# Poznámky k přednášce Klasická elektrodynamika – Nestacionární pole

## Maxwellovy rovnice – nestacionární pole

Na základě skutečnosti, že rotace vektorového pole má nulovou divergenci, usoudil Maxwell, že v diferenciální verzi Ampérova zákona je třeba v nestacionárním případě, kdy div $\vec{j} \neq 0$ nahradit proudovou hustotu kombinací $\vec{j} + \partial_t \vec{D}$, jejíž divergence vymizí v důsledku Gaussovy věty a zákona zachování elektrického náboje. Divergence toho "opraveného proudu" je nulová proto, že za použití Gaussovy věty přechází na rovnici kontinuity pro elektrickou nábojovou hustotu

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}\ \vec{j} \ = \ 0\ . \tag{1}$$

Od té doby chování elektromagnetického pole popisují Maxwellovy rovnice

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\ \vec{H} - \partial_t \vec{D} &= \vec{j}\ , && (2)\\
\mathrm{div}\ \vec{D} &= \rho\ , && (3)\\
\mathrm{rot}\ \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= 0\ , && (4)\\
\mathrm{div}\ \vec{B} &= 0\ . && (5)
\end{aligned}$$

Ty je samozřejmě třeba doplnit materiálovými vztahy. Budeme předopokládat, že $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$ a $\vec{H} = \vec{H}(\vec{B})$, se složitějšími vztahy jste se seznámili v optice u dispersních médií – komplikované vztahy jsou zapříčiněny komplikovaným materiálem. Náboje a proudy vystupující na pravé straně Maxwellových rovnic jsou dány vlastnostmi hmoty a skrze ně elektromagnetické pole na hmotu působí. Nepřeberné množství jevů s tím souvisejících patří do jiných přednášek.

Pro ujasnění si významu rovnic (2-5) budeme až na explicitně uvedené výjimky předpokládat, že materiálové vztahy jsou popsány skalární permitivitou $\epsilon$ a permeabilitou $\mu$. Charakter rovnic může, jak jsme na příkladu skinového jevu viděli, také ovlivnit závislost zdrojů na poli samotném. Proto prozatím budeme proudy a nábojové hustoty považovat za dané funkce času a prostoru.

## Maxwellovy rovnice – počáteční úloha

Vezmeme-li elektromagnetické pole v nějakém okamžiku, řekněme $t = 0$, můžeme se ptát, co pro jeho hodnoty vyplývá z Maxwellových rovnic. Okamžitě vidíme, že rovnice udávající divergence $\vec{B}$ a $\vec{D}$ přikazují, jaká pole jako funkce prostorových souřadnic jsou v libovolný okamžik povolena. Např. zřídlová magnetická pole nejsou možná. Rovnice (3) a (5) představují *vazby.*

Oproti tomu rovnice, kde vystupují rotace polí mají jiný charakter. Pokud pozorujeme, že v daném okamžiku rot $\vec{E} \neq 0$, je takové pole přípustné, ovšem znamená to, že buď
– měnící se magnetické pole je zdrojem cirkulace elektrického pole a nebo
– nenulová cirkulace elektrického pole zapříčiní změnu magnetického pole.

Jak rozhodnout, která z obou možností je správně? Jaký experiment by to mohl rozhodnout? V každém případě rovnice (4) svazuje časové a prostorové změny elektromagnetického pole. Nestačí na to ale sama – o jejím významu rozhoduje, čím tuto rovnici doplníme (viz cvičení níže).

Nejprve si povšimmneme, že obě vazby (3) a (5) se zachovávají. Časová derivace

$$\partial_t\ \mathrm{div}\ \vec{B} \ = \ \mathrm{div}\ \partial_t\ \vec{B} \ = \ \mathrm{div}\ (-\ \mathrm{rot}\ \vec{E}) \ \equiv \ 0 \tag{6}$$

a podobně je to díky rovnici kontinuity elektrického náboje i s rovnicí (3).

Nabízí se následující interpretace: Vazby (3) a (5) určují jaká pole přicházejí do úvahy v čase $t = 0$. Rotace elektrického pole a rotace magnetického pole opravená o proud

$$\partial_t \vec{E} \ = \ \frac{1}{\epsilon}\mathrm{rot}\ \frac{1}{\mu}\vec{B} - \frac{1}{\epsilon}\vec{j}\ , \tag{7}$$

$$\partial_t \vec{B} \;=\; -\mathrm{rot}\ \vec{E}\ , \tag{8}$$
$$\tag{9}$$

pak udávají změny pole. Jsou to *pohybové rovnice* pro elektromagnetické pole, které zachovávají vazby. Tato soustava přestavuje tzv. hyperbolický systém parciálních diferenciálních rovnic – tato čeleď rovnic je pojmenována podle znamének $- + ++$ ve vlnové rovnici.

