Poznámky k přednášce Klasická elektrodynamika
Elektromagnetické vlny

Skalární vlnová rovnice - opakování

Rovnice

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\right) u(\vec{x}, t) = 0 \tag{1}$$

je tzv. vlnová rovnice. I když je na pravé straně této rovnice nula, má tato rovnice nenulové řešení. V teoretické mechanice jste probrali její jednorozměrnou verzi a seznámili jste se s řešením časového vývoje kmitání struny. Ve třech dimenzích je tentýž problém řešení vlnové rovnice na omezené oblasti popsán stručně takto:

$$u(\vec{x}, t) = \mathrm{Re}\sum_n \mathcal{U}_n f_n(\vec{x}) e^{-i\omega_n t},$$

$$\Delta f_n(\vec{x}) = -k_n^2 f_n(\vec{x}), \qquad \omega_n = ck_n,$$

kde $\mathcal{U}_n$ jsou amplitudy (komplexní kvůli započtení fáze) n-tého módu. Časový průběh je harmonický, ovšem jeho závislost na prostorové souřadnici je určena funkcemi $f_n(\vec{x})$. Jsou to vlastní funkce Laplaceova operátoru při vhodné okrajové podmínce, která zaručí úplnost a reálnost spektra vlastních hodnot a frekvencí. Ačkoli jde o matematický problém, je zde možno uplatnit fyzikální intuici, garantuj-li hraniční podmínky zachování energie vlny, musí se funkce $u(\vec{x}, t)$ vyvíjet jako superpozice oscilací. (Tyto vlastní funkce jsou řešení Helmholtzovy rovnice a příklady hraničních podmínek a příslušných vlastních funkcí budou následovat v části věnované Helmholtzově rovnici.)

Vlnová rovnice se nicméně jmenuje vlnová kvůli jiné třídě řešení. D'Alembertrovo řešení má v jedné dimenzi tvar

$$u(x, t) = g(x - ct) + h(x + ct),$$

a představuje úplné řešení vlnové rovnice $(\partial_{xx} - c^{-2}\partial_{tt})u(x, t) = 0$ pro $x \in I\!R$, tedy, když nejsou přítomny odrazy na koncích struny.

Ve třech dimenzích se toto řešení využije pro konstrukci tzv. rovinné vlny. Nyní je

$$u(\vec{x}, t) = g(\vec{n} \cdot \vec{x} - ct), \tag{2}$$

opačný směr šíření dosáhneme změnou směru jednotkového vektoru $\vec{n}$. Důležité je, že funkce jedné proměnné g může být libovolná. S měnícím se časem dá (2) tentýž tvar ovšem posunutý o vektor $\vec{n}ct$ oproti $t = 0$. Odsud vidíme, že jednotkový vektor $\vec{n}$ udává směr a c rychlost šíření vlny. (Ne úplně každá funkce $g(s)$ ovšem svým tvarem připomíná vlnu, porovnejte např. e^s oproti e^{-s^2}, e^{is}.)

Za zmínku stojí, že ve třech dimenzích představují funkce $r^{-1}g(r \mp ct)$ sféricky symetrické rozbíhavé (sbíhavé) řešení vlnové rovnice. V elektromagnetismu ale nabývá sférická vlna mnohem komplikovanější tvar, protože potřebujeme tranzversální vektorová pole.

Maxwellovy rovnice jako vlnová rovnice pro pole

Již jsme viděli, že zejména v Lorenzově kalibraci lze Maxwellovy rovnice chápat jako sadu vlnových rovnic. Vlnovou rovnici lze ale sestavit i pro $\vec{E}$ nebo $\vec{B}$. Snazší je druhý případ (protože div $\vec{B} = 0$):

$$-\Delta\vec{B} = \mathrm{rot\ rot}\ \vec{B} = \mathrm{rot}\ \left(\mu_0\vec{j} + c^{-2}\partial_t\vec{E}\right) = \mu_0 \mathrm{rot}\ \vec{j} + c^{-2}\partial_t \mathrm{rot}\ \vec{E} = \mu_0 \mathrm{rot}\ \vec{j} - c^{-2}\partial_{tt}\vec{B}, \tag{3}$$

tedy

$$\left(\Delta - c^{-2}\partial_{tt}\right)\vec{B} = \mu_0\,\mathrm{rot}\,\vec{j}, \tag{4}$$

$$\mathrm{div}\ \vec{B} = 0. \tag{5}$$

Elektrické pole lze získat vyřešením Maxwellovy rovnice pro $\partial_t\vec{E}$ s příslušnou počáteční podmínkou splňující Gaussův zákon. Podobnou strukturu má i vlnová rovnice pro $\vec{E}$, jen zdroje jsou složitější. Beze zdrojů pak v obou případech dostaneme sadu vlnové rovnice pro pole doplněnou o vazbu v podobě nulové divergence.

Rovinná elektromagnetická vlna

V Maxwellových rovnicích vystupují vektory. Oproti velmi snadnému výpočtu $\Delta f(\vec{n}\cdot\vec{x})$ se věci poněkud zesložití.

Maxwellovy rovnice představují v Lorenzově kalibraci vlnovou rovnici pro oba potenciály. Mezi nepřeberným množstvím řešení vlnové rovnice vyniká svojí jednoduchostí tzv. rovinná vlna. Na ní uvidíme, že splnění vlnových rovnic nestačí. Jak víme, Maxwellovy rovnice dávají volnost jen vírové složce obou polí a tak určují, jak uvidíme, že vlnění je příčné.

Na základě poznámky o široké možnosti volby Lorenzovky kalibrovaného potenciálu bude rovinná elektromagnetická vlna určena jen vektorovým potenciálem

$$\vec{A}(\vec{r},t) \;=\; \vec{a}(\vec{n}.\vec{r}-ct) \;, \quad \text{a} \;\; \Phi(\vec{r},t)=0 \;. \tag{6}$$

Samozřejmě, to že jsme $\vec{A}$ zvolili ve tvaru rovinné vlny automaticky zaručuje, že zvolený potenciál splňuje vlnovou rovnici

$$\Delta\vec{A}-\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\vec{A} \;=\; |\vec{n}|^2\vec{a}\,''-\frac{(-c)^2}{c^2}\vec{a}\,'' \;=\; 0 \;, \tag{7}$$

pokud velikost vektoru $\vec{n}$ určujícího směr šíření vlny je jedna.

