Poznámky k přednášce Klasická elektrodynamika
Elektromagnetické vlny

Skalární vlnová rovnice - opakování

Rovnice
$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\right) u(\vec{x},t) = 0 \tag{1}$$
je tzv. vlnová rovnice. I když je na pravé straně této rovnice nula, má tato rovnice nenulové řešení. V teoretické mechanice jste probrali její jednorozměrnou verzi a seznámili jste se s řešením časového vývoje kmitání struny. Ve třech dimenzích je tentýž problém řešení vlnové rovnice na omezené oblasti popsán stručně takto:
$$u(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\,\sum_n \mathcal{U}_n f_n(\vec{x}) e^{-i\omega_n t},$$
$$\Delta f_n(\vec{x}) = -k_n^2 f_n(\vec{x}), \qquad \omega_n = ck_n,$$
kde $\mathcal{U}_n$ jsou amplitudy (komplexní kvůli započtení fáze) n-tého módu. Časový průběh je harmonický, ovšem jeho závislost na prostorové souřadnici je určena funkcemi $f_n(\vec{x})$. Jsou to vlastní funkce Laplaceova operátoru při vhodné okrajové podmínce, která zaručí úplnost a reálnost spektra vlastních hodnot a frekvencí. Ačkoli jde o matematický problém, je zde možno uplatnit fyzikální intuici, garantuj-li hraniční podmínky zachování energie vlny, musí se funkce $u(\vec{x},t)$ vyvíjet jako superpozice oscilací. (Tyto vlastní funkce jsou řešení Helmholtzovy rovnice a příklady hraničních podmínek a příslušných vlastních funkcí budou následovat v části věnované Helmholtzově rovnici.)

Vlnová rovnice se nicméně jmenuje vlnová kvůli jiné třídě řešení. D'Alembertrovo řešení má v jedné dimenzi tvar
$$u(x,t) = g(x-ct) + h(x+ct),$$
a představuje úplné řešení vlnové rovnice $(\partial_{xx} - c^{-2}\partial_{tt})u(x,t) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$, tedy, když nejsou přítomny odrazy na koncích struny.

Ve třech dimenzích se toto řešení využije pro konstrukci tzv. rovinné vlny. Nyní je
$$u(\vec{x},t) = g(\vec{n}\cdot\vec{x} - ct), \tag{2}$$
opačný směr šíření dosáhneme změnou směru jednotkového vektoru $\vec{n} \to -\vec{n}$. Důležité je, že funkce jedné proměnné g může být libovolná. S měnícím se časem dá (2) tentýž tvar ovšem posunutý o vektor $\vec{n}ct$ oproti $t = 0$. Odsud vidíme, že jednotkový vektor $\vec{n}$ udává směr a c rychlost šíření vlny. (Ne úplně každá funkce $g(s)$ ovšem svým tvarem připomíná vlnu, porovnejte např. e^s oproti e^{-s^2} nebo $\cos s$.)

Za zmínku stojí, že ve třech dimenzích představují funkce $r^{-1}g(r \mp ct)$ sféricky symetrické rozbíhavé (sbíhavé) řešení vlnové rovnice. V elektromagnetismu ale nabývá sférická vlna mnohem komplikovanější tvar, protože potřebujeme transverzální vektorová pole.

Maxwellovy rovnice jako vlnová rovnice pro pole

Již jsme viděli, že zejména v Lorenzově kalibraci lze Maxwellovy rovnice chápat jako sadu vlnových rovnic. Vlnovou rovnici lze ale sestavit i pro $\vec{E}$ nebo $\vec{B}$. Snazší je druhý případ (protože div $\vec{B} = 0$):
$$-\Delta\vec{B} = \mathrm{rot\ rot}\ \vec{B} = \mathrm{rot}\ \left(\mu_0\vec{j} + c^{-2}\partial_t\vec{E}\right) = \mu_0 \mathrm{rot}\ \vec{j} + c^{-2}\partial_t \mathrm{rot}\ \vec{E} = \mu_0 \mathrm{rot}\ \vec{j} - c^{-2}\partial_{tt}\vec{B}, \tag{3}$$
tedy
$$\left(\Delta - c^{-2}\partial_{tt}\right)\vec{B} = \mu_0\,\mathrm{rot}\ \vec{j}, \tag{4}$$
$$\mathrm{div}\ \vec{B} = 0. \tag{5}$$
Elektrické pole lze získat vyřešením Maxwellovy rovnice pro $\partial_t\vec{E}$ s příslušnou počáteční podmínkou splňující Gaussův zákon. Podobnou strukturu má i vlnová rovnice pro $\vec{E}$, jen zdroje jsou složitější:
$$\left(\Delta - c^{-2}\partial_{tt}\right)\vec{E} = \mu_0\,\partial_{\mathrm{t}}\ \vec{j} + \frac{1}{\epsilon_0}\nabla\rho. \tag{6}$$

Beze zdrojů pak v obou případech dostaneme sadu vlnové rovnice pro pole doplněnou o vazbu v podobě nulové divergence.

Rovinná elektromagnetická vlna

V Maxwellových rovnicích vystupují vektory. Oproti velmi snadnému výpočtu $\Delta f(\vec{n}\cdot\vec{x})$ se věci poněkud zesložití.

Maxwellovy rovnice představují v Lorenzově kalibraci vlnovou rovnici pro oba potenciály. Mezi nepřeberným množstvím řešení vlnové rovnice vyniká svojí jednoduchostí tzv. rovinná vlna. Na ní uvidíme, že splnění vlnových rovnic nestačí. Jak víme, Maxwellovy rovnice dávají volnost jen vírové složce obou polí a tak určují, jak uvidíme, že vlnění je příčné.

Na základě poznámky o široké možnosti volby Lorenzovsky kalibrovaného potenciálu bude rovinná elektromagnetická vlna určena jen vektorovým potenciálem

$$\vec{A}(\vec{r},t) \;=\; \vec{a}(\vec{n}.\vec{r}-ct)\ , \quad \text{a} \;\; \Phi(\vec{r},t)=0\ . \tag{7}$$

Samozřejmě, to že jsme $\vec{A}$ zvolili ve tvaru rovinné vlny automaticky zaručuje, že zvolený potenciál splňuje vlnovou rovnici

$$\Delta\vec{A}-\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\vec{A} \;=\; |\vec{n}|^2\vec{a}\,''-\frac{(-c)^2}{c^2}\vec{a}\,'' \;=\; 0\ , \tag{8}$$

pokud velikost vektoru $\vec{n}$ určujícího směr šíření vlny je jedna.

