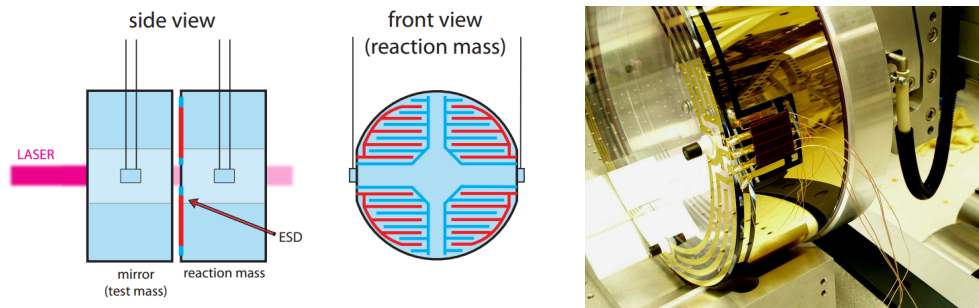


# Domácí úloha z Klasické elektrodynamiky

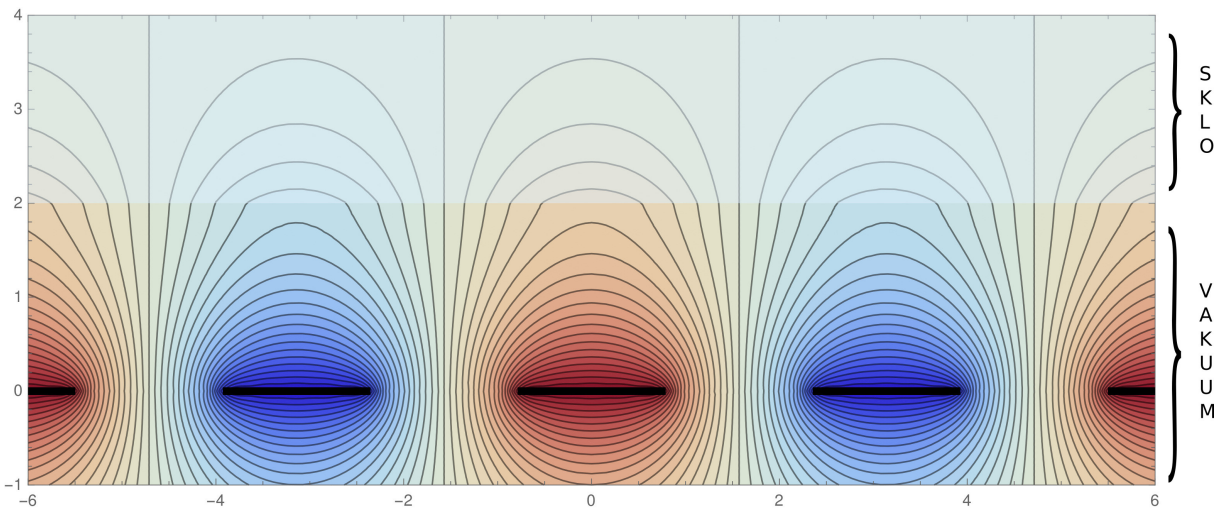
## Úvod

V iterferometrických detektorech gravitačních vln je třeba velmi jemně pohybovat zrcadly interferometru. Využívá se elektrostatického působení mezi sadou elektrod a křemenným dielektrikem zrcadla (Obr 1.).

V rámci domácí úlohy nalezněte sílu, jakou působí soustava rovnoběžných páskových elektrod na dielektrický objekt. Problém je zjednodušen do podoby modelu na Obr. 2, kdy páskové elektrody nejsou nalepeny na povrchu dielektrika, ale nacházejí se ve vakuu a to v celé rovině  $z = 0$ . Stejně tak je zjednodušeno i zrcadlo do podoby poloprostoru  $z > b$  vyplněného homogenním dielektrikem. Proto místo cekové síly, která by byla nekonečná, budeme hledat její plošnou hustotu tedy tlak.



Obr. 1. Principiální schéma (vlevo) a aktuální tvar elektrod u detektoru Advanced LIGO (vpravo).



Obr. 2. Elektrické pole elektrod a jeho deformace přítomností dielektrika zrcadla. V dolní části obrázku ( $z < 2$ ) je elektrické pole v okolí elektrod. V horní části ( $z > 2$ ) vidíme pole uvnitř dielektrika s  $\epsilon_r > 1$ . Na rovinném rozhraní  $z = 2$  se nespojitost elektrického pole projevuje zalomením ekvipotenciál. (V rámci zjednodušení tedy m.j. nepředpokládáme, že by se elektrody samy nacházely na povrchu dielektrického tělesa, jak je tomu na Obr. 1.)