Lorenzova kalibrační podmínka vyžaduje, aby

$$\mathrm{div}\;\vec{A}+\frac{1}{c^2}\partial_t\Phi \;=\; \partial_i a_i(n_k r_k-ct) \;=\; n_i a_i' = \vec{n}.\vec{a}\,' \;=\; 0 \;, \tag{8}$$

kde $\vec{a}\,'$ představuje derivaci podle parametru vektorové funkce jedné proměnné $\vec{a}$. Integrací této podmínky dostáváme, že pokud $\vec{a}=0$ nebo $\vec{a}.\vec{n}=0$ aspoň v jediném bodě prostoru, musí pak již v celém prostoru musí platit

$$\vec{n}.\vec{A} \;=\; 0 \;. \tag{9}$$

Pokud spočteme

$$\vec{E} \;=\; -\partial_t\vec{A} \;=\; c\,\vec{a}\,' \tag{10}$$

$$\vec{B} \;=\; -\nabla\times\vec{A} \;=\; \vec{n}\times\vec{a}\,' \;, \tag{11}$$

vidíme, že v každém bodě prostoru jsou $\vec{n}$, $\vec{E}$ a $\vec{B}$ na sebe navzájem kolmé a platí $c\vec{B}=\vec{n}\times\vec{E}$. Tato úměra mezi elektrickým a magnetickým polem obsahuje jako koeficient směr šíření $\vec{n}$. Proto, pokud je elektromagnetické pole superpozicí rovinných vln více směrů, tento vztah nemusí platit. Například u nejjednodušší verze stojatého vlnění jsou směry dvou harmonických rovinných vln opačné a magnetické pole v daném místě vymizí právě v okamžicích, kdy je elektrické pole maximální a naopak.

Pozn. Mluvíme o rovinné vlně proto, že místa, kde $\vec{E}$ a $\vec{B}$ nabývají stejné hodnoty, tedy místa kde parametr $\vec{n}.\vec{r}-ct$ nabývá konstantní hodnoty, jsou určena rovnicí $\vec{n}.\vec{r}=$ konst., což je rovnice roviny. Maxwellovy rovnice tedy zároveň určují analytické (jde o vlnění) i algebraické vlastnosti řešení (vlnění je příčné).

Směr vektoru $\vec{E}$ charakterizuje polarizaci vlny. Pokud je neměnný, mluvíme o lineární polarizaci. U vlny harmonického průběhu se zavádí též kruhová příp. eliptická polarizace (viz optika).

Pro rovinnou vlnu je snadné spočíst jak hustotu energie

$$w \;=\; \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\vec{E}^2+\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\vec{B}^2\right) \;=\; \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\vec{E}^2+c^2\vec{B}^2\right) \;=\; \epsilon_0 c^2|\vec{a}\,'|^2 \;, \tag{12}$$

i Poyntingův vektor

$$\vec{S} \;=\; c\,\vec{a}\,'\times\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{n}\times\vec{a}\,'\right) \;=\; \frac{c}{\mu_0}|\vec{a}\,'|^2\vec{n} \;=\; w\,\vec{c}\,. \tag{13}$$

Tuto úměru lze chápat tak, že rovinná vlna představuje transport energie w rychlostí $\vec{c}=\vec{n}c$ doprovázený hybností elektromagnetického pole $\vec{g}=w\vec{n}/c$.

Rovinná harmonická vlna

Pro

$$\vec{A} \;=\; \frac{\vec{\mathcal{E}}}{c|\vec{k}|}e^{i|\vec{k}|(\vec{n}.\vec{r}-ct)} \tag{14}$$

dostáváme harmonickou rovinnou vlnu

$$\vec{E} \;=\; \vec{\mathcal{E}}e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \qquad\qquad c\vec{B} \;=\; \vec{n}\vec{\mathcal{E}}e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \tag{15}$$

Za pozornost stojí, že předepsání průběhu elektromagnetického pole ve tvaru rovinné monochromatické vlny

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{\mathcal{E}}e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \qquad \vec{B}(\vec{r},t)=\vec{\mathcal{B}}e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \tag{16}$$

umožňuje využít faktu, že (ověřte si!) $\nabla.(\vec{\mathcal{E}}e^{i(\vec{k}.\vec{r})})=(i\vec{k}).(\vec{\mathcal{E}}e^{i(\vec{k}.\vec{r})})$ a $\nabla\times(\vec{\mathcal{E}}e^{i(\vec{k}.\vec{r})})=(i\vec{k})\times(\vec{\mathcal{E}}e^{i(\vec{k}.\vec{r})})$. Proto pro harmonickou rovinnou vlnu máme

$$\nabla\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\partial_t\vec{E} \qquad i\vec{k}\times\vec{B}=-\frac{i\omega}{c^2}\vec{E} \tag{17}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B} \qquad i\vec{k}\times\vec{E}=+i\omega\vec{B} \tag{18}$$

$$\nabla\cdot\vec{E}=0 \qquad i\vec{k}\cdot\vec{E}=0 \tag{19}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \qquad i\vec{k}\cdot\vec{B}=0 \tag{20}$$

Po zkrácení faktoru $e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}$ dostaneme podmínky transversality

$$\vec{\mathcal{E}}.\vec{k}=0\ , \quad \vec{\mathcal{B}}.\vec{k}=0\ , \tag{21}$$

dispersní relaci

$$\omega^2=c^2k^2 \tag{22}$$

a souvislost směru šíření vlny $\vec{n}=\vec{k}/|\vec{k}|$ a polí (zde se vracíme zpět od amplitud k polím, platí samozřejmě obojí)

$$c\vec{B}=\vec{n}\times\vec{E}\ , \quad \vec{E}=-\vec{n}\times c\vec{B}\ . \tag{23}$$

Hodnota elektrické a magnetické složky hustoty energie této elektomagnetické vlny byla stejná a tak

$$w=\epsilon_0|\vec{E}|^2\ , \quad \vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\vec{n}cw\ , \quad \vec{g}=\vec{D}\times\vec{B}=\vec{n}\frac{w}{c}\ . \tag{24}$$

Tyto vztahy si vykládáme, jako ilustraci přesnosu hustoty energie ($w\ \vec{c}$) a hustoty hybnosti ($\frac{w}{c^2}\ \vec{c}$) v poli rovinné vlny.

Elektromagnetické harmonické vlny na rozhraní prostředí

Chování elektromagnetické harmonické vlny na rozhraní prostředí jste si vysvětlili v optice. Připomene si, že v optice se uvažují zejména prostředí s $\mu_r=1$, takže index lomu je dán relativní permitivitou prostředí $n=\sqrt{\epsilon_r}$ a kompletně určuje směr i amplitudy prošlé a odražené vlny. Pro naše potřeby pochopení tohoto jevu nebudeme nezbytně předpokládat $\mu_r=1$.