*Cvičení.* Předpokládejte, že zdroje jsou dané fukce času a prostoru a že prostředí je homogenní. Uvažujte fourierovský rozklad do prostorových vln charakteru $e^{i\vec{k}.\vec{r}}$ všech veličin a dosaďte jej do rovnic (7) a (8). Nalezněte obdobu těchto rovnic pro fourierovské komponenty $\vec{E}(\vec{k},t)$ a $\vec{B}(\vec{k},t)$. Ukažte, že jde o soustavu obyčejných lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty ($\vec{k}$ je vzhledem k času samozřejmě konstanta). Na zjednodušeném příkladě s $\vec{j}(\vec{k},t)=0$ tuto soustavu vyřešte pro zadané $\vec{E}(\vec{k},t=0)$ a $\vec{B}(\vec{k},t=0)$ a ukažte, co by znamenalo opačné znaménko v Lenzově principu. Při řešení soustavy šesti lineárních diferenciálních rovnic pro šest neznámých je výhodné zavést proměnné $\vec{b}^{\pm}(\vec{k},t)=\vec{B}(\vec{k},t)\pm\frac{1}{c|\vec{k}|}\vec{k}\times\vec{E}(\vec{k},t)$, neboť představují (levé) vlastní vektory příslušné matice, v nichž má homogenní soustava Maxwellových rovnic pro prostorové Fourierovy komponenty tvar $\partial_t\vec{b}^{\pm}=\mp ic|\vec{k}|\vec{b}^{\pm}$ a lze ji snadno řešit.

*Cvičení.* Vezměte rotaci (7) a ukažte, že získáte vlnovou rovnici pro $\vec{B}$. Vysvětlete, proč po boku této rovnice, se otáčí význam (4) – časová derivace magnetické indukce je zdrojem vírové složky elektrického pole.

Pozn. Evoluční rovnice (7) a (8) mění mimo oblast zdrojů jen víři̇vou složku elektrického i magnetického pole, neboť tam je jediným zdrojem změny obou polí rotace toho druhého, což je ovšem nezřídlové vektorové pole. Jak je možné, že když přemístíme náboj a tedy získáme nová zřídla elektrického pole, je změna mimo zdroje pouze vírové povahy?

Vysvětlení na konkrétním příkladě poskytuje Obrázek 1 z poznámek k magnetismu: Změna elektrického pole od stavu, kdy nabitá deska sídlí na dolní podstavě válce, na elekrické pole téže desky sídlící na horní podstavě – tedy rozdíl těchto polí je zřídlového charakteru a je na levém obrázku. Na pravé straně ale vidíme, že totéž (rozdílové) pole vně trajektorie zdroje lze popsat jako pole vírové.

## Relaxační mechanismy v elektromagnetismu

Jaký je vztah těcho evolučních rovnic k rovnicím, které jsme doposud studovali? Jak jsme ukázali, počínaje rovnicemi elektrostaiky a konče kvazistacionárním přiblížením, představovali doposud zkoumané rovnice rovnováhu polí se statickými, stacionárními a kvazistacionárními zdroji.

Této rovnováhy nabyde elektromagnetické pole různými relaxačními procesy. Nejprve zmíníme dva související s ohmickou vodivostí. Prvním, již zmíněným, je skinový jev, konkrétně skutečnost, že (a to i v plném elektomagnetismu) dochází k difuzi magnetického pole směrem k rovnovážemu stavu. Další mechanismus související s vodivostí je dán evolucí zřídlové části elektrického pole. Ta se řídí rovnicí kontinuity (1) a po dosazení Ohmova zákona $\vec{j}=\gamma\vec{E}=\gamma/\epsilon\vec{D}$ máme

$$\partial_t\rho+\mathrm{div}\ \vec{j} \;=\; \partial_t\rho+\mathrm{div}\ \gamma/\epsilon\vec{D} \;=\; 0 \quad\longrightarrow\quad \partial_t\rho+\frac{\gamma}{\epsilon}\rho=-\vec{D}.\mathrm{grad}\ \frac{\gamma}{\epsilon}\ . \tag{10}$$

Uvnitř vodiče, kde pravé strana vymizí tak dochází k exponenciálnímu zániku volné nábojové hustoty – náboj se stěhuje na povrch vodiče. Relaxační čas u běžných vodičů je velmi malý a je dán jen materiálovými konstantami, narozdíl od skinového jevu, kde souvisí i s rozměry a tvarem vodiče.

