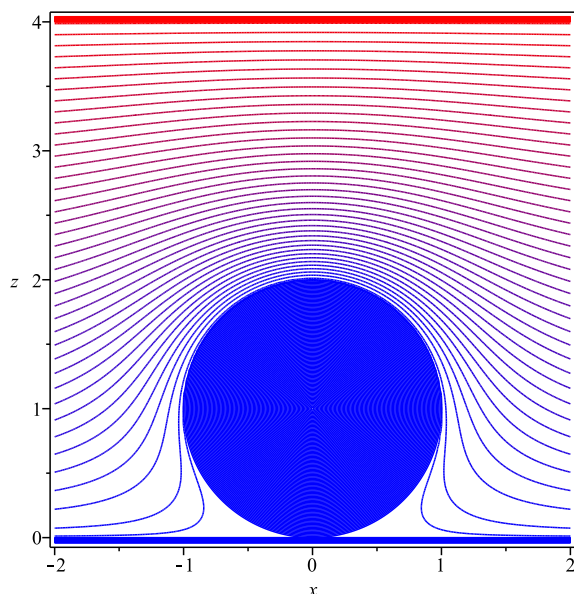


Zadání domácí úlohy z Klasické elektrodynamiky

Uvažujte vodivou kuličku o průměru 5 mm a hmotnosti 5 mg, která vodivě s ní spojena leží na vodorovné spodní elektrodě deskového kondenzátoru s rozměry i vzdáleností rovnoběžných desek mnohonásobně převyšujícími rozměry kuličky. Nalezněte elektrickou intenzitu mezi elektrodami, jaká je potřebná ke zdvihnutí kuličky.



Ekvipotenciály elektrostického pole pro vodivou kuličku ležící na spodní elektrodě.

Teorie

Neznámou veličinu zde představuje plošný náboj na povrchu kuličky, který musí zajistit, že tento povrch bude ekvipotenciální plochou. Než hledat přímo tento plošný náboj, je snazší použít tzv. fiktivní náboje:

U rovnoměrně nabitě kuličky víme, že její pole je totožné s polem jediného bodového náboje ležícího v jejím středu. Podobně je pole vně axiálně symetricky nabitě sférické slupky totožné s polem nějaké kombinace multipólů s $m = 0, l = 0 \dots \infty$ ležících v jejím středu. Alternativně můžeme místo sady multipólů $m = 0, l = 0 \dots L$ vzít sadu $L + 1$ bodových nábojů ležících na ose z uvnitř koule blízko počátku. (Někdy je tato alternativa výrazně lepší, např. v případě jediného náboje elektrosticky se zrcadlího ve vodivé kouli se nekonečně multipólových příspěvků poskládá do jediného fiktivního bodového náboje sféricky inverzního ke zdroji – u obecné situace ale nemusíme polohu fiktivního náboje uhodnout správně a hodnoty fiktivních nábojů pak mohou divoce oscilovat.)

Tyto fiktivní náboje se dají použít i k výpočtu silového působení – ze zákona akce a reakce plyne, že síla, jíž vnější pole působí na nábojovou hustotu indukovanou na povrchu vodivé sféry, je rovna síle, jakou by vnější pole působilo na sadu bodových nábojů budících vně sféry stejné pole.

Zatímco u sady bodových nábojů q_i , na které působí vnější pole \vec{E}_1 , stačí sečíst síly $q_i \vec{E}_1$, v případě multipólu q_l budícího potenciál

$$\Phi_l(r, \theta) = \frac{q_l}{4\pi\epsilon_0} \frac{P_l(\cos \theta)}{r^{l+1}},$$

spočteme sílu jako (viz příklad s generující funkcí Legendových polynomů ze cvičení)

$$\vec{F}_l = \frac{q_l}{l!} \left(\frac{d}{dz} \right)^l \vec{E}_1(\vec{x} = 0).$$

Návod

1. To, že se kulička vodivě dotýká spodní rovinné elektrody kondenzátoru vyřešte s pomocí metody zrcadlení (zrcadlovým obrazem multipólu $q_l|_{z=+h}$ je $(-1)^{l+1}q_l|_{z=-h}$).

2. Nahrad'te neznámou axiálně symetrickou nábojovou hustotu na povrchu kuličky

a) buď kombinací neznámých axiálně symetrických multipólů $l = 0 \dots L, L \geq 1$ v jejím středu

b) nebo dvěma či více neznámými bodovými náboji na ose z , v blízkosti středu koule.

3. Zanedbejte konečnou vzdálenost k horní rovinné elektrodě kondenzátoru.

4. Sestavte a vyřešte rovnice pro neznámé náboje či multipólové momenty reprezentující nábojovou hustotu indukovanou na povrchu vodivé kuličky. Rovnice získáte z podmínky, že ve vhodně zvolených místech na povrchu kuličky musí být nulový potenciál. (Obecně bychom měli ukázat, že pro $L \rightarrow \infty$ jde o konvergentní postup, pro malá L ale stačí vzít $\theta = n\pi/(L+1), n = 0, 1, \dots, L$.)

5. Nalezněte elektrostickou sílu působící na kuličku a srovnáním se silou tíhovou určete elektrickou intenzitu [V/m] potřebnou k tomu, aby se kulička vznesla k protější elektrodě.

6. Jaká síla bude na kuličku působit, až se dostane do středu deskového kondenzátoru daleko od spodní elektrody a náboj na jejím povrchu se odpovídajícím způsobem přemístí?

Pro přesnost cca 4% stačí položit $L = 1$, pro vyšší přesnost jsou použitelné do cca $L = 3$ oba přístupy. Pro vyšší hodnoty L vede 1b) ke špatně podmíněným soustavám rovnic.

Řešení odevzdejte Vašemu cvičícímu nebo jako přílohu prostřednictvím emailu na adresu ledvinka@gmail.com.

Pozn. Nezávisle na výše zmíněných bodech si můžete prohlédnout experiment dostupný na youtube.com pod heslem *Electrostatic hailstorm boxes*.