Nejprve si připomeňme, že rozhraní je plocha a splnění rovnic požadujeme v každém bodě rozhraní. Pro rovinnou harmonickou vlnu a rovinné rozhraní to dá podmínku na úhly odrazu a lomu. Při jejich splnění pak správně spojitá pole v jednom bodě vykazují tutéž vlastnost podél celého rozhraní (jde o společný faktor $e^{i\vec{k}_\parallel\cdot\vec{x}}$). Komplikace nastává v případě totálního odrazu nebo např. plazmy, kde se vlna s danou frekvencí nemusí mít dovoleno šířit, přesněji $\vec{k}_\parallel$ je nutno doplnit komplexním $\vec{k}_\perp$ tak, aby výsledný vektor splňoval disperzní relaci daného prostředí.

Jakmile máme vyřešeny úhly a případně zmíněné komplikace, má pole podobu superpozice známých řešení do kterých dosadíme libovolný bod na rozhraní a zkoumáme splnění spojitosti elektromagnetického pole, tedy polní problém přechází na soustavou algebraických rovnic. Na jedné straně rozhraní máme pole dopadající a odražené, na druhé straně rozhraní pole prošlé. Obvykle považujeme za známé pole dopadající. Po dosazení vlastností prostředí máme tedy čtyři neznámé veličiny, polní rovnice ale při známé fázové rychlosti vlny c a směru jejího šíření umožňují nalézt např. magnetické pole z pole elektrického. Tak nám zůstávají neznámé jen vektory elektrické intenzity odražené a prošlé vlny. Pro šest složek těchto dvou vektorů máme správný počet rovnic vyplývající ze spojistosti tečných složek $\vec{E},\vec{H}$ a normálových složek $\vec{D},\vec{B}$. V případě odrazu na dokonalém vodiči máme sice jen pole odražené, zbývající stupně volnosti potřebné k vyřešení rovnic nyní ale představují plošné náboje a proudy na povrchu vodiče.

Telegrafní rovnice

Budeme uvažovat příčné vlny $\nabla\cdot\vec{E}=0$, kdy dává rotace Faradayova indukčního zákona

$$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E}=\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{j} \tag{25}$$

a po uvážení ohmické vodivosti $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ získáme **telegrafní rovnici**

$$\left(\Delta - \mu_0 \gamma \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = 0 \ . \tag{26}$$

Než přikročíme ke studiu této rovnice z hlediska šíření vln, stojí za zmínku připomenout její podobnost s rovnicí tlumeného harmonického oscilátoru. Tato analogie platí tehdy, když okrajové podmínky zajišťují, že máme co do činění se stojatými vlnami. To nastane za situace, kdy $\Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E}$ a tedy prostorový průběh $\vec{E}$ je vlastní funkcí Laplaceova operátoru. Rovnice pro amplitudu $\mathcal{E}$ takového stojatého vlnění má pak jednoduchý tvar

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\mathcal{E}} + \mu_0 \gamma \dot{\mathcal{E}} + k^2 \mathcal{E} = 0 \ . \tag{27}$$

Při nulové vodivosti tato rovnice popisuje harmonický oscilátor s frekvencí ck a detailněji se mu budeme věnovat v poslední části této přednášky. Když $\gamma > 0$ a vlnová rovnice přejde na rovnici telegrafní a evoluční rovnice (27) vede na v čase exponenciálně tlumené oscilace elektromagnetického pole v dutině vyplněné vodivým prostředím.

Rovnice (26) se z historických důvodů nazývá rovnice telegrafní, její správné chápání totiž učinilo z W. Thomsona lorda Kelvina a nejspíš nejbohatšího fyzika své doby. Nejen proto není bez zajímavosti, jak se tato rovnice objeví při studiu šíření signálu podél fenomenologicky chápaného elektrického vedení. Nechť jeho parametry na jednotku délky jsou: Kapacita C_1, indukčnost L_1, odpor R_1 a svod G_1. Rodělíme-li vedení na kousky délky dz pak pro každý kousek platí $L = L_1 dz$, $C = C_1 dz$ atd. Pro napětí ve vedení můžeme psát

$$U_n - U_{n+1} \ = \ (R + L\frac{\partial}{\partial t}) I_{n+1} \ = \ dz (R_1 + L_1 \frac{\partial}{\partial t}) I_{n+1} \tag{28}$$

a pro proud podél vedení

$$I_n - I_{n+1} \ = \ (G + C\frac{\partial}{\partial t}) U_n \ = \ dz (G_1 + C_1 \frac{\partial}{\partial t}) U_n \tag{29}$$

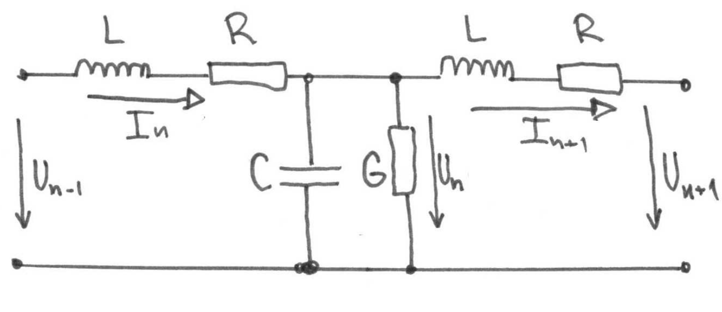
a tedy po vydělení obou rovnic délkou úseku vedení máme

$$\frac{\partial U}{\partial z} \ = \ -(R_1 + L_1 \frac{\partial}{\partial t}) I \tag{30}$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} \ = \ -(G_1 + C_1 \frac{\partial}{\partial t}) U \ , \tag{31}$$

kde jsme použili přiblížení $U_n - U_{n+1} = -dz \frac{\partial U}{\partial z}$. Zderivováním první z rovnic podle z a následným použitím druhé rovnice dostáváme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - L_1 C_1 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - (R_1 C_1 + L_1 G_1) \frac{\partial U}{\partial t} - RG\, U = 0 \ . \tag{32}$$



Obrázek 1: Náhradní schéma krátkého úseku dlouhého (koaxiálního) vedení se spojitě rozloženými parametry.

Až v oddíle o TEM vlnách zjistíme, že podél dokonalého vedení konstatního průřezu se vlny šíří rychlostí světla c, porovnáním s touto rovnicí zjistíme, že $L_1 C_1 = 1/c^2$. Podmínkou je, aby proudy ve vedení tekly po povrchu, což pro ideální vedení je jasný důsledek skinového jevu.