Oba zmíněné disipativní procesy ve vodičích vedou k ustavení statického stavu $\vec{j}=0$ a v důsledku Ohmova zákona i $\vec{E}=0$ uvnitř vodiče. To je elektrostatika. Za působení vnějších zdrojů či jiných sil se rovnováha ustanoví v souladu s buzením, pro pomalu se měnící zdoje tak dostaneme kvazistacionární pole.

Předběhneme-li další výklad, je tu ještě jeden relaxační mechanismus. Odchylka od kvazistacionárního přiblížení je, jak uvidíme, dána přítomností elektromagnetického vlnění. Pokud to situace dovolí, jsou tyto vlny buď pohlceny disipativním prostředím, nebo odletí do daleka, v obou případech je tu tendence řešení blížit se (kvazi) stacionárnímu stavu. To je samozřejmě vyloučeno, když zdroje samy se mění v časech kratších, než jaké záření potřebuje k vytracení se.

První experimnetální důkaz oprávněnosti Maxwellovy konstrukce – Hetrzův experiment dokázal, že při jiskrovém výboji se část z původně elektrostatické energie místo na teplo přemění v eletromagnetické vlny.

## Elektromagnetické potenciály pro nestacionární pole

Již víme, že homogenní Maxwellovy rovnice (5) a (4), lze automaticky vyřešit za pomoci zavedení potenciálů. Nezřídlové $\vec{B}$ dává $\vec{B}=\mathrm{rot}\ \vec{A}$ a tak dostáváme

$$\mathrm{rot}\vec{E}+\partial_t\mathrm{rot}\vec{A} \;=\; \mathrm{rot}\left(\vec{E}+\partial_t\vec{A}\right) \;=\; 0 \tag{11}$$

a protože rotace součtu $\vec{E} + \partial_t \vec{A}$ je nulová musí to být gradient nějaké skalární funkce. Proto zavádíme elektromagnetické potenciály vztahy

$$\vec{B} \;=\; \mathrm{rot}\ \vec{A}\ , \tag{12}$$

$$\vec{E} \;=\; -\,\mathrm{grad}\ \Phi - \partial_t\ \vec{A}\ . \tag{13}$$

Jejich dosazením do zbývajících rovnic dostáváme

$$\mathrm{rot}\ \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\ \vec{A} - \partial_t \epsilon(-\mathrm{grad}\ \Phi - \partial_t\ \vec{A}) \;=\; \vec{j}\ , \tag{14}$$

$$\mathrm{div}\ \epsilon(-\mathrm{grad}\ \Phi - \partial_t\ \vec{A}) \;=\; \rho\ , \tag{15}$$

$$\tag{16}$$

V homogenním prostředí můžeme vytknout příslušné materiálové konstanty $\mu\epsilon = c^{-2}$ a za použití Z.I.V.A. dostáváme polní rovnice pro elektromagnetické potenciály

$$\left(-\Delta\vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\ \vec{A}\right) + \mathrm{grad}\ \left(\mathrm{div}\ \vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t\Phi\right) \;=\; \mu\vec{j}\ , \tag{17}$$

$$\Delta\Phi + \partial_t\ \mathrm{div}\ \vec{A} \;=\; -\frac{1}{\epsilon}\rho\ . \tag{18}$$

Magnetické pole $\vec{B}$ je vírové povahy a je dáno rotací vektorového potenciálu. Zřídlová část vektorového poteciálu je veličina která se na magnetickém poli nijak neprojeví. Tato veličina je určitelná z div $\vec{A}$ a tedy tato divergence vektorového potenciálu není nijak dána. Protože ovšem časová derivace vektorového potenciálu vystupuje v (13) je třeba opravit po změně vektorového potenciálu i potenciál $\Phi$. Změna kalibrace je dána vztahy

$$\vec{a}\,' \;=\; \vec{A} + \nabla\chi \tag{19}$$

$$\Phi' \;=\; \Phi - \partial_t\chi \tag{20}$$

Dosazením do (12) a (13) lze ověřit, že tato změna potenciálů nemění elektrické ani magnetické pole. Také vidíme, že div $\vec{a}\,'$ − div $\vec{A} = \Delta\chi$ a daná změna div $\vec{A}$ vede na Poissonovu rovnici.

