} \sin\theta \ \cos\theta \right) \sin\theta \, d\theta = -\frac{3}{4} MB_0 2\pi a^2 \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \pi \mu_0 a^2 M^2.$$

To potvrzuje, že jsme v bodě 3 neudělali chybu a že

$$\kappa_6 = -\frac{1}{4}\pi.$$

7) Nalezněte přesný vztah určující sílu mezi polokoulemi pro libovoně velké δ. Spočtěte příslušný bezrozměrný faktor $\kappa_7(\delta/a)$ numericky pro $\delta = 3a$ a $\delta = 10a$. (Inspirace: Jupyter, Mathematica)

Protože jsme v bodě 5 nalezli plošné proudové pole reprezentující magnetizační proudy na severní polokouli, použijeme tetntýž výsledek i pro polokouli jižní a silové působení spočteme jako (viz přednáška)

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \ \vec{j}_{\text{ploš}} \cdot \vec{j}'_{\text{ploš}} \, dS \, dS'$$

Počítáme samozřejmě jen z-složku síly, takže dosadíme

$$z - z' = a(\delta + \cos\theta - \cos\theta').$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = a^3 \left[(\sin\theta\cos\phi - \sin\theta'\cos\phi')^2 + (\sin\theta\sin\phi - \sin\theta'\sin\phi')^2 + (\delta + \cos\theta - \cos\theta')^2 \right]^{3/2}$$

Tento výraz jde zjednodušit zavedením $\psi = \phi - \phi'$

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = (\sqrt{2}a)^3 \left(1 + \frac{1}{2}\delta^2 + \delta(\cos\theta - \cos\theta') - \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\cos\psi \right)^{3/2}$$

Součin proudových hustot dá

$$\vec{j}_{\text{ploš}} \cdot \vec{j}'_{\text{ploš}} = M^2 \sin\theta \ \sin\theta' \ \vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_{\phi'} = M^2 \sin\theta \ \sin\theta' \ \cos\psi$$

a čtyřrozměná integrace se zavedením ψ zjednodušila na

$$dS \, dS' = 2\pi a^4 \sin\theta \ \sin\theta' \, d\theta \, d\theta' \, d\psi.$$

Odsud vyjde vytknutím příslušných faktorů

$$\kappa_7 = \frac{-1}{4\sqrt{2}} \int \frac{(\delta + \cos\theta - \cos\theta') \left(\sin\theta \ \sin\theta' \ \cos\psi \right) \sin\theta \ \sin\theta'}{\left(1 + \frac{1}{2}\delta^2 + \delta(\cos\theta - \cos\theta') - \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\cos\psi \right)^{3/2}} \, d\theta \, d\theta' \, d\psi,$$

kde $\psi \in (0, 2\pi), \ \theta \in (0, \pi/2), \ \theta' \in (\pi/2, \pi)$.

Bylo by náročné numerickou integrací ověřovat $\lim_{\delta \to 0} \kappa_7 = \pi/4$, proto se v následujícím bodě zaměříme jen na numerický výpočet pro větší δ.

8) Jak moc (vyjádřeno v procentech) se liší síla pro $\delta = 3a$ a $\delta = 10a$ podle 7) od síly mezi dvěma bodovými dipóly?

Sílu mezi dvěma souosými dipóly spočteme snadno z pole dipólu

$$B_{\mathrm{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{m}(\vec{r} \cdot \vec{r})}{r^5}$$

a síly kterou toto pole působí na jiný dipól

$$\vec{F} = (\vec{m}^{(1)} \cdot \nabla)\vec{B}^{(2)}_{\mathrm{dip}} \implies F_z = \frac{\mu_0}{4\pi} m_z^{(1)} m_z^{(2)} \frac{d}{dz} \frac{2}{z^3}\bigg|_{z=d}$$

Za dipólový moment dosadíme součin magnetizace M a objemu polokoule $2/3\pi a^3$ a dostaneme

$$F_z = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{2\pi a^3 M}{3}\right)^2 \frac{6}{z^4}\bigg|_{z=d} = \left[-\frac{2\pi}{3}\left(\frac{d}{a}\right)^{-4}\right] \mu_0 a^2 M^2,$$

kde výraz v hranatých závorkách představuje odhad κ_8 v situaci, kdy $\delta \gg a$. Stojí si za to uvědomit, že lepším přiblížením než je $d = \delta$ je $d = \delta + 2(2a/5)$, protože $(2a/5)$ je vzdálenost těžiště polokoule od základny. Tuto lepší aproximaci označíme $\tilde{\kappa}_8$. V následující tabulce vidíme, že její chyba je pro $\delta/a = 10$ menší než 1%.

δ/a	$-\kappa_7$	$-\kappa_8$	$-\tilde{\kappa}_8$	δ_8	$\widetilde{\delta}_8$
3	0.008559	0.0259	0.0100	67-200%	15-17%
10	0.000153	0.000209	0.000154	27-37%	0.7%