Použitím předpisu

$$\vec{E} = \vec{\mathcal{E}} e^{i(\vec{k}.\vec{r} - \omega t)} \tag{33}$$

přejde telegrafní rovnice na dispersní vztah

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} + i\omega\gamma\mu_0 \;=\; 0 \tag{34}$$

Ten lze chápat jako rovnici pro komplexní proměnné k a nebo ω. Nejužitečnější je případ, kdy ω je reálná frekvence určená harmonickým zdrojem s pevnou amplitudou, zatímco vlny se šíří s komplexním vlnovým vektorem

$$\vec{k} \;=\; \vec{n}\frac{\omega}{c}\sqrt{1 + i\frac{c^2\mu_0\gamma}{\omega}} \;=\; \vec{n}\frac{\omega}{c}\sqrt{1 + i\left(\frac{\lambda_0}{2\pi\delta}\right)^2}\,, \qquad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}} \tag{35}$$

kde δ je hloubka vniku (elektro-)magnetického pole do vodivého matriálu dle skinového jevu. V optice se studuje dopad elektromagnetické vlny na rovinné rozhraní mezi vakuem a vodivým materiálem. Zatímco ve vakuu dopadající i odražená vlna vykazuje netlumené šíření s reálným vlnovým vektorem $\vec{k} = \vec{n}\omega/c$, procházející vlna je charakterizována výše uvedeným komplexním vlnovým vektorem. Zajímavé jsou dvě limity, $\lambda \gg \delta$, kdy jde vlastně o skinový jev a případ $\lambda \ll \delta$, kdy je vlna tlumena jen pomalu. Tehdy s použitím $\sqrt{1+x} \sim 1 + x/2$ máme

$$\vec{k}.\vec{r} \;\sim\; \vec{n}.\vec{r}\frac{\omega}{c}(1 + \frac{i}{2}\frac{c^2\mu_0\gamma}{\omega}) \;=\; \vec{n}.\vec{r}\frac{\omega}{c}\left(1 + \frac{i}{2}\left(\frac{\lambda_0}{2\pi\delta}\right)^2\right) \tag{36}$$

a tedy

$$e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \;\sim\; e^{i(\vec{n}.\vec{r}-ct)\omega/c}\; e^{-\vec{n}.\vec{r}\; c\mu_0\gamma/2}\;. \tag{37}$$

Faktor $e^{-\vec{n}.\vec{r}\; c\mu_0\gamma/2}$ určuje, na jaké charakteristické vzdálenosti je uvnitř ($\vec{n}.\vec{r} > 0$) vodivého materiálu vlna utlumena.

Plasmová frekvence

Z rovnice (25) vyplývá ještě jeden důležitý případ šíření elektromagnetické vlny v prostředí.

Předpokládáme, že v prostředí jsou s koncentrací n přítomny náboje q s hmotností m_q, ovšem jsou vyváženy stejně koncentrovanými nehybnými náboji opačného znaménka. Budeme předpokládat, že uvažované náboje nevytvářejí podstatnou nábojovou hustotu (použitím Gaussovy věty lze vidět, že tedy potřebujeme také předpokládat příčnost uvažovaných elektromagnetických vln). Pohybová rovnice pro zrychlení částice pod vlivem elektrického pole má tvar

$$m_q\,\dot{\vec{v}} \;=\; \vec{E}q\;. \tag{38}$$

Připomeňme si zde, že v rámci Drudeho modelu

$$m_q\left(\dot{\vec{v}} + \frac{1}{\tau}\vec{v}\right) \;=\; \vec{E}q\;. \tag{39}$$

lze porozumět Ohmovu zákonu jako disipačnímu jevu, kde se elektrony brzdí s charakteristickou časovou konstantou τ – při malých frekvencích lze zanedbat akceleraci a pozorujeme úměru mezi elektrický polem a proudem.

Dále popisované chování plasmy pak odpovídá situaci, kdy tento čas je mnohem delší než frekvence a jejich koordinovaný pohyb nosičů náboje vytváří proudovou hustotu

$$\vec{j} \;=\; nq\vec{v}\,, \tag{40}$$

a místo obvyklého Ohmova zákona je pravá strana rovnice (25) dána vztahem

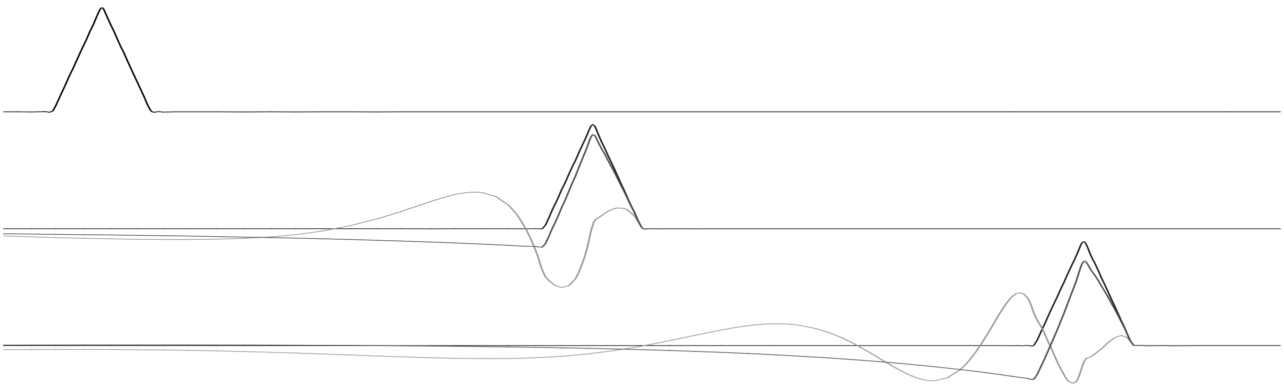
$$\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{j} \;=\; \frac{\mu_0 n q^2}{m_q}\vec{E} \tag{41}$$

a nehomogenní vlnová rovnice (25) poté přejde na rovnici

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\mu_0 n q^2}{m_q}\right)\vec{E} = 0\;. \tag{42}$$

Té po náhradě $\Delta \to -k^2$ a $\partial^2/\partial t^2 \to -\omega^2$ odpovídá rovnice

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}\right)\vec{E} = 0 \tag{43}$$



Obrázek 2: Šíření vlny v prosředí bez disperse a v prostředí s dvěma různě vysokými plasmovými frekvencemi.

a tedy dispersní vztah

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}\ , \quad \omega_p^2 = c^2 \frac{\mu_0 n q^2}{m_q} = \frac{n q^2}{\epsilon_0 m_q}\ . \tag{44}$$

Z tohoto vztahu vidíme, že prostředí s náboji dovoluje šíření elektromagnetických vln (k reálné) pouze nad plasmovou frekvencí, jež roste s koncentrací těchto nábojů. Na Obrázku 2 je vidět jak v prostředí, v němž neplatí úměra $\omega = ck$ dochází k rozšiřování vlnových balíků. Skutečnost, že na nejvyšších frekvencích $\omega \gg \omega_p$ dodržuje dispersní relace (44)tuto úměru, vede k tomu, že čela vln na obrázku se šíří stejnou rychlostí – rychlostí světla.