## Maxwellovy rovnice v Coulombově kalibraci

Při řešení (17) a (18) si nejprve vybereme postaru možnost div $\vec{A} = 0$. Po zavedení d'Alembertiánu

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\partial_{tt} \tag{21}$$

a dosazení div $\vec{A} = 0$ je

$$\Box\ \vec{A} \;=\; -\mu\vec{j}\ + \frac{1}{c^2}\partial_t\ \mathrm{grad}\ \Phi, \tag{22}$$

$$\Delta\ \Phi \;=\; -\frac{1}{\epsilon}\rho\ . \tag{23}$$

Toto jsou Maxwellovy rovnice pro potenciály v tzv. Coulombově kalibraci. Potenciál $\Phi$ se řídí Poissonovou rovnicí, zatímco vektorový poteciál splňuje v$\vec{A}(\vec{x}, t = 0)$ vlnovou rovnici se zdrojem na pravé straně. V nestacionárím případě je div $\vec{j} \neq 0$ a z rovnice kontinuity je vidět, že pozůstatek Maxwellova proudu zajišťuje, tak jako dříve, aby zdroj měl čistě vírový charakter. Jinak by nebylo možno vybranou kalibrační podmínku dodržet. Lze ukázat, že ačkoli v této kalibraci jsou hodnoty potenciálů v celém prostoru okamžitě ovlivněny změnou zdroje (nadsvětelné šíření), jde o změny, které mají povahu změny kalibrace a změny elektrického i magnetického pole se šíří právě rychlostí světla.

Z rozboru vlnové rovnice $\Box u = 0$ (např. jako limity mechanického systému) je známo, že řešení v čase $t > 0$ je dáno zadáním hodnoty $u(\vec{x}, t = 0)$ a její časové derivace $\dot{u}(\vec{x}, t = 0)$. Tyto dvě funkce představují libovůli, jíž připouští vlnová rovnice – jejich hodnota je libovolná ale dány v nějakém okamžiku již plně říkají jak řešení vypadá v libovolném čase.

Vidíme, že při daných zdrojích Maxwellovy rovnice dovolují zadat dvě vektorové funkce čistě vírového charakteru $\vec{A}(\vec{x}, t = 0)$ a $\dot{\vec{A}}(\vec{x}, t = 0)$ a ty již plně určují elektomagnetické pole ve všech časech. Hodnota $\vec{A}(\vec{x}, t = 0)$ skrze rotaci určuje počáteční hodnotu magnetického pole. Hodnota $\dot{\vec{A}}(\vec{x}, t = 0)$ opravená o gradient řešení Poissonovy rovnice (to žádnou libovůli při daných zdrojích nepřipouští) určuje počáteční hodnotu elektrického pole.

Libovůle při zadávání počátečních podmínek elektromagnetického pole spočívá v zadání vírové části elektrického a magnetického pole. Co se týče libovůle při zadávání zřídlové části polí, magnetické pole žádnou nemá, elektrické sice ano, ale ta je fixována Gaussovou větou. Libovůle při umisťování nábojů nás teď nezajímá, neboť ta souvisí s pohybovými rovnicemi této nabité látky. Ty, stejně jako evoluční rovnice elektromagnetického pole, musejí zaručovat zachování náboje.

Kalibrační libovůle se v Coulombově kalibraci smršťuje na funkce $\chi$ řešící v každém okamžiku Laplaceovu rovnici.

## Maxwellovy rovnice v Lorenzově kalibraci

Pohledem na rovnici (17) je vidět, že kalibrační podmínka

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t \Phi \;=\; 0 \;, \tag{24}$$

zvaná Lorenzova, okamžitě zjednoduší rovnici pro vektorový potenciál na rovnici vlnovou. Za člen $\partial_t$ div $\vec{A}$, jenž se objevuje v rovici pro $\Phi$ dosadíme z Lorenzovy kalibrační podmínky a dostaneme druhou časovou derivaci. Proto v Lorenzově kalibraci mají Maxwellovy rovnice pro elektromagnetické potenciály tvar

$$\Box\, \vec{A} \;=\; -\mu\vec{j} \;, \tag{25}$$

$$\Box\, \Phi \;=\; -\frac{1}{\epsilon}\rho \;. \tag{26}$$

Na rozdíl od podmínky Coulombovy je ve vakuu Lorenzova kalibrační podmínka speciálně relativisticky kovariantní a stejně tak i výše uvedené rovnice pro potenciály. Také je na první pohled vidět, že informace o zdrojích se šíří rychlostí světla. V této kalibraci se nabízí větší míra kalibrační volnosti – všechny $\chi$ splňující homogenní vlnovou rovnici vedou nezmění (24). Protože v oblastech, kde nejsou náboje splňuje $\Phi$ také homogenní vlnovou rovnici, lze zde obvykle položením $\chi = \int_0^t \Phi dt$ přejít do kalibrace, kde $\Phi' \equiv 0$ a div $\vec{a}\,' = 0$.