Lorenzova kalibrační podmínka vyžaduje, aby

$$\mathrm{div}\ \vec{A}+\frac{1}{c^2}\partial_t\Phi \;=\; \partial_i a_i(n_k r_k-ct) \;=\; n_i a_i' = \vec{n}.\vec{a}\,' \;=\; 0\ , \tag{9}$$

kde $\vec{a}\,'$ představuje derivaci podle parametru vektorové funkce jedné proměnné $\vec{a}$. Integrací této podmínky dostáváme, že pokud $\vec{a}=0$ nebo $\vec{a}.\vec{n}=0$ aspoň v jediném bodě prostoru, musí pak již v celém prostoru musí platit

$$\vec{n}.\vec{A} \;=\; 0\ . \tag{10}$$

Pokud spočteme

$$\vec{E} \;=\; -\partial_t\vec{A} \;=\; c\,\vec{a}\,' \tag{11}$$

$$\vec{B} \;=\; -\nabla\times\vec{A} \;=\; \vec{n}\times\vec{a}\,'\ , \tag{12}$$

vidíme, že v každém bodě prostoru jsou $\vec{n}$, $\vec{E}$ a $\vec{B}$ na sebe navzájem kolmé a platí $c\vec{B}=\vec{n}\times\vec{E}$. Tato úměra mezi elektrickým a magnetickým polem obsahuje jako koeficient směr šíření $\vec{n}$. Proto, pokud je elektromagnetické pole superpozicí rovinných vln více směrů, tento vztah nemusí platit. Například u nejjednodušší verze stojatého vlnění jsou směry dvou harmonických rovinných vln opačné a magnetické pole v daném místě vymizí právě v okamžicích, kdy je elektrické pole maximální a naopak.

Pozn. Mluvíme o rovinné vlně proto, že místa, kde $\vec{E}$ a $\vec{B}$ nabývají stejné hodnoty, tedy místa kde parametr $\vec{n}.\vec{r}-ct$ nabývá konstantní hodnoty, jsou určena rovnicí $\vec{n}.\vec{r}=$ konst., což je rovnice roviny. Maxwellovy rovnice tedy zároveň určují analytické (jde o vlnění) i algebraické vlastnosti řešení (vlnění je příčné).

Směr vektoru $\vec{E}$ charakterizuje polarizaci vlny. Pokud je neměnný, mluvíme o lineární polarizaci. U vlny harmonického průběhu se zavádí též kruhová příp. eliptická polarizace (viz optika).

Pro rovinnou vlnu je snadné spočíst jak hustotu energie

$$w \;=\; \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\vec{E}^2+\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\vec{B}^2\right) \;=\; \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\vec{E}^2+c^2\vec{B}^2\right) \;=\; \epsilon_0 c^2|\vec{a}\,'|^2\ , \tag{13}$$

i Poyntingův vektor

$$\vec{S} \;=\; c\,\vec{a}\,'\times\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{n}\times\vec{a}\,'\right) \;=\; \frac{c}{\mu_0}|\vec{a}\,'|^2\vec{n} \;=\; w\,\vec{c}\ . \tag{14}$$

Tuto úměru lze chápat tak, že rovinná vlna představuje transport energie w rychlostí $\vec{c}=\vec{n}c$ doprovázený hybností elektromagnetického pole $\vec{g}=w\vec{n}/c$.

Rovinná harmonická vlna

Pro

$$\vec{A} \;=\; \frac{\vec{\mathcal{E}}}{c|\vec{k}|}e^{i|\vec{k}|(\vec{n}.\vec{r}-ct)} \tag{15}$$

dostáváme harmonickou rovinnou vlnu

$$\vec{E} \;=\; \vec{\mathcal{E}}e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \qquad\qquad c\vec{B} \;=\; \vec{n}\vec{\mathcal{E}}e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \tag{16}$$

Za pozornost stojí, že předepsání průběhu elektromagnetického pole ve tvaru rovinné monochromatické vlny

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{\mathcal{E}} e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \qquad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\mathcal{B}} e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \tag{17}$$

umožňuje využít faktu, že (ověřte si!) $\nabla.(\vec{\mathcal{E}} e^{i(\vec{k}.\vec{r})}) = (i\vec{k}).(\vec{\mathcal{E}} e^{i(\vec{k}.\vec{r})})$ a $\nabla \times (\vec{\mathcal{E}} e^{i(\vec{k}.\vec{r})}) = (i\vec{k}) \times (\vec{\mathcal{E}} e^{i(\vec{k}.\vec{r})})$. Proto pro harmonickou rovinnou vlnu máme

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E} \qquad i\vec{k} \times \vec{B} = -\frac{i\omega}{c^2}\vec{E} \tag{18}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \qquad i\vec{k} \times \vec{E} = +i\omega \vec{B} \tag{19}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \tag{20}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \tag{21}$$

Po zkrácení faktoru $e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}$ dostaneme podmínky transversality

$$\vec{\mathcal{E}}.\vec{k} = 0 \ , \quad \vec{\mathcal{B}}.\vec{k} = 0 \ , \tag{22}$$

dispersní relaci

$$\omega^2 = c^2 k^2 \tag{23}$$

a souvislost směru šíření vlny $\vec{n} = \vec{k}/|\vec{k}|$ a polí (zde se vracíme zpět od amplitud k polím, platí samozřejmě obojí)

$$c\vec{B} = \vec{n} \times \vec{E} \ , \quad \vec{E} = -\vec{n} \times c\vec{B} \ . \tag{24}$$

Hodnota elektrické a magnetické složky hustoty energie této elektromagnetické vlny byla stejná a tak

$$w = \epsilon_0 |\vec{E}|^2 \ , \quad \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{n} c w \ , \quad \vec{g} = \vec{D} \times \vec{B} = \vec{n}\frac{w}{c} \ . \tag{25}$$

Tyto vztahy si vykládáme, jako ilustraci přenosu hustoty energie w a hustoty hybnosti ($\frac{w}{c^2}\ \vec{c}$) v poli rovinné vlny.

Elektromagnetické harmonické vlny na rozhraní prostředí

Chování elektromagnetické harmonické vlny na rozhraní prostředí jste si vysvětlili v optice. Připomene si, že v optice se uvažují zejména prostředí s $\mu_r = 1$, takže index lomu je dán relativní permitivitou prostředí $n = \sqrt{\epsilon_r}$ a kompletně určuje směr i amplitudy prošlé a odražené vlny. Pro naše potřeby pochopení tohoto jevu nebudeme nezbytně předpokládat $\mu_r = 1$.

Nejprve si připomeňme, že rozhraní je plocha a splnění rovnic požadujeme v každém bodě rozhraní. Pro rovinnou harmonickou vlnu a rovinné rozhraní to dá podmínku na úhly odrazu a lomu. Při jejich splnění pak správně spojitá pole v jednom bodě vykazují tutéž vlastnost podél celého rozhraní (jde o společný faktor $e^{i\vec{k}_\parallel \cdot \vec{x}}$). Komplikace nastává v případě totálního odrazu nebo např. plazmy, kde se vlna s danou frekvencí nemusí mít dovoleno šířit, přesněji $\vec{k}_\parallel$ je nutno doplnit komplexním $\vec{k}_\perp$ tak, aby výsledný vektor splňoval disperzní relaci daného prostředí.