Vztah (44) lze zapsat také v podobě

$$\omega(k) = \sqrt{\omega_p^2 + c^2 k^2}. \tag{45}$$

Lze si snadno představit, že i u dalších prostředí bude vztah mezi frekvencí a vlnovým vektorem odlišný od $\omega = c|\vec{k}|$ a tak se zde budou odlišovat fázová rychlost $v_f = \omega(k)/k$ a rychlost grupová $v_g = d\omega(k)/dk$ (závisí-li ω i na směru $\vec{k}$, je situace ještě komplikovanější). Význam těchto rychlostí si ilustrujeme právě na příkladě našeho modelu odvození plazmové frekvence.

Předpokládejme, že původní rovinná vlna $e^{ik(z-v_f t)} = e^{i(kz-\omega t)}$ vykazující fázovou rychlost v_f (exponent má význam fáze), která původně rovnoměrně vyplňovala celý prostor, je nyní modulována obálkou $g(z - v_g t)$ posouvající se rychlostí v_g, takže

$$\vec{E}(x,t) = \vec{\mathcal{E}} g(z - v_g t) e^{ik(z-v_f t)}. \tag{46}$$

Pro vlnovou rovnici (např. když $\omega_p = 0$), která nevykazuje disperzi, položíme $v_f = v_g = \omega/k$ a dostaneme d'Alembertrovo řešení. My ovšem předpokládáme rovnici (42) a dosazením harmonické vlny s obálkou po provední druhé derivace součinu funkcí dostaneme

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}\right)\vec{E}(x,t) = \left[\left(k^2\left(v_f^2 - c^2\right) - \omega_p^2\right) + 2ik\left(c^2 - v_f v_g\right)\frac{g'}{g} + (c^2 - v_g^2)\frac{g''}{g}\right]\frac{\vec{E}(x,t)}{c^2} = 0 \tag{47}$$

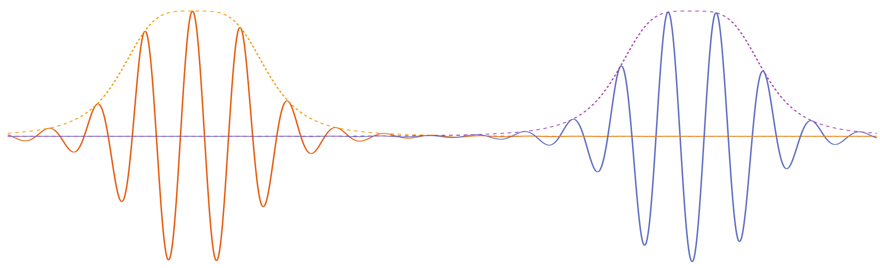
Pokud předpokládáme, že se obálka mění na délce podstatně větší, než je vlnová délka $2\pi/k$ můžeme zanedbat $|g''|$. Splnění rovnice je pak možné dosáhnout vhodnou volbou konstant v_f a v_g. Vyjde

$$v_f^2 = c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2} = \frac{\omega^2}{k^2}, \quad v_g = \frac{c^2}{v_f} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}, \tag{48}$$

tedy přesně podle návodu $v_f = \omega(k)/k$, $v_g = d\omega(k)/dk$. Opět vidíme, že šíření vln vyžaduje $\omega^2 > \omega_p^2$ a že v prostředí (41) splňuje rychlost šíření vlnových balíků (informace) $v_g < c$, zatímco fázová rychlost $v_f > c$.

TEM vlna podél vedení

Rovinná vlna, lhostejno zda harmonického či obecného profilu, pro nás představuje zatím jediné známé řešení úplných Maxwellových rovnic ve vakuu. Kolmo ke směru šíření je ovšem hodnota polí $\vec{E}$ a $\vec{B}$



Obrázek 3: Ilustrace vývoje vlnového klubka s harmonickým průběhem a obálkou ve tvaru impulsu v prostředí s odlišnou grupovou a fázovou rychlostí.

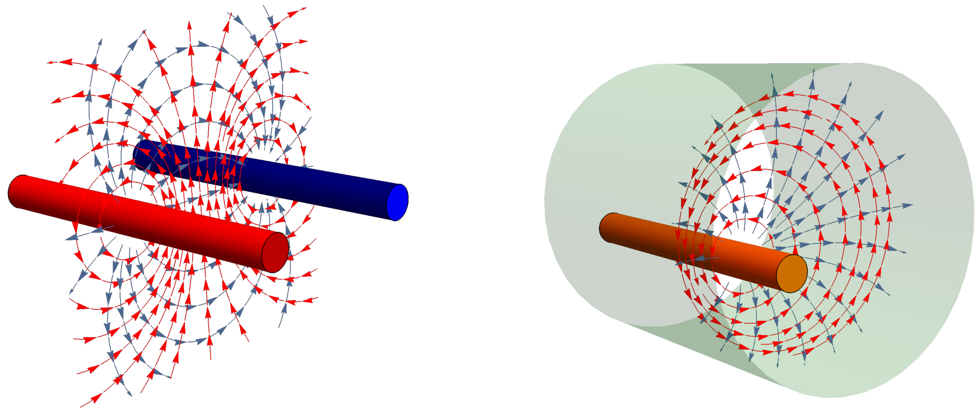
rovinné vlny konstantní. Chceme-li nalézt vlnu šířici se podél přímého vedení tvořeného dvěma vodiči, bude se elektrická intezita v kolmém směru měnit a tak očekáváme

$$\vec{E} \;=\; \vec{\mathcal{E}}(x,y)e^{i(kz-\omega t)} \;. \tag{49}$$

V analogii s elektrostatickým polem předpokládáme $\vec{\mathcal{E}}(x,y) = \nabla\psi(x,y)$ (a očekáváme, že ψ bude na povrchu vodičů konstantí) a tedy

$$\vec{E} \;=\; \nabla\psi(x,y)e^{i(kz-\omega t)} \;. \tag{50}$$

Neznámou funkci značíme ψ proto, že nepředstavuje elektrický potenciál (ten např. Coulombovské kalibraci vymizí). *Cvičení*: Nalezněte $\vec{A}$ a Φ pro uvedené pole.



Obrázek 4: Dva rovnoběžné vodiče a jejich elektrické a magnetické pole. Siločáry obou polí leží u TEM vlny v rovině kolmé ke směru šíření vlny. Jeden z vodičů může obklopovat ten druhý.