## Pole elektrod

Vytvořte nejprve modelové pole zhruba popisující pole elektrod bez přítomnosti dalších objektů. Předpokládejte, že soustava elektrod (obr. 2) má podobu nekonečné sady vodivých pásek ležících v rovině  $z = 0$  a rovnoběžných s osou  $y$ . Pásky mají šířku  $i$  a rozestup  $a$  a jsou udržovány na potenciálu střídavě  $+U, -U$ . Nalezněte funkci  $h$  a hodnotu konstant  $p, k$  vystupujících v modelovém potenciálu

$$\Phi_0(x, z) = p \cos(kx)h(|z|),$$

kteřé podle vás co nejlépe popisují pole elektrod bez přítomnosti dalších objektů. Odpovězte na otázky a načrtněte požadované průběhy:

1. Jakou rovnici a kde musí  $\Phi_0$  splňovat, abychom mohli mluvit o poli elektrod ležících v rovině  $z = 0$ ?
2. Jakou funkci  $h$  musíte volit, aby tato rovnice byla splněna? Proč druhou možnou variantu  $h$  musíme zavrhnout?
3. Jaká nábojová hustota  $\sigma_0$  je pak zodpovědná za  $\Phi_0$ ?
4. Jaká hodnota  $k$  vám přijde vhodná, aby elektrody měly podobu pásků majících šířku i rozestup  $a$ ? Proč volíme závislost na souřadnicích  $x$  v podobě funkce  $\cos kx$ ? Jaká hodnota  $p$  vám přijde vhodná, aby popisovala předepsané napětí na elektrodách? (T.j. střídavě  $+U, -U$ .)
5. Načrtněte tvar průběhu elektrického modelového potenciálu  $\Phi_0$  v rovině  $z = 0$  pro vámi zvolené hodnoty  $p$  a  $k$ . Dále načrtněte (a slovy zdůvodněte) do stejného grafu, jaký průběh očekáváte v rovině  $z = 0$  u skutečné soustavy páskových vodičů daného tvaru.

## Rozhraní vakuum-sklo

Nyní předpokládejte, že aniž dojde ke změně potenciálu v nejbližším okolí elektrod, přiblížíme do vzdálenosti  $z = b$  rovinné rozhraní skleněného zrcadla s  $\epsilon_r > 1$  (viz Obr. 2, pro jednoduchost dielektrikum zrcadla představuje celý poloprostor  $z > b$ .)

Nyní uvažujte

$$\Phi_1(x, z) = q \cos(kx)h(|z - b|).$$

jako korekci v důsledku přítomnosti rozhraní vakuum-sklo. Proto výsledné elektrické pole je nyní popsáno superpozicí:

$$\vec{E} = -\nabla(\Phi_0 + \Phi_1), \quad \vec{D} = \begin{cases} \epsilon_0 \vec{E} & 0 < z < b \quad (\text{mezi elektrodami a zrcadlem}) \\ \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} & z > b \quad (\text{uvnitř zrcadla}) \end{cases}$$

(Opět jde o přiblížení, tentokrát zanedbáváme přeskupení nábojů na elektrodách v důsledku přiblížení dielektrického objektu.)

6. Jaká hodnota  $q$  povede na splnění polních rovnic na rozhraní  $z = b$ , které mají podobu

$$[E_x] = [E_y] = 0, \quad [D_z] = 0,$$

kde  $[f]$  je zkratka pro nespojitost veličiny  $f$  na rozhraní

$$[f(x, y)] := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(x, y, z = b + \epsilon) - f(x, y, z = b - \epsilon)$$

7. Jaká plošná nábojová hustota  $\sigma_1$  je pak zodpovědná za  $\Phi_1$ ?
8. Jaká je objemová hustota vázaného náboje  $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$  uvnitř zrcadla?
9. Jaká je plošná hustota vázaného náboje  $\sigma = \epsilon_0 \vec{e}_z \cdot [\vec{E}]$  na povrchu zrcadla?
10. Jakým průměrným tlakem  $\langle \sigma_1 \vec{E}_0 \cdot \vec{e}_z \rangle$  působí elektrické pole elektrod  $\vec{E}_0$  na tuto plošnou nábojovou hustotu  $\sigma_1$ ?

Úlohy odevzdávejte svým cvičícím do 6.5.