Jakmile máme vyřešeny úhly a případně zmíněné komplikace, má pole podobu superpozice známých řešení do kterých dosadíme libovolný bod na rozhraní a zkoumáme splnění spojitosti elektromagnetického pole, tedy polní problém přechází na soustavou algebraických rovnic. Na jedné straně rozhraní máme pole dopadající a odražené, na druhé straně rozhraní pole prošlé. Obvykle považujeme za známé pole dopadající. Po dosazení vlastností prostředí máme tedy čtyři neznámé veličiny, polní rovnice ale při známé fázové rychlosti vlny c a směru jejího šíření umožňují nalézt např. magnetické pole z pole elektrického. Tak nám zůstávají neznámé jen vektory elektrické intenzity odražené a prošlé vlny. Pro šest složek těchto dvou vektorů máme správný počet rovnic vyplývající ze spojitosti tečných složek $\vec{E}, \vec{H}$ a normálových složek $\vec{D}, \vec{B}$. V případě odrazu na dokonalém vodiči máme sice jen pole odražené, zbývající stupně volnosti potřebné k vyřešení rovnic nyní ale představují plošné náboje a proudy na povrchu vodiče.

Telegrafní rovnice

Budeme uvažovat příčné vlny $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, kdy (**??**) dává

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{j} \tag{26}$$

a po uvážení ohmické vodivosti $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ získáme **telegrafní rovnici**

$$\left(\Delta - \mu_0 \gamma \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E} = 0 \ . \tag{27}$$

Než přikročíme ke studiu této rovnice z hlediska šíření vln, stojí za zmínku připomenout její podobnost s rovnicí tlumeného harmonického oscilátoru. Tato analogie platí tehdy, když okrajové podmínky zajišťují, že máme co do činění se stojatými vlnami. To nastane za situace, kdy $\Delta\vec{E} = -k^2\vec{E}$ a tedy prostorový průběh $\vec{E}$ je vlastní funkcí Laplaceova operátoru. Rovnice pro amplitudu $\mathcal{E}$ takového stojatého vlnění má pak jednoduchý tvar

$$\frac{1}{c^2}\ddot{\mathcal{E}} + \mu_0\gamma\dot{\mathcal{E}} + k^2\mathcal{E} = 0\ . \tag{28}$$

Při nulové vodivosti tato rovnice popisuje harmonický oscilátor s frekvencí ck a detailněji se mu budeme věnovat v poslední části této přednášky. Když $\gamma > 0$ a vlnová rovnice přejde na rovnici telegrafní a evoluční rovnice (28) vede na v čase exponenciálně tlumené oscilace elektromagnetického pole v dutině vyplněné vodivým prostředím.

Rovnice (27) se z historických důvodů nazývá rovnice telegrafní, její správné chápání totiž učinilo z W. Thomsona lorda Kelvina a nejspíš nejbohatšího fyzika své doby. Nejen proto není bez zajímavosti, jak se tato rovnice objeví při studiu šíření signálu podél fenomenologicky chápaného elektrického vedení. Nechť jeho parametry na jednotku délky jsou: Kapacita C_1, indukčnost L_1, odpor R_1 a svod G_1. Rozdělíme-li vedení na kousky délky dz pak pro každý kousek platí $L = L_1 dz$, $C = C_1 dz$ atd. Pro napětí ve vedení můžeme psát

$$U_n - U_{n+1} \ = \ (R + L\frac{\partial}{\partial t})I_{n+1} \ = \ dz(R_1 + L_1\frac{\partial}{\partial t})I_{n+1} \tag{29}$$

a pro proud podél vedení

$$I_n - I_{n+1} \ = \ (G + C\frac{\partial}{\partial t})U_n \ = \ dz(G_1 + C_1\frac{\partial}{\partial t})U_n \tag{30}$$

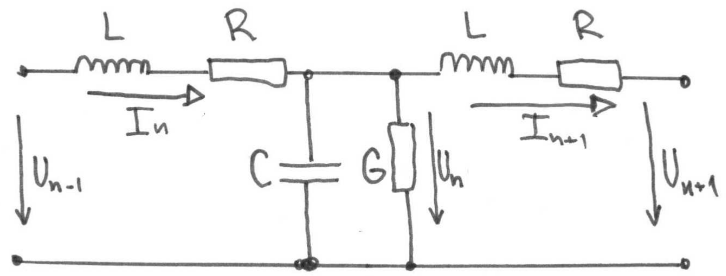
a tedy po vydělení obou rovnic délkou úseku vedení máme

$$\frac{\partial U}{\partial z} \ = \ -(R_1 + L_1\frac{\partial}{\partial t})I \tag{31}$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} \ = \ -(G_1 + C_1\frac{\partial}{\partial t})U\ , \tag{32}$$

kde jsme použili přiblížení $U_n - U_{n+1} = -dz\frac{\partial U}{\partial z}$. Zderivováním první z rovnic podle z a následným použitím druhé rovnice dostáváme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - L_1C_1\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - (R_1C_1 + L_1G_1)\frac{\partial U}{\partial t} - RG\,U = 0\ . \tag{33}$$



Obrázek 1: Náhradní schéma krátkého úseku dlouhého (koaxiálního) vedení se spojitě rozloženými parametry.

Až v oddíle o TEM vlnách zjistíme, že podél dokonalého vedení konstantního průřezu se vlny šíří rychlostí světla c, porovnáním s touto rovnicí zjistíme, že $L_1C_1 = 1/c^2$. Podmínkou je, aby proudy ve vedení tekly po povrchu, což pro ideální vedení je jasný důsledek skinového jevu.

Použitím předpisu

$$\vec{E} = \vec{\mathcal{E}}e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \tag{34}$$

přejde telegrafní rovnice na disperzní vztah

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} + i\omega\gamma\mu_0 \ = \ 0 \tag{35}$$

Ten lze chápat jako rovnici pro komplexní proměnné k a nebo ω. Nejužitečnější je případ, kdy ω je reálná frekvence určená harmonickým zdrojem s pevnou amplitudou, zatímco vlny se šíří s komplexním vlnovým vektorem

$$\vec{k} \ = \ \vec{n}\frac{\omega}{c}\sqrt{1 + i\frac{c^2\mu_0\gamma}{\omega}} \ = \ \vec{n}\frac{\omega}{c}\sqrt{1 + i\left(\frac{\lambda_0}{2\pi\delta}\right)^2}\ , \qquad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}} \tag{36}$$

kde δ je hloubka vniku (elektro-)magnetického pole do vodivého materiálu dle skinového jevu. V optice se studuje dopad elektromagnetické vlny na rovinné rozhraní mezi vakuem a vodivým materiálem. Zatímco ve vakuu dopadající i odražená vlna vykazuje netlumené šíření s reálným vlnovým vektorem $\vec{k} = \vec{n}\omega/c$, procházející vlna je charakterizována výše uvedeným komplexním vlnovým vektorem. Zajímavé jsou dvě limity, $\lambda \gg \delta$, kdy jde vlastně o skinový jev a případ $\lambda \ll \delta$, kdy je vlna tlumena jen pomalu. Tehdy s použitím $\sqrt{1+x} \sim 1 + x/2$ máme

$$\vec{k}.\vec{r} \;\sim\; \vec{n}.\vec{r}\frac{\omega}{c}(1 + \frac{i}{2}\frac{c^2\mu_0\gamma}{\omega}) \;=\; \vec{n}.\vec{r}\frac{\omega}{c}\left(1 + \frac{i}{2}\left(\frac{\lambda_0}{2\pi\delta}\right)^2\right) \tag{37}$$

a tedy

$$e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \;\sim\; e^{i(\vec{n}.\vec{r}-ct)\omega/c}\; e^{-\vec{n}.\vec{r}\;c\mu_0\gamma/2}\;. \tag{38}$$

Faktor $e^{-\vec{n}.\vec{r}\;c\mu_0\gamma/2}$ určuje, na jaké charakteristické vzdálenosti je uvnitř ($\vec{n}.\vec{r} > 0$) vodivého materiálu vlna utlumena.