Požadavek div$\vec{E} = 0$ dává s použitím $\vec{e}_z.\nabla\psi(x,y) = 0$ rovnici

$$\Delta\psi(x,y) \;=\; 0 \;. \tag{51}$$

Magnetické pole nalezneme z rovnice $-\partial_t\vec{B} = \nabla\times\vec{E}$ při použití $\partial_t \to -i\omega$

$$\vec{B} \;=\; \frac{k}{\omega}\vec{e}_z \times \nabla\psi(x,y)e^{i(kz-\omega t)} \;. \tag{52}$$

To, že elektrické i magnetické pole je příčné vzhledem ke směru šíření vlny vede k označení tohoto pole – TEM. Takovéto pole automaticky splňuje $\nabla.\vec{B} = 0$ a z Ampérova zákona $\partial_t\vec{E} = c^2\nabla\times\vec{B}$ dostáváme dispersní vztah

$$\omega^2 = c^2k^2 \;, \tag{53}$$

tedy stejnou rovnici jakou máme pro rovinné vlny.

Abychom mohli mluvit o vlnách šířících se podél vodiče, musí elektrické pole $\vec{E} \sim \nabla\psi$ na povrchu vodiče být kolmé na jeho povrch. Tímto povrchem tedy může být libovolná válcová plocha $\psi(x,y) =$ konst. Z elektrostatiky známe řešení Laplaceovy rovnice uvnitř koaxiálního vedení a z matematiky pak konstrukci potenciálu skrze holomorfní funkce popisující paralelní vedení ze dvou vodičů kruhového průřezu [Kvasnica, úloha III.16]. Oba tyto případy můžeme skrze (50,52) povýšit na elektromagnetické pole šířící se podél vedení. Vyjme-li z koaxiálního vedení vnitřní vodič, je příslušné řešení Laplaceovy rovnice $\psi =$ konst., $\nabla\psi = 0$ a tedy TEM vlna se nemůže šířit vlnovodem.

Helmholtzova rovnice

Vlnová rovnice ve frekvenčním obraze, tedy po nahrazení $\partial_{tt} \to -\omega^2$

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right) u(\vec{x},\omega) = 0 \tag{54}$$

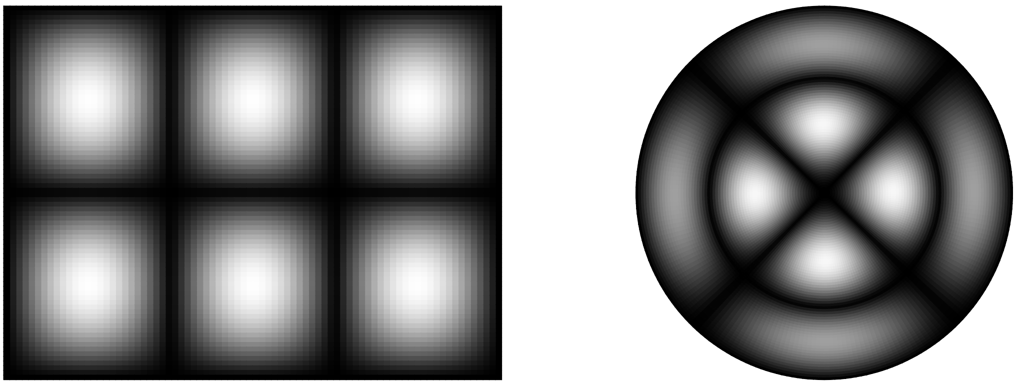
se jmenuje po Helmholtzovi. Pokud by na pravé straně rovnice vystupoval zdroj vlnění, šlo by o úlohu při níž bychom hledali šíření vln dané frekvence na nějaké oblasti. Homogenní verse Helmholtzovy rovnice představuje úlohu na hledání vlastních funkcí a vlastních hodnot Laplaceova operátoru na nějaké oblasti za daných okrajových podmínek. Ty při hledání řešení homogenní Helmhotzovy rovnice hrají klíčovou roli a úzce souvisejí s tím, jaký fyzikální problém řešíme. Pokud $u(\vec{x},\omega)$ představuje výchylku membrány tvaru Ω, je obvyklé předpokládat, že na kraji $\partial\Omega$ membrány je výchylka nulová (v analogii s membránou bubnu). Řešení Helmholtzovy rovnice v tomto případě má pro obdélníkovou membránu $x \in (0,a)$, $y \in (0,b)$ tvar

$$u(x,y) = u_0 \sin(\frac{\pi}{a} mx) \sin(\frac{\pi}{b} ny) \ , \qquad \frac{\omega_{mn}^2}{c^2} = \left(m\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n\frac{\pi}{b}\right)^2 \tag{55}$$

zatímco pro kruhovou membránu o poloměru a

$$u(r,\phi) = u_0 J_m(k_{nm} r) e^{im\phi} \ , \qquad \frac{\omega_{mn}^2}{c^2} = k_n^2 \ , \tag{56}$$

kde k_{nm} se volí tak, aby na okraji memrány $r = a$ vymizela Besselova funkce $J_m(k_{nm}a)$, tzn., že součin ak_{nm} nabývá hodnoty n-tého kořene funkce J_m. Protože tyto funkce představují též amplitudu stojatého vlnění čtvercové a kruhové membrány, lze jim dobře porozumět jsou-li znázorněny graficky, ako např. na Obrázku 7, kde je jasem znázorněna amplituda stojatého vlnění. Vidíme, že počet uzlů v obou směrech je dán indexy m a n.



Obrázek 5: Příklad stojatého vlnění membrány obdélníkového a kruhového tvaru.

Hledání vlastních funkcí operátorů jako je ten Laplaceův je důležitou partií matematiky a ukazuje se, že klíčovou roli hrají okrajové podmínky. U vlnění membrány (a také struny s pevnými konci) jde o tzv. Dirichletovu hraniční podmínku $u(\partial\Omega) = 0$. Budeme-li zkoumat šíření zvuku v objemu s pevnými stěnami, zjistíme, že rychlost tekutiny (přesněnji zrychlení, ale to pro v čase harmonické průběhy není třeba příliš odlišovat) je úměrná gradientu tlaku. Popisuje-li tedy šíření zvuku vlnová rovnice pro skalární veličinu (tlak) je hraniční podmínka taková, že derivace tlaku na hranici musí k ní být tečná – tečná musí být totiž rychlost tekutiny u stěn nádoby. Například v dutině tvaru kvádru $x \in (0,a)$,$x \in (0,b)$,$z \in (0,c)$ máme pak vlastní funkce (a příslušné rezonanční frekvence)

$$u(x,y,z) = u_0 \cos(\frac{\pi}{a} mx) \cos(\frac{\pi}{b} ny) \cos(\frac{\pi}{b} qz) \ , \qquad \frac{\omega_{mnq}^2}{v^2} = \left(m\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(q\frac{\pi}{c}\right)^2 \tag{57}$$

Podmínka $\vec{n}.\nabla u(\partial\Omega) = 0$ se nazývá Neumannova hraniční podmínka.