## Zákon zachování energie

Maxwellovy rovnice (7) a (8) popisují to, jak "torzní napětí éteru" je zdrojem časové změny pole. V analogii s mechanickým vlněním lze očekávat, že bude existovat veličina daná kvadrátem polí, popisující hustotu energie elektromganetického pole.

S použitím vztahů $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})$ a $(fg)' = f'g + fg'$ si nejprve spočteme

$$\nabla.(\vec{E}\times\vec{H}) \;=\; \vec{H}.(\nabla\times\vec{E}) - \vec{E}.(\nabla\times\vec{H}) \;, \tag{27}$$

pro jistotu ještě ve složkách

$$\partial_i(\epsilon_{ijk}E_jH_k) \;=\; \epsilon_{ijk}\partial_i(E_jH_k) \;=\; \epsilon_{ijk}(\partial_iE_j)H_k \;+\; \epsilon_{ijk}E_j(\partial_iH_k) \;=\; H_i\epsilon_{ijk}\partial_jE_k \;-\; E_i\epsilon_{ijk}\partial_jH_k \;. \tag{28}$$

Mechanický výkon, jakým působíme proti (tedy $-$) Lorentzově síle je

$$dP \;=\; -\,\vec{v}.dQ(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}) \;=\; -\,dQ\vec{v}.\vec{E} \;=\; -\,d\vec{J}.\vec{E} \;, \tag{29}$$

tedy objemová hustota mechanického výkonu je s použitím Maxwellových rovnic a připravené identity (27)

$$-\vec{j}.\vec{E} \;=\; -\,(\nabla\times\vec{H} - \partial_t\vec{D}).\vec{E} \;=\; \nabla.(\vec{E}\times\vec{H}) - \vec{H}.(\nabla\times\vec{E}) + \vec{E}.\partial_t\vec{D} \;=\; \vec{E}.\partial_t\vec{D} + \vec{H}.\partial_t\vec{B} + \nabla.(\vec{E}\times\vec{H}) \tag{30}$$

Tento výraz pro hustotu výkonu lze integrovat přes nějaký objem a získat vztah

**Výkon mech. sil $=$ Výkon potřebný ke změně el. a mag. pole $+$ výkon odcházející povrchem**

konkrétně

$$\int_\Omega -\vec{j}.\vec{E}\; dV \;=\; \int_\Omega \left(\vec{E}.\partial_t\vec{D} + \vec{H}.\partial_t\vec{B}\right) dV + \oint_{\partial\Omega} (\vec{E}\times\vec{H}).d\vec{S} \;. \tag{31}$$

Člen popisující výkon potřebný ke změně elektrického a magnetického pole obsahuje i energii potřebnou ke změně magnetizace a polarizace prostředí. V lineárním nedisperzním prostředí vede vztah $\vec{E}.\partial_t\vec{D} = \vec{E}.\partial_t\epsilon\vec{E} = \frac{1}{2}\partial_t\vec{E}.\epsilon\vec{E} = \frac{1}{2}\partial_t\vec{E}.\vec{D}$ a podobný vztah pro magnetické pole k zavedení hustoty energie

$$w \;=\; \frac{1}{2}\vec{E}.\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H}.\vec{B} \tag{32}$$

splňující rovnici kontinuity se zdrojem

$$\partial_t w + \mathrm{div}\ \vec{E} \times \vec{H} \ = \ -\vec{E}.\vec{j}\ . \tag{33}$$

Pokud chceme podobný vztah získat i např. v magneticky tvrdém materiálu, je třeba vázané magnetizační proudy přesunou do $\vec{j}$ a chápat je jako proudy tekoucí v prostředí s $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

Součin $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ se nazývá Poyntingův vektor. Jde o vektorové pole které určuje elektromagnetický výkon odcházející z objemu, přičemž jen zřídlová část tohoto pole vystupuje v zákonu zachování energie. Vztah (27) říká, že např. vložením permanentního magnetu do elektrostatického pole získáme Poyntingovo vektorové pole jehož zřídlová část je nulová, ovšem číselná velikost vírové složky $\vec{S}$ může být ohromná.

Ve vakuu má $w$ význam hustoty energie elektromagnetického pole, až se seznámíme s elektromagnetickými vlnami, uvidíme, že ta se může přelévat z jednoho místa do druhého, aniž jsou tam nějaké zdroje. Definitivně tak končí interpretace elektrostatické energie, jako potenciální energie nábojů. Poyntingov věta říká, že ta je jen zdání vzniklé z toho, že při změně polohy náboje dochází k rekonfiguraci pole, k níž potřebujeme vykonat práci právě rovnou změně elektromagnetické energie (a možná i víc, pokud s náboji postrkujeme příliš zbrkle a část naší práce se přemění na elektromagnetické vlnění, jenž odletí pryč).

