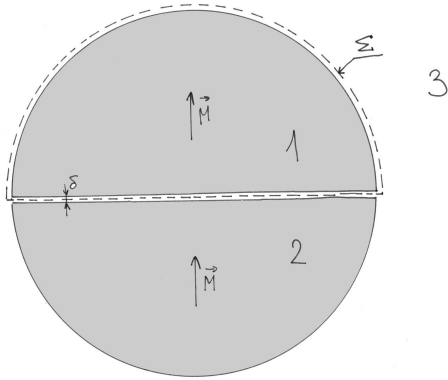


Zadání domácí práce č. 2 z Klasické elektrodynamiky

Spočítejte sílu, jíž se přitahují dvě polokoule vyrobené z materiálu s konstantní magnetizací $\vec{M} = M\vec{e}_z$ rovnoběžnou se společnou osou obou polokoulí, pokud se svými podstavami dotýkají a dohromady vytvářejí kouli o poloměru a .



Obr. 1: Ilustrace k bodům 1 - 3: Dva těsně přiléhající polokulové permanentní magnety se shodnou magnetizací. Pro účel výkladu k bodu 2 je též znázorněna velmi malá vzduchová mezera δ mezi nimi.

1) Za předpokladu, že magnetické pole je homogenní uvnitř obou magnetů 1 a 2

$$\vec{B}_{12} = B\vec{e}_z = B(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$$

a dipólové vně (v oblasti 3)

$$\vec{B}_3 = B\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(\cos\theta\vec{e}_r + \frac{1}{2}\sin\theta\vec{e}_\theta\right)$$

ukažte, že lze splnit spojitosti příslušných složek \vec{B} a

$$\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}.$$

Jaká je magnetická intenzita \vec{H}_{12} ? Jaký vztah svazuje velikosti B a M ? Načtněte siločáry a) vektorového pole \vec{B} , b) vektorového pole \vec{H} . Vyznačte místa nespojitosti polí.

2) Středoškolská metoda určení "síly magnetu" spočívá v tom, že se předpokládá, že téměř veškerá energie pole sídlí ve vzduchové mezeře δ mezi magnety, kdy pro malá δ intenzita pole na velikosti mezery příliš nezávisí. Derivace této energie podle δ dá pak sílu. Určete jak velká je síla spočtená touto metodou. Určete číselnou hodnotu magnetické indukce v mezeře mezi dvěma magnety o průměru podstavy 1 cm, je-li k jejich odtržení potřebná síla 30 N.

3) Obklopte horní magnet plochou Σ a spočítejte tok Maxwellova tenzoru touto plochou. Protože Σ celá leží mimo magnet, platí v místech integrace lineární vztah $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$. Označíme-li $d\vec{S} = \vec{n} dS$ je příspěvek k toku

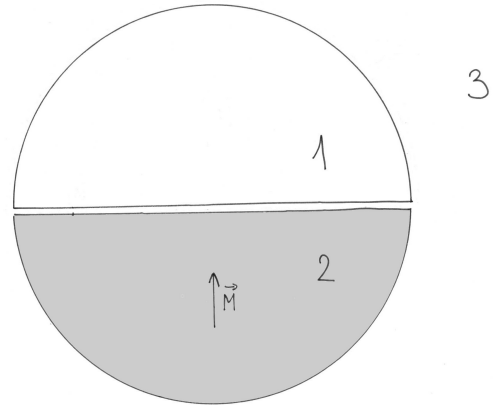
$$d\vec{F} = dS T_{ij} \vec{e}_j = \left[\vec{H}(\vec{B} \cdot \vec{n}) - \frac{1}{2} \vec{n}(\vec{B} \cdot \vec{H}) \right] dS$$

Nalezněte složku síly rovnoběžnou s \vec{M}

$$F_z = \vec{e}_z \cdot \oint_{\Sigma} d\vec{F},$$

uvedte zvlášť, jaký je tok podstavou a polosférou, které spolu tvoří Σ .

4) Uvažujte, že magnet 1 je místo objemové magnetizace magnetický v důsledku existence povrchových plošných proudů $\vec{j}_{\text{ploš}} = \text{Rot } \vec{M}$. Určete tyto proudy na podstavě a polosféře, které tvoří povrch magnetu. Jaká je v tomto případě magnetická intenzita \vec{H}_1 ?



Obr. 2: Ilustrace k bodům 4 a 5: Dva těsně přiléhající polokulové permanentní magnety se shodnou magnetizací, přičemž vrchní je místo magnetizace tvořen povrchovými proudy.

5) Spočítejte sílu

$$\vec{F} = \int \vec{j}_{\text{ploš}} \times \{\vec{B}\} dS,$$

kterou magnetické pole působí na tyto povrchové proudy, kde $\{\vec{B}\} = \frac{1}{2}(\vec{B}_1 + \vec{B}_2)$ je průměr polí vně a uvnitř.

6) Vysvětlete, proč uvažovaná síla mezi dvěma polokulovými permanentními magnety popisuje i sílu, jíž polokulový magnet stejné magnetizace "drží" na povrchu magneticky měkkého materiálu s permeabilitou $\mu_r \rightarrow \infty$.

Síly z bodu 5 a 3 mají vyjít stejně a lišit se o méně jak 15% od přibližného výsledku z bodu 2.

7) (Prémiová úloha) Ukažte, že v místech, kde tečou plošné proudy, a kde tedy je magnetické pole nespojité, platí pro plošnou sílu vztah $\vec{f}_{\text{ploš}} = \vec{j}_{\text{ploš}} \times \{\vec{B}\}$. Intuitivně je faktor $\frac{1}{2}$ dán plochou lichoběžníka, popisujícího profil objemové hustoty síly, která vznikne nahrazením plošného vrstvou protékající proudovou hustotou s konstantním profilem. Zkuste nalézt přesný důkaz spočtením toku Maxwellova tenzoru přes uzavřenou plochu tvaru velmi nízkého válce obklopujícího těsně malou plošku rozhraní. Dokažte klíčový vztah

$$H_{2i}B_{2j} - H_{1i}B_{1j} = [H_i]\{B_j\} + \{H_i\}[B_j]$$

a poté při vědomí opačné orientaci podstav válce a za užití vztahu pro dvojný vektorový součin dokažte, že $\vec{f}_{\text{ploš}} = \vec{j}_{\text{ploš}} \times \{\vec{B}\}$. Za vypracování tohoto bodu můžete získat navíc 4 body.