Tyto odstavce mají za cíl připomenout jisté partie mechaniky a související oblasti matematiky, především ale mají ilustrovat skutečnost, že řešení homogenní Helmholtzovy rovnice představují stojaté vlnění. Frekvence stojatého vlnění v různě tvarovaných dutinách a membránách pak velmi souvisejí s vlastními funkcemi Laplaceova operátoru na dané oblasti za konkrétních okrajových podmínek. Pro komplikovanější tvary oblastí často není možné přesná řešení nalézt a přicházejí na řadu přibližné metody.

TM vlna

Oproti TEM vlně se liší jistou podélnou složkou elektrického pole $\chi(x, y)\vec{e}_z$

$$\vec{E} \;=\; \left(\nabla\psi(x,y) + \frac{1}{ik}\chi(x,y)\vec{e}_z\right) e^{i(kz-\omega t)} \;, \tag{58}$$

přičemž to, že požadujeme neměnný příčný profil vlny podél celého vedení vede k tomu, že obě funkce ψ a χ nezávisí na z.

Místo čtyř Maxwellových rovnic můžeme požadovat splnění následujících tří rovnic

$$\nabla\vec{E} = 0 \tag{59}$$

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{E} = 0 \tag{60}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{i\omega}\nabla\times\vec{E} \;, \tag{61}$$

kde (61) představuje Faradayův zákon pro harmonická pole a automaticky vede na nedivergentní pole $\vec{B}$. Podmínka (59) vede na

$$\Delta\psi + \chi \;=\; 0 \tag{62}$$

a vyjasňuje přítomnost faktoru ik před χ v (58). Protože na souřadnici z závisí jen fáze vlny, ve vztahu $\Delta fg = f\Delta g + 2\nabla f.\nabla g + g\Delta f$, kde $g = e^{i(kz-\omega t)}$, vymizí součin gradientů a dostáváme

$$\Delta\vec{E} \;=\; \Delta(\nabla\psi e^{i(kz-\omega t)}) + \frac{1}{ik}\Delta(\chi e^{i(kz-\omega t)})\vec{e}_z \;=\; \nabla(\Delta\psi - k^2\psi)e^{i(kz-\omega t)} + \frac{1}{ik}(\Delta\chi - k^2\chi)\;. \tag{63}$$

Aby byla splněna vlnová rovnice (60) musí platit

$$\Delta\psi - k^2\psi + \frac{\omega^2}{c^2}\psi = 0 \tag{64}$$

a zároveň

$$\Delta\chi - k^2\chi + \frac{\omega^2}{c^2}\chi = 0 \;, \tag{65}$$

protože tyto dvě rovnice představují vlnové rovnice pro příčnou resp. podélnou složku elektrického pole. Nejprve vyřešíme rovnici (64) tím, že budeme požadovat, aby funkce ψ byla řešením homogenní Helmholtzovy rovnice

$$\Delta\psi + \lambda^2\psi = 0 \tag{66}$$

a platil dispersní vztah

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \;. \tag{67}$$

Z rovnic (66) a (62) vidíme, že

$$\chi(x,y) = \lambda^2\psi(x,y) \tag{68}$$

a χ tedy samozřejmě splňuje (65). Konečně můžeme spočíst průběh magnetického pole z (61)

$$\vec{B} \;=\; \frac{k}{\omega}(1 + \frac{\lambda^2}{k^2})\vec{e}_z\times\vec{E} \;, \tag{69}$$

neboť s použitím $\nabla\times f\vec{A} = (\nabla f)\times A + f\nabla\times A$, $\nabla\times\nabla f = 0$ a $\nabla e^{i(kz-\omega t)} = ik\vec{e}_z e^{i(kz-\omega t)}$ dostáváme

$$\nabla\times\left(\nabla\psi(x,y) + \frac{1}{ik}\chi(x,y)\vec{e}_z\right)e^{i(kz-\omega t)} \;=\; (ik\vec{e}_z\times\nabla\psi + \frac{1}{ik}\nabla\chi\times\vec{e}_z)e^{i(kz-\omega t)} \;=\; ik(1+\frac{\lambda^2}{k^2})\vec{e}_z\times\vec{E} \tag{70}$$

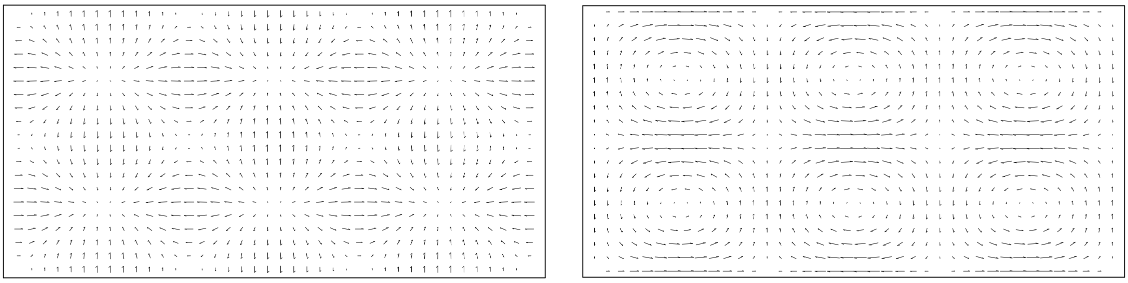
Tato vlna má představovat elektromagnetické pole šířící se podél přímého dutého vodiče. Hraniční podmínky jsou a) vymizení tečných složek $\vec{E}$ b) kolmých složek $\vec{B}$. První podmínka vede na Dirichletovu podmínku pro ψ

$$\psi(\vec{x}) = 0 , \qquad \vec{x} \in \partial\Omega \tag{71}$$

a ze vztahu (69) vidíme, že tatáž podmínka zaručí vymizení kolmé složka magnetického pole na hranici. Tečná složka magnetického pole dává proudy tekoucí po povrchu vodiče.

Dosadíme-li za ψ známá řešení Helmholtzovy rovnice pro obdélník (57) nebo kruh (56) dostaneme tvar TM vlny ve vlnovodu s příslušným průřezem.