Plasmová frekvence

Z rovnice (26) vyplývá ještě jeden důležitý případ šíření elektromagnetické vlny v prostředí.

Předpokládáme, že v prostředí jsou s koncentrací n přítomny náboje q s hmotností m_q, ovšem jsou vyváženy stejně koncentrovanými nehybnými náboji opačného znaménka. Budeme předpokládat, že uvažované náboje nevytvářejí podstatnou nábojovou hustotu (použitím Gaussovy věty lze vidět, že tedy potřebujeme také předpokládat příčnost uvažovaných elektromagnetických vln). Pohybová rovnice pro zrychlení částice pod vlivem elektrického pole má tvar

$$m_q\,\dot{\vec{v}} \;=\; \vec{E}q\;. \tag{39}$$

Připomeňme si zde, že v rámci Drudeho modelu

$$m_q\left(\dot{\vec{v}} + \frac{1}{\tau}\vec{v}\right) \;=\; \vec{E}q\;. \tag{40}$$

lze porozumět Ohmovu zákonu jako disipačnímu jevu, kde se elektrony brzdí s charakteristickou časovou konstantou τ – při malých frekvencích lze zanedbat akceleraci a pozorujeme úměru mezi elektrický polem a proudem.

Dále popisované chování plasmy pak odpovídá situaci, kdy tento čas je mnohem delší než frekvence a jejich koordinovaný pohyb nosičů náboje vytváří proudovou hustotu

$$\vec{j} \;=\; nq\vec{v}\;, \tag{41}$$

a místo obvyklého Ohmova zákona je pravá strana rovnice (26) dána vztahem

$$\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{j} \;=\; \frac{\mu_0 nq^2}{m_q}\vec{E} \tag{42}$$

a nehomogenní vlnová rovnice (26) poté přejde na rovnici

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\mu_0 nq^2}{m_q}\right)\vec{E} = 0\;. \tag{43}$$

Té po náhradě $\Delta \to -k^2$ a $\partial^2/\partial t^2 \to -\omega^2$ odpovídá rovnice

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}\right)\vec{E} = 0 \tag{44}$$

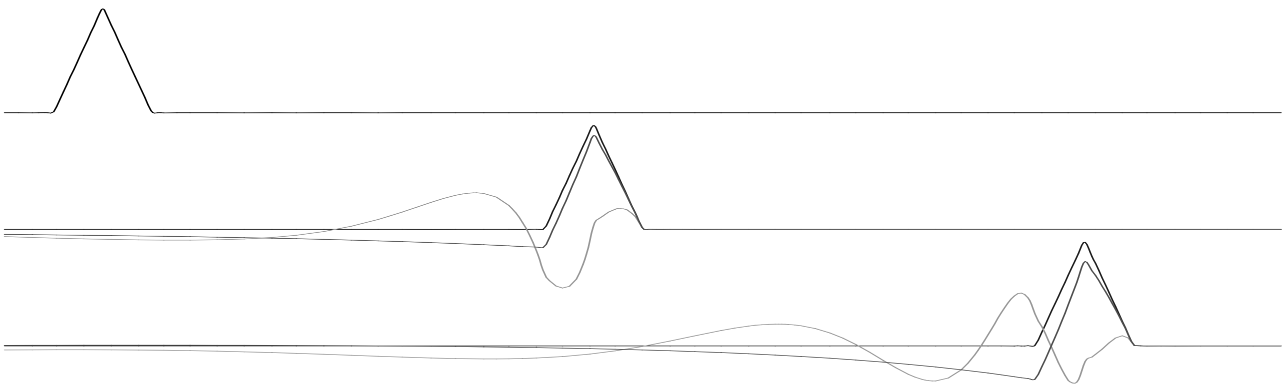
a tedy dispersní vztah

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}\;, \qquad \omega_p^2 = c^2\frac{\mu_0 nq^2}{m_q} = \frac{nq^2}{\epsilon_0 m_q}\;. \tag{45}$$

Z tohoto vztahu vidíme, že prostředí s náboji dovoluje šíření elektromagnetických vln (k reálné) pouze nad plasmovou frekvencí, jež roste s koncentrací těchto nábojů. Na Obrázku 2 je vidět jak v prostředí, v němž neplatí úměra $\omega = ck$, dochází k rozšiřování vlnových balíků. Skutečnost, že na nejvyšších frekvencích $\omega \gg \omega_p$ dodržuje disperzní relace (45)tuto úměru, vede k tomu, že čela vln na obrázku se šíří stejnou rychlostí – rychlostí světla.

Vztah (45) lze zapsat také v podobě

$$\omega(k) = \sqrt{\omega_p^2 + c^2k^2}. \tag{46}$$



Obrázek 2: Šíření vlny v prostředí bez disperse a v prostředí s dvěma různě vysokými plasmovými frekvencemi.

Lze si snadno představit, že i u dalších prostředí bude vztah mezi frekvencí a vlnovým vektorem odlišný od $\omega = c|\vec{k}|$ a tak se zde budou odlišovat fázová rychlost $v_f = \omega(k)/k$ a rychlost grupová $v_g = d\omega(k)/dk$ (závisí-li ω i na směru $\vec{k}$, je situace ještě komplikovanější). Význam těchto rychlostí si ilustrujeme právě na příkladě našeho modelu odvození plazmové frekvence.