Cvičení. Spočtěte energii magnetického pole kulového permanentního magnetu s konstatní magnetizací.

## Zákon zachování hybnosti a momentu hybnosti

Ze speciální relativity víme, že můžeme též očekávat zachování hybnosti. Rychlost změny mechanické hybnosti udává Lorentzova síla, pro jejíž objemovou hustotu v homogenním lineárním prostředí platí

$$\begin{aligned} f_i = \rho E_i + \epsilon_{ijk} j_j B_k = E_i \partial_k D_k + \epsilon_{ijk}(\epsilon_{jlm}\partial_l H_m - \partial_t D_j) B_k = E_i \partial_k D_k + \epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm} B_k \partial_l H_m - \epsilon_{ijk} B_k \partial_t D_j = \\ = E_i \partial_k D_k + \epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm} B_k \partial_l H_m - \epsilon_{ijk}\partial_t (D_j B_k) + \epsilon_{ijk} D_j \partial_t B_k = \\ = E_i \partial_k D_k + \epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm} B_k \partial_l H_m - \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} D_j \partial_l E_m - \epsilon_{ijk}\partial_t (D_j B_k) = \\ = E_i \partial_k D_k + \epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm} B_k \partial_l H_m + \epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm} D_k \partial_l E_m - \epsilon_{ijk}\partial_t (D_j B_k) = \\ = E_i \partial_k D_k + (\delta_{im}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{km})(B_k \partial_l H_m + D_k \partial_l E_m) - \partial_t(\epsilon_{ijk} D_j B_k) \end{aligned}$$

Po přičtení nulového členu $H_i \partial_k B_k$ a za použití předpokladu o lineárním prostředí tak dostáváme

$$f_i \ = \ \partial_k \left( E_i D_k + H_i B_k + \frac{1}{2}\delta_{ik}(E_l D_l + H_l B_l) \right) - \partial_t(\epsilon_{ijk} D_j B_k) \tag{34}$$

Za základě zkušeností se zachováním hybnosti v mechanice kontinua identifikujeme

$$\vec{g} \ = \ \vec{D} \times \vec{B} \tag{35}$$

coby hustotu hybnosti elektromagnetického pole a Maxwellův tenzor

$$T_{ik} \ = \ E_i D_k + H_i B_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}(E_l D_l + H_l B_l) \tag{36}$$

jako obdobu tenzoru mechanického napětí, což znamená, že udává plošnou hustotu toku změny hybnosti. Speciálně u stacionárních polí má tato veličina význam plošné hustoty síly (tedy tlaku) jímž nitky elektromagnetického pole tahají za náboje.

S použitím těchto veličin dostáváme zákon zachování hybnosti ve tvaru

$$\partial_t \left( \vec{p}_{\mathrm{mech}}(V) + \int_V \vec{g}\ dV \right) \ = \ \oint_{\partial V} \mathbf{T}.d\vec{S} \tag{37}$$

Pozn. V zákonu zachování energie, kde vystupovala časová derivace součinu $\vec{H}.\vec{B}$, jsme předpokládali prostředí lineární a nedispersní, kdy tatáž permeabilita platí ve všech časech (a tedy i pro pole všech frekvencí). Při úpravách vedoucích k Maxwellovu tenzoru se provádějí prostorové derivace tohoto součinu a využívá se předpokladu o lineárním a homogenním prostředí, jenž vede na rovnost $B_k \partial_i H_k = \frac{1}{2}\partial_i B_k H_k$. V nehomogenním materiálu bude na místa měnící se permitivity, či permeability, přesněji na zde se nacházející vázané proudy a náboje působit nenulová síla. V takovém případě je nejjednodušší uvažovat vázané proudy a náboje za volné, jenž se nacházejí v prostředí s materiálovými konstantami vakua.

Ve vakuu je

$$\vec{g} \ = \ \vec{D} \times \vec{B} \ = \ \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} \times \vec{H} \ = \ \frac{1}{c^2}\vec{S}\ , \tag{38}$$

tedy hustota hybnosti je svázána s tokem energie.

