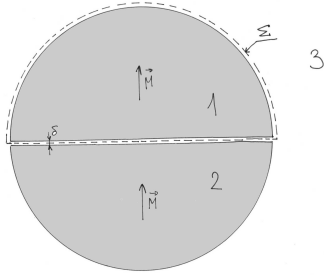


Zadání 2. domácí úlohy z Klasické elektrodynamiky

Spočtete sílu, jíž se přitahují dvě sousední polokoule vyrobené z materiálu s konstantní magnetizací $\vec{M} = M\vec{e}_z$. Nejprve za předpokladu, že se svými podstavami dotýkají a dohromady vytvářejí kouli o poloměru a , později i v situaci, kdy je mezi podstavami větší vzduchá mezera.



Ilustrace k bodům 1 - 3. Dva těsně přiléhající polokulové permanentní magnety se shodnou magnetizací. Pro účel výkladu k bodu 2 je též znázorněna velmi malá vzduchová mezera δ mezi nimi.

1) Za předpokladu, že magnetické pole je homogenní uvnitř obou magnetů 1 a 2

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_2 = B_0\vec{e}_z = B_0(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$$

a dipólové vně (v oblasti 3)

$$\vec{B}_3 = B_0\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(\cos\theta\vec{e}_r + \frac{1}{2}\sin\theta\vec{e}_\theta\right)$$

ukážete, že pro $\delta = 0$ a jistou hodnotu B_0 lze na rozhraní $r = a$ dosáhnout spojitosti příslušných složek magnetické indukce \vec{B} a intenzity

$$\vec{H} = \mu_0^{-1}\vec{B} - \vec{M}.$$

Jaká hodnota B_0 odpovídá dané magnetizaci M ?

2) Použijte dimenzionální argumenty a určete exponenty p, q ve vztahu pro sílu $F_z = \kappa\mu_0 a^p M^q$, kde κ je bezrozměrná konstanta.

Středoškolská metoda určení „síly magnetu“ předpokládá, že téměř veškerá energie pole sídlí ve vzduchové mezeře δ mezi magnety, kde lze pro velmi malé δ magnetické pole určit ze zachování magnetického toku. Derivace této energie podle δ dá pak sílu. Určete, jak velká je síla spočtená touto metodou. Uveďte, jaká hodnota bezrozměrné konstanty κ_2 jí odpovídá.

3) Obklopte horní magnet plochou Σ a spočtete tok Maxwellova tenzoru T_{ij} touto plochou. Protože Σ celá leží mimo magnet, platí v místech integrace lineární vztah $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$. Označíme-li $d\vec{S} = \vec{n} dS$ je příspěvek k toku

$$d\vec{F} = dS_i T_{ij} \vec{e}_j = \left[\vec{H}(\vec{B} \cdot \vec{n}) - \frac{1}{2} \vec{n}(\vec{B} \cdot \vec{H}) \right] dS$$

Nalezněte složku síly rovnoběžnou s \vec{M}

$$F_z = \vec{e}_z \cdot \oint_{\Sigma} d\vec{F},$$

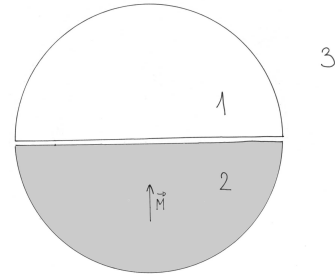
uved'te zvlášť, jaký je tok podstavou a polosférou, jež tvoří Σ . Jaká hodnota bezrozměrné konstanty κ_3 jí odpovídá?

4) Ukažte, že v místech, kde tečou plošné proudy, a kde tedy je magnetické pole nespojité, platí pro plošnou sílu vztah $\vec{f}_{\text{ploš}} = \vec{j}_{\text{ploš}} \times \{\vec{B}\}$, kde $\{\vec{B}\} = \frac{1}{2}(\vec{B}_1 + \vec{B}_2)$ je průměr polí z obou stran. Intuitivně je faktor $\frac{1}{2}$ dán plochou lichoběžníka jež tvoří profil objemové hustoty síly, jež vznikne zespojitěním při uvážení konečné tloušťky plošného proudu s konstantním profilem proudové hustoty. Nalezněte přesný důkaz spočtením toku Maxwellova tenzoru přes uzavřenou plochu tvaru velmi nízkého válce těsně obklopujícího malou plošku rozhraní. Dokažte klíčový vztah

$$H_{2i}B_{2j} - H_{1i}B_{1j} = [H_i]\{B_j\} + \{H_i\}[B_j]$$

a poté při vědomí opačné orientaci podstav válce a za užití vztahu pro dvojný vektorový součin dokažte, že $\vec{f}_{\text{ploš}} = \vec{j}_{\text{ploš}} \times \{\vec{B}\}$.

5) Uvažujte, že magnet 1 je místo objemové magnetizace magnetický v důsledku existence povrchových plošných proudů $\vec{j}_{\text{ploš}} = \vec{n} \times [\vec{M}]$ daných nespojitostí magnetizace \vec{M} na povrchu magnetu, kde uvažujeme pole jednotkových normál \vec{n} . Určete tyto proudy na podstavě a polosféře, jež tvoří povrch magnetu. Jaká je v tomto případě magnetická intenzita \vec{H}_1 ?



Ilustrace k bodům 5 a 6: Dva těsně přiléhající polokulové permanentní magnety se shodnou magnetizací, přičemž vrchní je místo magnetizace tvořen povrchovými proudy.

6) Spočtete sílu

$$\vec{F} = \int \vec{j}_{\text{ploš}} \times \{\vec{B}\} dS,$$

jíž působí magnetické pole na tyto povrchové proudy. Jaká hodnota bezrozměrné konstanty κ_6 jí odpovídá?

7) Nalezněte přesný vztah určující sílu mezi polokoulemi pro libovoně velké δ . Spočtete příslušný bezrozměrný faktor $\kappa_7(\delta/a)$ numericky pro $\delta = 3a$ a $\delta = 10a$. (Inspirace: Jupyter, Mathematica)

8) Jak moc (vyjádřeno v procentech) se liší síla pro $\delta = 3a$ a $\delta = 10a$ podle 7) od síly mezi dvěma bodovými dipóly?