Předpokládejme, že původní rovinná vlna $e^{ik(z-v_f t)} = e^{i(kz-\omega t)}$ vykazující fázovou rychlost v_f (exponent má význam fáze), která původně rovnoměrně vyplňovala celý prostor, je nyní modulována obálkou $g(z-v_g t)$ posouvající se rychlostí v_g, takže

$$\vec{E}(x,t) = \vec{\mathcal{E}} g(z - v_g t) e^{ik(z-v_f t)}. \tag{47}$$

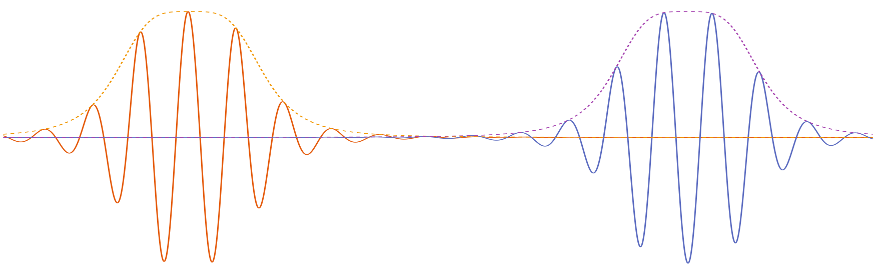
Pro vlnovou rovnici (např. když $\omega_p = 0$), která nevykazuje disperzi, položíme $v_f = v_g = \omega/k$ a dostaneme d'Alembertrovo řešení. My ovšem předpokládáme rovnici (43) a dosazením harmonické vlny s obálkou po provední druhé derivace součinu funkcí dostaneme

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}\right)\vec{E}(x,t) = \left[\left(k^2\left(v_f^2 - c^2\right) - \omega_p^2\right) + 2ik\left(c^2 - v_f v_g\right)\frac{g'}{g} + (c^2 - v_g^2)\frac{g''}{g}\right]\frac{\vec{E}(x,t)}{c^2} = 0 \tag{48}$$

Pokud předpokládáme, že se obálka mění na délce podstatně větší, než je vlnová délka $2\pi/k$ můžeme zanedbat $|g''|$. Splnění rovnice je pak možné dosáhnout vhodnou volbou konstant v_f a v_g. Vyjde

$$v_f^2 = c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2} = \frac{\omega^2}{k^2}, \quad v_g = \frac{c^2}{v_f} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}, \tag{49}$$

tedy přesně podle návodu $v_f = \omega(k)/k$, $v_g = d\omega(k)/dk$. Opět vidíme, že šíření vln vyžaduje $\omega^2 > \omega_p^2$ a že v prostředí (42) splňuje rychlost šíření vlnových balíků (informace) $v_g < c$, zatímco fázová rychlost $v_f > c$.



Obrázek 3: Ilustrace vývoje vlnového klubka s harmonickým průběhem a obálkou ve tvaru impulsu v prostředí s odlišnou grupovou a fázovou rychlostí.

TEM vlna podél vedení

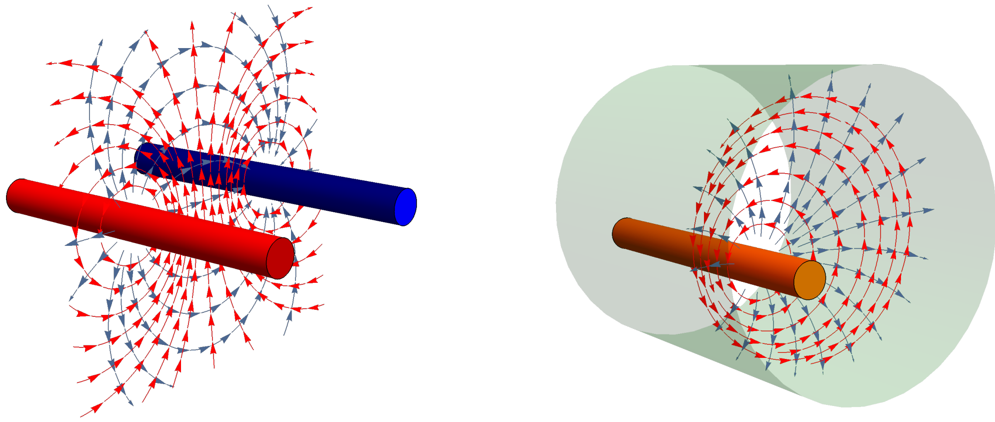
Rovinná vlna, lhostejno zda harmonického či obecného profilu, pro nás představuje zatím jediné známé řešení úplných Maxwellových rovnic ve vakuu. Kolmo ke směru šíření je ovšem hodnota polí $\vec{E}$ a $\vec{B}$ rovinné vlny konstantní. Chceme-li nalézt vlnu šířící se podél přímého vedení tvořeného dvěma vodiči, bude se elektrická intezita v kolmém směru měnit a tak očekáváme

$$\vec{E} \;=\; \vec{\mathcal{E}}(x,y)e^{i(kz-\omega t)}\;. \tag{50}$$

V analogii s elektrostatickým polem předpokládáme $\vec{\mathcal{E}}(x,y) = \nabla\psi(x,y)$ (a očekáváme, že ψ bude na povrchu vodičů konstantní) a tedy

$$\vec{E} \;=\; \nabla\psi(x,y)e^{i(kz-\omega t)} \;. \tag{51}$$

Neznámou funkci značíme ψ proto, že nepředstavuje elektrický potenciál (ten např. Coulombovské kalibraci vymizí). *Cvičení*: Nalezněte $\vec{A}$ a Φ pro uvedené pole.



Obrázek 4: Dva rovnoběžné vodiče a jejich elektrické a magnetické pole. Siločáry obou polí leží u TEM vlny v rovině kolmé ke směru šíření vlny. Jeden z vodičů může obklopovat ten druhý.

Požadavek div$\vec{E} = 0$ dává s použitím $\vec{e}_z.\nabla\psi(x,y) = 0$ rovnici

$$\Delta\psi(x,y) \;=\; 0 \;. \tag{52}$$

Magnetické pole nalezneme z rovnice $-\partial_t\vec{B} = \nabla\times\vec{E}$ při použití $\partial_t \to -i\omega$

$$\vec{B} \;=\; \frac{k}{\omega}\vec{e}_z \times \nabla\psi(x,y)e^{i(kz-\omega t)} \;. \tag{53}$$

To, že elektrické i magnetické pole je příčné vzhledem ke směru šíření vlny vede k označení tohoto pole – TEM. Takovéto pole automaticky splňuje $\nabla.\vec{B} = 0$ a z Ampérova zákona $\partial_t\vec{E} = c^2\nabla\times\vec{B}$ dostáváme disperzní vztah

$$\omega^2 = c^2k^2 \;, \tag{54}$$

tedy stejnou rovnici jakou máme pro rovinné vlny.

Abychom mohli mluvit o vlnách šířících se podél vodiče, musí elektrické pole $\vec{E} \sim \nabla\psi$ na povrchu vodiče být kolmé na jeho povrch. Tímto povrchem tedy může být libovolná válcová plocha $\psi(x,y) = $ konst. Z elektrostatiky známe řešení Laplaceovy rovnice uvnitř koaxiálního vedení a z matematiky pak konstrukci potenciálu skrze holomorfní funkce popisující paralelní vedení ze dvou vodičů kruhového průřezu [Kvasnica, úloha III.16]. Oba tyto případy můžeme skrze (51,53) povýšit na elektromagnetické pole šířící se podél vedení. Vyjme-li z koaxiálního vedení vnitřní vodič, je příslušné řešení Laplaceovy rovnice $\psi = $ konst., $\nabla\psi = 0$ a tedy TEM vlna se nemůže šířit vlnovodem.