Příklad. Uvažujme bodový náboj nacházející se v homogenním poli $\vec{E}^0$. Elektrické pole v okolí náboje je popsáno superpozicí obou polí

$$\vec{E} \;=\; \vec{E}^1 + \vec{E}^0 \;=\; \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{E}^0 \ .$$

Maxwellův tezor má tvar

$$T_{ik} \;=\; (E_i^0 + E_i^1)(D_k^0 + D_k^1) - \frac{1}{2}\delta_{ik}(E_l^0 D_l^0 + 2E_l^0 D_l^1 + E_l^1 D_l^1)$$

a jeho tok přes sféru se středem v počátku, kde sídlí uvažovaný náboj po spočtení

$$\oint E_i^0 D_k^0 dS_k \;=\; \oint E_k^0 D_k^0 dS_i \;=\; \oint E_i^1 D_k^1 dS_k \;=\; \oint E_k^1 D_k^1 dS_i \;=\; 0,$$

$$\oint E_i^0 D_k^1 dS_k \;=\; E_i^0 \oint D_k^1 dS_k \;=\; QE_i^0$$

$$\oint \vec{E}^1 \vec{D}^0 . d\vec{S} \;=\; \oint \vec{D}^1 \vec{E}^0 . d\vec{S} \;=\; \frac{Q}{4\pi}\vec{E}^0 \oint \cos^2\theta d\Omega \ \ , \quad \oint \vec{E}^0 . \vec{D}^1 d\vec{S} \;=\; \frac{Q}{4\pi}\oint \vec{E}^0 . \vec{e}_r \vec{e}_r d\Omega \;=\; \frac{Q}{4\pi}\vec{E}^0 \oint \cos^2\theta d\Omega$$

vychází $\vec{F} = Q\vec{E}^0$.

Hybnost elektromagnetického pole jsme již jednou potkali. Při odvozování silového působení mezi dvěma proudovými smyčkami se ukázalo, že princip akce a reakce je splněn jen pokud proudy smyčkou jsou stacionání. Budí-li proudový element $\vec{J}'$ ve svém okolí magnetické pole, je síla na jiný proudový element $\vec{J}$

$$\vec{F} \;=\; \vec{J} \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{J}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\right) \;=\; \vec{J}' \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{J} . \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\right) - \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\right) \vec{J} . \vec{J}' \ . \tag{39}$$

Zatímco člen úměrný $\vec{J} . \vec{J}'$ splňuje princip akce a reakce, první člen ne. Jeho původ souvisí právě s hybností elektromagnetického pole. Uvažovaný proudový element $\vec{J}$ nesplňuje podmínku stacionarity. V nejjednodušším přiblížení jde např. o dvojici navzájem se pohybujících nábojů jejichž proudová hustota $\vec{j}$ má nenulovou divergenci, a tak člen $\partial_t \vec{D}$ je nezanedbatelný. Proto, ať již budeme používat jakýkoliv model proudového elementu $\vec{J}$, v téměř homogenním poli $\vec{B}'$ vzdáleného proudového elemntu $\vec{J}'$ znamená nestacionarita $\vec{j}$ potřebu započíst i hybnost elektromagnetického pole v blízkost $\vec{J}$.

Pro moment síly reprezentovaný antisymetrickým tenzorem

$$M_{ij} \;=\; \int (x_i f_j - x_j f_i) dV \tag{40}$$

dostáváme na základě úprav

$$x_i f_j - x_j f_i \;=\; x_i \partial_k T_{jk} - x_i \partial_t(\epsilon_{jlm} D_l B_m) - x_j \partial_k T_{ik} + x_j \partial_t(\epsilon_{ilm} D_l B_m) \;= \tag{41}$$

$$=\; \partial_k(x_i T_{jk} - x_j T_{ik}) - \delta_{ki} T_{jk} + \delta_{kj} T_{ik} - \partial_t(x_i \epsilon_{jlm} D_l B_m - x_j \epsilon_{ilm} D_l B_m) \tag{42}$$

opět rovnici kontinuity, pokud předpokládáme, že Maxwellův tenzor je symetrický. Po zúžení s $\epsilon_{nij}$ dostáváme zákon zachování momentu hybnosti

$$\partial_t \left(\vec{L}_{\mathrm{mech}}(V) + \int_V \vec{r} \times \vec{g} \ dV\right) \;=\; \oint_{\partial V} \vec{r} \times \mathbf{T} . d\vec{S} \ . \tag{43}$$

## Rovinná elektromagnetická vlna

Maxwellovy rovnice představují v Lorenzově kalibraci vlnovou rovnici pro oba potenciály. Mezi nepřeberným množstvím řešení vlnové rovnice vyniká svojí jednoduchostí tzv. rovinná vlna. Na ní uvidíme, že splnění vlnových rovnic nestačí. Jak víme, Maxwellovy rovnice dávají volnost jen vírové složce obou polí a tak určují, jak uvidíme, že vlnění je příčné.

