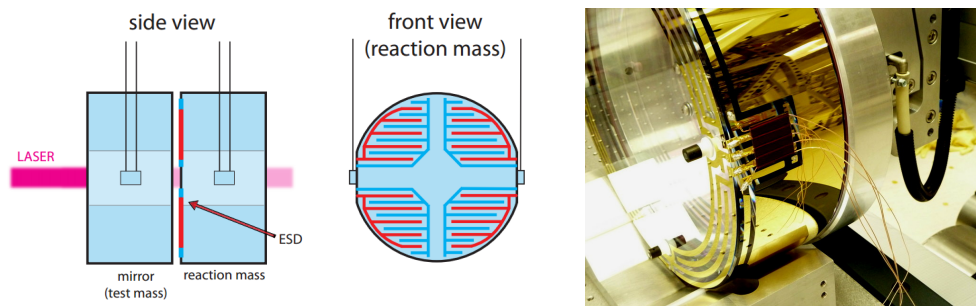


Domácí úloha z Klasické elektrodynamiky

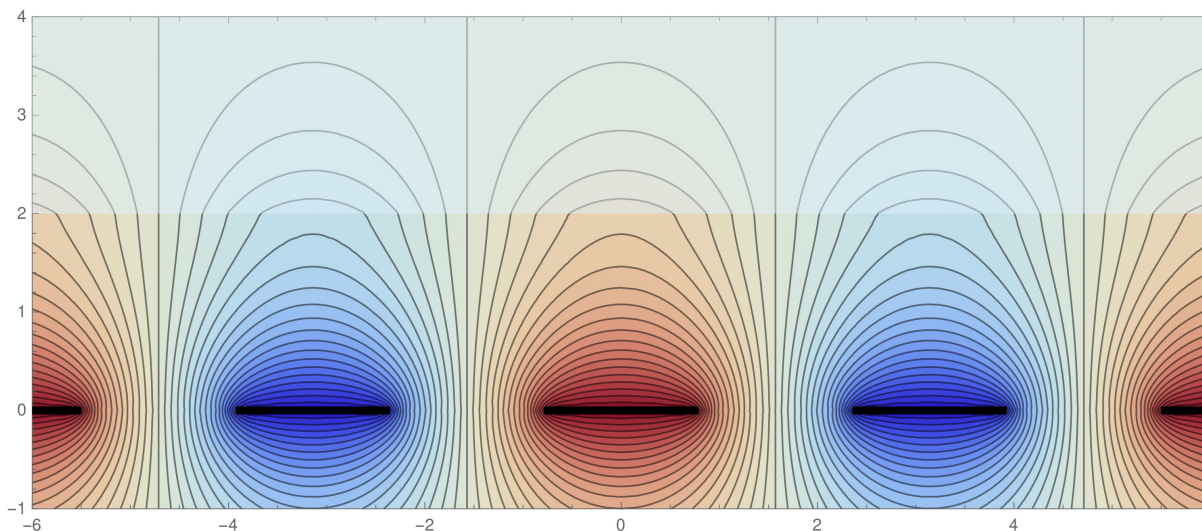
Úvod

V interferometrických detektorech gravitačních vln je třeba velmi jemně pohybovat zrcadly interferometru. Využívá se elektrostatického působení mezi sadou elektrod a křemenným dielektrikem zrcadla (Obr 1.).



Obr. 1. Principiální schéma (vlevo) a aktuální tvar elektrod u detektoru Advanced LIGO (vpravo).

V rámci domácí úlohy naleznete sílu, jakou působí soustava rovnoběžných páskových elektrod na dielektrický objekt. Problém je zjednodušen do podoby modelu na Obr. 2.



Obr. 2. Elektrické pole elektrod a jeho deformace přítomností dielektrika zrcadla. V dolní části obrázku ($z < 2$) je elektrické pole v okolí elektrod, v horní části ($z > 2$) vidíme pole uvnitř dielektrika s $\epsilon_r > 1$. Na rovinném rozhraní se nespojitost elektrického pole projevuje zalomením siločar. (V rámci zjednodušení tedy nepředpokládáme, že by se elektrody samy nacházely na povrchu druhého dielektrického tělesa, jak je tomu na Obr. 1.)

Pole elektrod

Vytvořte nejprve modelové pole zhruba popisující pole elektrod bez přítomnosti dalších objektů. Předpokládejte, že soustava elektrod (obr. 2) má podobu nekonečné sady vodivých pásek ležících v rovině $z = 0$ a rovnoběžných s osou y . Pásy mají šířku i a rozstup a a

jsou udržovány na potenciálu střídavě $+U, -U$. Nalezněte funkci h a hodnotu konstant p, k vystupujících v modelovém potenciálu

$$\Phi_0(x, z) = p \cos(kx)h(|z|),$$

které podle vás co nejlépe popisují pole elektrod bez přítomnosti dalších objektů a odpovězte na otázky:

1. Jakou rovnici a kde musí Φ_0 splňovat, abychom mohli mluvit o poli elektrod ležících v rovině $z = 0$?
2. Jakou funkci h musíte volit, aby tato rovnice byla splněna?
3. Jaká nábojová hustota σ_0 je pak zodpovědná za Φ_0 ?
4. Jaká hodnota k vám přijde vhodná, aby elektrody měly podobu pásků majících šířku i rozestup a ?
5. Jaká hodnota p vám přijde vhodná, aby popisovala předepsané napětí na elektrodách? (T.j. střídavě $+U, -U$.) U tohoto bodu můžete ale nemusíte uvážit, jak vypadá graf funkce

$$s(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{16 \cos \frac{\pi}{4}(2m+1)}{\pi^2(2m+1)^2} \cos(2m+1)u.$$

Načrtněte tvar průběhu elektrického modelového potenciálu Φ_0 v rovině $z = 0$ a do téhož grafu také načrtněte (a slovy zdůvodněte), jaký průběh očekáváte v rovině $z = 0$ u skutečné soustavy páskových vodičů daného tvaru.

Rozhraní vakuum-sklo

Nyní předpokládejte, že aniž dojde ke změně potenciálu v nejbližším okolí elektrod, přiblížíme do vzdálenosti $z = b$ rovinné rozhraní skleněného zrcadla s $\epsilon_r > 1$ (viz Obr. 2, pro jednoduchost dielektrikum zrcadla představuje celý poloprostor $z > b$.)

Nyní uvažujte

$$\Phi_1(x, z) = q \cos(kx)h(|z - b|).$$

jako korekci v důsledku přítomnosti rozhraní vakuum-sklo, takže elektrické pole je nyní popsáno (opět jde o přiblížení, tentokrát zanedbáváme přeskupení nábojů na elektrodách v důsledku Φ_1):

$$\vec{E} = -\nabla(\Phi_0 + \Phi_1), \quad \vec{D} = \begin{cases} \epsilon_0 \vec{E} & 0 < z < b \quad (\text{mezi elektrodami a zrcadlem}) \\ \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} & z > b \quad (\text{uvnitř zrcadla}) \end{cases}$$

6. Jaká hodnota q povede na splnění polních rovnic na rozhraní $z = b$?
7. Jaká plošná nábojová hustota σ_1 je pak zodpovědná za Φ_1 ?
8. Jaká je objemová hustota vázaného náboje v zrcadle?
9. Jaká je plošná hustota vázaného náboje na povrchu zrcadla?
10. Jakým průměrným tlakem působí elektrické pole elektrod na tuto plošnou nábojovou hustotu?