Helmholtzova rovnice

Vlnová rovnice ve frekvenčním obraze, tedy po nahrazení $\partial_{tt} \to -\omega^2$

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right) u(\vec{x},\omega) = 0 \tag{55}$$

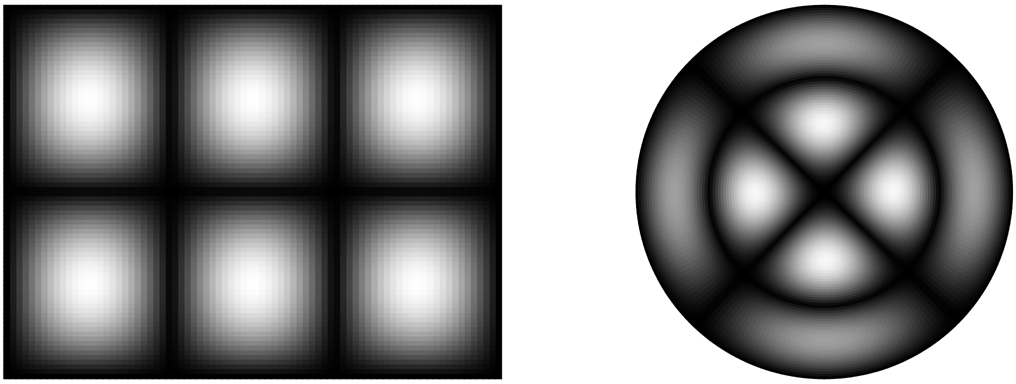
se jmenuje po Helmholtzovi. Pokud by na pravé straně rovnice vystupoval zdroj vlnění, šlo by o úlohu při níž bychom hledali šíření vln dané frekvence na nějaké oblasti. Homogenní verse Helmholtzovy rovnice představuje úlohu na hledání vlastních funkcí a vlastních hodnot Laplaceova operátoru na nějaké oblasti za daných okrajových podmínek. Ty při hledání řešení homogenní Helmholtzovy rovnice hrají klíčovou roli a úzce souvisejí s tím, jaký fyzikální problém řešíme. Pokud $u(\vec{x},\omega)$ představuje výchylku membrány tvaru Ω, je obvyklé předpokládat, že na kraji $\partial\Omega$ membrány je výchylka nulová (v analogii s membránou bubnu). Řešení Helmholtzovy rovnice v tomto případě má pro obdélníkovou membránu $x \in (0,a)$, $y \in (0,b)$ tvar

$$u(x,y) = u_0 \sin(\frac{\pi}{a}mx)\sin(\frac{\pi}{b}ny) \;, \qquad \frac{\omega_{mn}^2}{c^2} = \left(m\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n\frac{\pi}{b}\right)^2 \tag{56}$$

zatímco pro kruhovou membránu o poloměru a

$$u(r,\phi) = u_0 J_m(k_{nm} r) e^{im\phi} \ , \qquad \frac{\omega_{mn}^2}{c^2} = k_n^2 \ , \tag{57}$$

kde k_{nm} se volí tak, aby na okraji membrány $r = a$ vymizela Besselova funkce $J_m(k_{nm}a)$, tzn., že součin ak_{nm} nabývá hodnoty n-tého kořene funkce J_m. Protože tyto funkce představují též amplitudu stojatého vlnění čtvercové a kruhové membrány, lze jim dobře porozumět jsou-li znázorněny graficky, jako např. na Obrázku 5, kde je jasem znázorněna amplituda stojatého vlnění. Vidíme, že počet uzlů v obou směrech je dán indexy m a n.



Obrázek 5: Příklad stojatého vlnění membrány obdélníkového a kruhového tvaru.

Hledání vlastních funkcí operátorů jako je ten Laplaceův je důležitou partií matematiky a ukazuje se, že klíčovou roli hrají okrajové podmínky. U vlnění membrány (a také struny s pevnými konci) jde o tzv. Dirichletovu hraniční podmínku $u(\partial\Omega) = 0$. Budeme-li zkoumat šíření zvuku v objemu s pevnými stěnami, zjistíme, že rychlost tekutiny (přesněnji zrychlení, ale to pro v čase harmonické průběhy není třeba příliš odlišovat) je úměrná gradientu tlaku. Popisuje-li tedy šíření zvuku vlnová rovnice pro skalární veličinu (tlak) je hraniční podmínka taková, že derivace tlaku na hranici musí k ní být tečná – tečná musí být totiž rychlost tekutiny u stěn nádoby. Například v dutině tvaru kvádru $x \in (0,a)$,$x \in (0,b)$,$z \in (0,c)$ máme pak vlastní funkce (a příslušné rezonanční frekvence)

$$u(x,y,z) = u_0 \cos(\frac{\pi}{a} mx) \cos(\frac{\pi}{b} ny) \cos(\frac{\pi}{b} qz) \ , \qquad \frac{\omega_{mnq}^2}{v^2} = \left(m\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(q\frac{\pi}{c}\right)^2 \tag{58}$$

Podmínka $\vec{n}.\nabla u(\partial\Omega) = 0$ se nazývá Neumannova hraniční podmínka.

Tyto odstavce mají za cíl připomenout jisté partie mechaniky a související oblasti matematiky, především ale mají ilustrovat skutečnost, že řešení homogenní Helmholtzovy rovnice představují stojaté vlnění. Frekvence stojatého vlnění v různě tvarovaných dutinách a membránách pak velmi souvisejí s vlastními funkcemi Laplaceova operátoru na dané oblasti za konkrétních okrajových podmínek. Pro komplikovanější tvary oblastí často není možné přesná řešení nalézt a přicházejí na řadu přibližné metody.

TM a TE vlna

Ukazuje se, že z řešení skalární Helmholtzovy rovnice lze zkonstruovat vektorová pole $\vec{E}$ a $\vec{B}$ splňující bezzdrojové Maxwellovy rovnice uvnitř vlnovodů konstantního průřezu. Zatímco u TEM vlny jsme potřebovali dva vodiče, aby se podél vedení mohla šířit elektromagnetická vlna, ve vlnovodu, pokud má dostatečně velké rozměry stačí jen vnější část a uvnitř takového dutého vodiče se vlna šíří. Na rozdíl od TEM vlny je jen jedno z polí transverzální ke směru šíření. Proto mluvíme o TE a TM vlnách.

V obdélníkovém vlnovodu lze v nejjednodušším případě takové pole chápat jako superpozici dvou rovinných vln odražených od stěn vlnovodu, přičemž směry šíření těchto skládaných vln zajistí, že na stěnách vlnovodu vymizí tečná složka $\vec{E}$ a normálová složka $\vec{B}$. (Viz cvičení.)