Na základě poznámky o široké možnosti volby Lorenzovky kalibrovaného potenciálu bude rovinná elektromagnetická vlna určena jen vektorovým potenciálem

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \;=\; \vec{a}(\vec{n} . \vec{r} - ct) \ , \quad \text{a} \ \ \Phi(\vec{r}, t) = 0 \ . \tag{44}$$

Samozřejmě, to že jsme $\vec{A}$ zvolili ve tvaru rovinné vlny automaticky zaručuje, že zvolený potenciál splňuje vlnovou rovnici

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\vec{A} \;=\; |\vec{n}|^2\vec{a}\,'' - \frac{(-c)^2}{c^2}\vec{a}\,'' \;=\; 0\;, \tag{45}$$

pokud velikost vektoru $\vec{n}$ určujícího směr šíření vlny je jedna.

Lorenzova kalibrační podmínka vyžaduje, aby

$$\mathrm{div}\;\vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t\Phi \;=\; \partial_i a_i(n_k r_k - ct) \;=\; n_i a_i' = \vec{n}.\vec{a}\,' \;=\; 0\;, \tag{46}$$

kde $\vec{a}\,'$ představuje derivaci podle parametru vektorové funkce jedné proměnné $\vec{a}$. Integrací této podmínky dostáváme, že pokud $\vec{a} = 0$ nebo $\vec{a}.\vec{n} = 0$ aspoň v jediném bodě prostoru, musí pak již v celém prostoru musí platit

$$\vec{n}.\vec{A} \;=\; 0\;. \tag{47}$$

Pokud spočteme

$$\vec{E} \;=\; -\,\partial_t\vec{A} \;=\; c\,\vec{a}\,' \tag{48}$$

$$\vec{B} \;=\; -\,\nabla\times\vec{A} \;=\; \vec{n}\times\vec{a}\,'\;, \tag{49}$$

vidíme, že v každém bodě prostoru jsou $\vec{n}$, $\vec{E}$ a $\vec{B}$ na sebe navzájem kolmé a platí $c\vec{B} = \vec{n}\times\vec{E}$. Tato úměra mezi elektrickým a magnetickým polem obsahuje jako koeficient směr šíření $\vec{n}$. Proto, pokud je elektromagnetické pole superpozicí rovinných vln více směrů, tento vztah nemusí platit. Například u nejjednodušší verze stojatého vlnění jsou směry dvou harmonických rovinných vln opačné a magnetické pole v daném místě vymizí právě v okamžicích, kdy je elektrické pole maximální a naopak.

Pozn. Mluvíme o rovinné vlně proto, že místa, kde $\vec{E}$ a $\vec{B}$ nabývají stejné hodnoty, tedy místa kde parametr $\vec{n}.\vec{r} - ct$ nabývá konstantní hodnoty, jsou určena rovnicí $\vec{n}.\vec{r} = $ konst., což je rovnice roviny. Maxwellovy rovnice tedy zároveň určují analytické (jde o vlnění) i algebraické vlastnosti řešení (vlnění je příčné).

Směr vektoru $\vec{E}$ charakterizuje polarizaci vlny. Pokud je neměnný, mluvíme o lineární polarizaci. U vlny harmonického průběhu se zavádí též kruhová příp. eliptická polarizace (viz optika).

Pro rovinnou vlnu je snadné spočíst jak hustotu energie

$$w \;=\; \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\vec{E}^2 + \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\vec{B}^2\right) \;=\; \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\vec{E}^2 + c^2\vec{B}^2\right) \;=\; \epsilon_0 c^2|\vec{a}\,'|^2\;, \tag{50}$$

i Poyntingův vektor

$$\vec{S} \;=\; c\,\vec{a}\,'\times\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{n}\times\vec{a}\,'\right) \;=\; \frac{c}{\mu_0}|\vec{a}\,'|^2\vec{n} \;=\; w\,\vec{c}\;. \tag{51}$$

Tuto úměru lze chápat tak, že rovinná vlna představuje transport energie $w$ rychlostí $\vec{c} = \vec{n}c$ doprovázený hybností elektromagnetického pole $\vec{g} = w\vec{n}/c$.

Pro

$$\vec{A} \;=\; \frac{\vec{\mathcal{E}}}{c|\vec{k}|}e^{i|\vec{k}|(\vec{n}.\vec{r}-ct)} \tag{52}$$

dostáváme harmonickou rovinnou vlnu

$$\vec{E} \;=\; \vec{\mathcal{E}}e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \qquad\qquad c\vec{B} \;=\; \vec{n}\vec{\mathcal{E}}e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \tag{53}$$