Dispersní vztah (67) je tentýž jako pro dispersi v důsledku nenulové plasmové frekvence – opět existuje nejnižší frekvence, jež se vlnovodem může šířit. Místo koncentrace nábojů nyní rozhodují rozměry vlnovodu, z rozměrových důvodů totiž platí, že $\lambda \sim D^{-1}$, kde D je charakteristický rozměr průřezu vlnovodu.



Obrázek 6: Příčné složky elektrické intenzity (vlevo) a magnetického (vpravo) pole TM_{32}. Tyto složky jasně splňují příslušné okrajové podmínky.

TE vlna

Ve vakuu jsou Maxwellovy rovnice symetrické vůči duální transformaci

$$\vec{E} \rightarrow c\vec{B} , \tag{72}$$

$$\vec{B} \rightarrow -\frac{1}{c}\vec{E} . \tag{73}$$

S použitím této transformace dostáváme, že také elektromagnetické pole

$$\vec{B} = \left(\nabla\psi'(x,y) + \frac{\lambda^2}{ik}\psi'(x,y)\vec{e}_z\right) e^{i(kz-\omega t)} \tag{74}$$

$$\vec{E} = -\frac{c^2 k}{\omega}(1+\frac{\lambda^2}{k^2})\vec{e}_z \times \vec{B} , \tag{75}$$

je řešením polních Maxwellových rovnic, splňuje-li ψ' Helmholtzovu rovnici (66) a platí-li dispersní vztah (67). Tentokrát je na směr šíření kolmá elektrická složka. Aby na povrchu vodiče vymizela tečná složka, je třeba, aby zde vymizela normálová derivace $\vec{n}.\nabla\psi'$. To proto, že $\vec{e}_z \times \vec{n}$ je vektor tečný k povrchu vodiče a $\vec{B} \sim \vec{e}_z \times \nabla\psi'$. Zároveň tato podmínka je nezbytná pro vymizení normálové složky magnetického pole na povrchu vodiče. I když ψ' musí být podobně jako u TM vlny řešením Helmholtzovy rovnice, okrajové podmínky se liší – místo Dirichletovy teď máme podmínku Neumannovu.

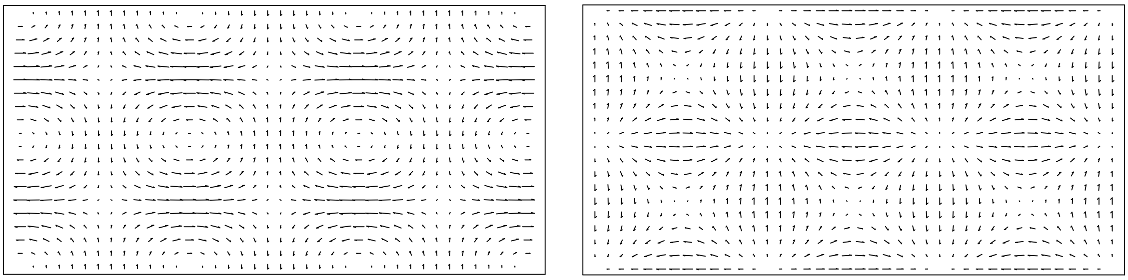
Uvážíme-li řešení řešením Helmholtzovy rovnice na obdélníku $x \in (0,a), y \in (0,b)$ za Neumannovy okrajové podmínky

$$\psi'(x,y) = \psi'_0 \cos(\frac{\pi}{a}mx)\cos(\frac{\pi}{b}ny) , \qquad \frac{\omega_{mn}^2}{c^2} = \left(m\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n\frac{\pi}{b}\right)^2 , \tag{76}$$

vidíme, že přes značnou podobnost s řešením (57), je tu podstatná ta odlišnost, že zatímco pro (57) a tedy TM vlnu bylo potřeba aby součin $mn > 0$, stačí pro nenulovost TE vlny, aby $m + n > 0$. Speciálně tedy existuje TE_{10} vlna pro případ $m = 1, n = 0$. Je-li a ten větší z rozměrů obdélníkového průřezu, určuje tato vlna nejnižší frekvenci ω_{10}, jež se může obdélníkovým vlnovodem šířit.

Za zmínku stojí, že TE_{n0} vlnu v obdélníkovém vlnovodu lze získat složením pouhých dvou rovinných vln shodné polarizace a amplitudy, ale s mírně odchýlenými vlnovými vektory $\vec{k}_\pm = k_z\vec{e}_z \pm k_x\vec{e}_x$ (viz příklad na cvičení). To umožňuje chápat netriviální dispersní vztah pro šíření vlny jako důsledek odrazů vln na stěnách vlnovodu – část pole podléhá stojatému vlnění – pak nepřekvapí, že vlny ve vlnovodu souvisí s Helmohotzovou rovnicí.

Poyntingův vektor TE i TM vlny lze snadno spočíst a představuje kombinaci toku výkonu podél osy z vlnovodu a přelévání (jalové složky výkonu) v příčném směru.



Obrázek 7: Příčné složky elektrické intenzity (vlevo) a magnetického (vpravo) pole TE_{32}.

Elektromagnetický rezonátor

Podobně jako zvukové vlny v uzavřené dutině, mohou i elektromagnetické vlny vytvořit ve vodivé dutině stojaté vlnění. Pro jednoduchost budeme uvažovat dutý vodič konstantního profilu. Ten tvoří vlnovod délky h, jenž je na obou koncích uzavřen kolmou vodivou rovinou. Okamžitě vidíme, že vhodným složením TE resp. TM vln stejné polarizace ale s opačnými vlnovými vektory $k_1 = -k_2$, jimž kvůli přítomnosti k^2 v dispersním vztahu přísluší tatáž frekvence, dostaneme stojaté vlnění. Proces je totiž naprosto tentýž jako v případě stojatého vlnění struny. Protože pro TE i TM vlnu ve vlnovodu platí $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \lambda^2$ a zároveň příčná složka elektrického pole stojatého vlnění podél vlnovodu musí na koncích mít uzly, vychází, že součin $kh = q\pi$ musí být celočíselným násobkem π, tedy $\omega^2 = c^2\left((q\pi/h)^2 + \lambda^2\right)$. Použijeme-li vztah (57) pro obdélníkový vlnovod $\lambda^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$ dostaneme

$$\frac{\omega_{mnq}^2}{c^2} = \left(m\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(q\frac{\pi}{h}\right)^2 , \tag{77}$$

kde alespoň dvě z celých čísel m, n, q musejí být nenulová – TE vlna potřebuje aspoň jedno nenulové, druhé nenulové potřebujeme na rezonanci podél směru šíření této vlny. Kvůli symetrii problému jsou ovšem jednotlivé směry záměnné a ne nezbytně musí být q nenulové a souviset s počtem uzlů ve směru šíření. Detaily naleznete např. v [Kvasnica].