Elektromagnetický rezonátor

Podobně jako zvukové vlny v uzavřené dutině, mohou i elektromagnetické vlny vytvořit ve vodivé dutině stojaté vlnění. Pro jednoduchost budeme uvažovat dutý vodič konstantního profilu. Ten tvoří vlnovod délky h, jenž je na obou koncích uzavřen kolmou vodivou rovinou. Okamžitě vidíme, že vhodným složením TE resp. TM vln stejné polarizace ale s opačnými vlnovými vektory $k_1 = -k_2$, jimž kvůli přítomnosti k^2 v disperzním vztahu přísluší tatáž frekvence, dostaneme stojaté vlnění. Proces je totiž naprosto tentýž jako v případě stojatého vlnění struny. Protože pro TE i TM vlnu ve vlnovodu platí $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \lambda^2$ a zároveň příčná složka elektrického pole stojatého vlnění podél vlnovodu musí na koncích mít uzly, vychází, že součin $kh = q\pi$ musí být celočíselným násobkem π, tedy $\omega^2 = c^2\left((q\pi/h)^2 + \lambda^2\right)$. Použijeme-li vztah (58) pro obdélníkový vlnovod $\lambda^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$ dostaneme

$$\frac{\omega_{mnq}^2}{c^2} = \left(m\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(q\frac{\pi}{h}\right)^2 \ , \tag{59}$$

kde alespoň dvě z celých čísel m, n, q musejí být nenulová – TE vlna potřebuje aspoň jedno nenulové, druhé nenulové potřebujeme na rezonanci podél směru šíření této vlny. Kvůli symetrii problému jsou ovšem jednotlivé směry záměnné a ne nezbytně musí být q nenulové a souviset s počtem uzlů ve směru šíření. Detaily naleznete např. v [Kvasnica].

Nehomogenní vlnová rovnice

Viděli jsme, že ve vakuu lze s použitím Lorentzovy kalibrace soustavu 4 Maxwellových rovnic převést na soustavu dvou vlnových rovnic

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\right)\vec{A}(\vec{x}, t) = -\mu_0\vec{j}(\vec{r}, t), \tag{60}$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\right)\Phi(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}, t). \tag{61}$$

Podobně jako tomu bylo v elektrostatice je možné hledat řešení těchto rovnic ve tvaru integrálu součinu vhodné (Greenovy) funkce souřadnic $\vec{r}$ a $\vec{r}'$ a, řekněme, nábojové hustoty v bodě $\vec{r}'$. Spěchajícímu čtenáři vzhledem k jedinečnosti tohoto řešení doporučujeme pouze ověřit řešení této rovnice, které nalezneme dále (**??**) (viz důležitý příklad X.1 v Kvasnicově učebnici) a přejít ve výkladu až k této rovnici.

Pro zvídavějšího čtenáře zkusíme použít postup použitý v Kvasnicově a Zangwillově učebnici, abychom viděli, kde se (**??**) vezme. I když je v časově proměnném případě tento přístup v rozporu se zachováním náboje, budeme si Greenovu funkci i v tomto případě představovat jako řešení polních rovnic s bodovým zdrojem na pravé straně.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{-i\omega t}d\omega, \qquad f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{+i\omega t}dt. \tag{62}$$

přejde ve frekvenčním obraze časová derivace na násobení a z vlnové rovnice dostaneme rovnici Helmholtzovu, např.

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\Phi(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}, t) \tag{63}$$

Po vzoru Greenovy funkce pro Poissonovu rovnici rozložíme zdroj na "bodové náboje"

$$\rho(\vec{x}, t) = \int \rho(\vec{x}', t)\delta(\vec{x} - \vec{x}')d^3x' \tag{64}$$

a budeme hledat potenciál $G_\omega(\vec{x}, \vec{x}')$, který každý z těchto "bodových nábojů" (nacházejících se v bodě $\vec{x}'$) budí:

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)G_\omega(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\vec{x} - \vec{x}'). \tag{65}$$

a pak řešení složíme z potenciálů od jednotlivých "nábojů"

$$\Phi(\vec{x}, t) = \int \rho(\vec{x}', t)G_\omega(\vec{x}, \vec{x}')d^3x' \tag{66}$$

Pro $\omega = 0$ přechází problém na Poissonovu rovnici a příslušná Greenova funkce je

$$G_0(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \tag{67}$$

S využitím translační symetrie úlohy, můžeme hledat $G(\vec{x}, \vec{x}') = G(\vec{x} - \vec{x}')$ a stejně jako v případě $\omega = 0$ díky izotropii d'Alembertova operátoru předpokládat závislost jen na velikosti rozdílu, tedy $G(\vec{x}, \vec{x}') = G(|\vec{x} - \vec{x}'|)$. Můžeme tak vzít $\vec{x}' = 0$ a za použití vztahu $\Delta f(r) = (rf)''/r$ psát pro $r \neq 0$

$$[rG_\omega(r)]'' + \frac{\omega^2}{c^2}[rG_\omega(r)] = 0.$$

Tato homogenní diferenciální rovnice (ano, opět máme rovnici pro harmonický oscilátor), má samozřejmě řešení

$$[rG_\omega(r)] = Ae^{+i\frac{\omega}{c}r} + Be^{-i\frac{\omega}{c}r}. \tag{68}$$

Konstanty A, B zvolíme $A = 1/(4\pi), B = 0$ pro jedno a $A = 0, B = 1/(4\pi)$ jako druhé nezávislé řešení. Těm po dosazení $r = |\vec{x} - \vec{x}'|$ odpovídá

$$G_\omega(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{\pm i\frac{\omega}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \tag{69}$$

Zvláště v technických výpočtech, kdy pro zdroje předpokládáme harmonické časové závislosti, může představovat tato Greenova funkce vlnové rovnice výchozí bod výpočtů. Pro porozumění povaze řešení nehomogenní vlnové rovnice ale převedeme tuto funkci zpět do časového obrazu.

Speciální tvar závislosti na ω odpovídá posunutí v čase:

$$f(\omega) = f_0(\omega)e^{\pm i\omega\tau} \implies f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_0(\omega)e^{\pm i\omega\tau}e^{-i\omega t}d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_0(\omega)e^{-i\omega(t\mp\tau)}d\omega = f_0(t\mp\tau). \tag{70}$$

Pro naše potřeby budeme uvažovat jen retardovanou Greenovu funkci která dá pole jako superpozici zdrojů v dřívějších časech $t' = t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}$

$$\Phi(\vec{x}, t) = \int \rho(\vec{x}', t)G_\omega(\vec{x}, \vec{x}')d^3x' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c})}{|\vec{x} - \vec{x}'|}d^3x'. \tag{71}$$

Opačná volba znaménka $t' = t + \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}$ by vedla k advanceovanému řešení vlnové rovnice. Jakákoli vhodně normovaná lineární kombinace retardovaného a advanceovaného potenciálu splňuje původní nehomogenní vlnové rovnice. Pokud ale nemáme závažné důvody činit jinak, bereme vždy za řešení potenciály retardované, a náboje chápeme jako zdroje a příčinu pole. Jakkoli vzorce s retardovaným zdrojem vypadají velmi podobně vztahům z elektro-magneto-statiky, je pro konkrétní zdroje závislé na čase často těžké spočíst již jen retardovaný čas, natož příslušný integrál. Pro praktické výpočty se tak často musíme přejít do frekvenčního obrazu (např. předepíšeme harmonický průběh proudů v anténě vysílající elektromagnetické vlny). Pro pohybující se bodovou částici lze ale uvedené potenciály spočíst, jak ukázali Liénard a Wiechert ~ 1900.

Vzdálené pole lokalizovaného zdroje

Jedním z výsledků nalezených při studiu statických a kvazistacionárních polí lokalizovaných zdrojů bylo, že $|\vec{E}| \lesssim 1/r^2$ (elektrický monopól i časově proměnný magnetický dipól) a $|\vec{H}| \lesssim 1/r^3$ (dipól). Pro takové zdroje klesá elektromagnetické pole se vzdáleností natolik rychle, že tok Poyntingova vektoru v nekonečnu

$$I_\infty \equiv \oint_{r\to\infty} \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) \cdot d\vec{S}$$

je nulový.

Jedinou variantou, jak získat elektromagnetické pole odpoutané od zdroje a odnášející energii do nekonečna je případ, kdy E i H budou ubývat jako $\sim 1/r$. Protože daleko od zdroje má zářivé pole podobu rovinné vlny, můžeme se soustředit na nalezení $\vec{B}_{\rm rad}$ a elektrické pole spočíst $\vec{E}_{\rm rad} = -\vec{e}_r \times c\vec{B}_{\rm rad}$. Místa, kde $\vec{E}_{\rm rad}$ a $\vec{B}_{\rm rad}$ představují převládající část pole označujeme pojmem *radiační zóna.*

Zde využijeme toho, že daleko od centra je $1/|\vec{r} - \vec{r}'| \sim 1/r$ pomalu se měnící funkce. To ovšem neplatí pro $\vec{j}(\vec{r}\,', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)$. Zde užijeme

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = (\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}') = r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' \tag{72}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = r\left(1 - \frac{2}{r^2}\vec{r} \cdot \vec{r}' + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{1/2} \doteq r - \vec{n} \cdot \vec{r}', \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}. \tag{73}$$

Proto radiační část elektromagnetického pole spočteme aproximací

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}d^3r'.$$

přičemž jediná část vektorového potenciálu $\sim 1/r$ je

$$\vec{A}_{\rm rad} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int \vec{j}(\vec{r}\,', t - \frac{1}{c}(r - \vec{n} \cdot \vec{r}\,'))\, dr'^3 + o(1/r).$$

Zanedbané členy nemohou přispět k zářivé části elektromagnetického pole.

Výpočet rotace je usnadněn tím, že do ní vstupuje jediná skalární funkce prostorových souřadnic $r - \vec{n} \cdot \vec{r}'$, přičemž $\nabla r = \vec{n}$ zatímco $\nabla(\vec{n} \cdot \vec{r}') = O(1/r)$ se po vynásobení $1/r$ před integrálem stane v radiační zóně zanedbatelné. Tak dostaneme s použitím $\nabla \times \vec{U}(|\vec{r}|) = \vec{n} \times \vec{U}'$

$$c\vec{B}_{\mathrm{rad}} = -\vec{n} \times \partial_t \vec{A}_{\mathrm{rad}}, \quad \vec{E}_{\mathrm{rad}} = -\vec{n} \times c\vec{B}_{\mathrm{rad}}, \quad \vec{S}_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{c\mu_0} |\vec{B}_{\mathrm{rad}}|^2 \vec{n}. \tag{74}$$

Odsud pak dostáváme vyzářený výkon do daného směru

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2 |\vec{S}| = \frac{r^2}{c\mu_0} \left| \vec{n} \times \partial_t \vec{A}_{\mathrm{rad}} \right|^2.$$

Vyzařování urychleného náboje

Jedním z klíčových poznatků elektrodynamiky je fakt, že urychlené náboje vyjadřují elektromagnetické vlny. Nezrychlený, tedy rovnoměrný pohyb je podle STR pouhou Lorentzovou transformací pole statického bodového náboje a tedy jeho $\vec{E}$, $\vec{B}$ nemá radiační část.

Pro pomalu se pohybující náboj

$$\vec{A}_{\mathrm{rad}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{1}{c}(r - \vec{n} \cdot \vec{r}'))\, dr'^3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int q\, \vec{v}(t_{\mathrm{ret}})\, \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_0(t_{\mathrm{ret}}))\, dr'^3$$

kde

$$t_{\mathrm{ret}} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_{\mathrm{ret}})|}{c}$$

představuje rovnici definující závislost $t_{\mathrm{ret}}(t)$.

Pokud bychom uvažovali jen pomalu se pohybující částici, mohli získali bychom

$$\vec{A}_{\mathrm{rad}} \doteq \frac{\mu_0}{4\pi r} q\, \vec{v}|_{t = t_{\mathrm{ret}}}. \tag{75}$$

Poznámka: Tento vztah nám dále vystačí, ale jako zajímavost si ukažme, že správně spočtená $\vec{A}_{\mathrm{rad}}$ obsahuje relativistické členy zahrnující $\vec{b}eta = \vec{v}/c$. Ty jsou velmi důležité, pokud zkoumáme vyzařování rychlých nábojů. Odvození tohoto členu (nezkouší se) získáme přepsáním 3-rozměrného integrálu do 3+1 vložením jedné integrace, která zjednoduší argument $\delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_0(t_{\mathrm{ret}}(\vec{r}'))$ na $\delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_0(t'))$. Tím se stane tento argument triviální funkcí $\vec{r}'$ a lze integraci $\int \ldots\, d^3r'$ snadno provést:

$$\int \vec{v}(t_{\mathrm{ret}})\, \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_0(t_{\mathrm{ret}}(\vec{r}')))\, dr'^3 = \int \vec{v}(t')\, \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_0(t'))\delta(t' - t_{\mathrm{ret}})\, dt'\, dr'^3 = \int \vec{v}(t')\, \delta(t' - t_{\mathrm{ret}})\, dt',$$

Fakt, že retardovaný čas závisí na $\vec{r}$ a t se nyní vyskytuje jen v argumentu jednorozměrné δ-funkce a příslušný integrál lze spočít za použití vztahu $\delta(f(x)) = 1/|f'|\delta(x - x_0)$, kde x_0 je kořen $f(x)$. Argument naší δ-funkce má pro podsvětelné částice právě jeden kořen daný průsečíkem světočáry částice a minulého světelného kuželu události $(t, \vec{r})$) derivaci $f'(x)$ získáme derivací implicitního vztahu

$$t' - t_{\mathrm{ret}} - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_{\mathrm{ret}})|}{c} = 0$$

který dá

$$\frac{d}{dt'} \left(t' - t_{\mathrm{ret}} - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_{\mathrm{ret}})|}{c} \right) = 1 - \frac{dt_{\mathrm{ret}}}{dt'}(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}) \implies \frac{dt_{\mathrm{ret}}}{dt'} = 1/(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}),$$

tedy

$$\delta(t' - t_{\mathrm{ret}})dt' = \frac{1}{\dfrac{dt'}{dt_{\mathrm{ret}}}} \delta(t' - t_{\mathrm{ret}})dt_{\mathrm{ret}}$$

tak máme

$$\vec{A}_{\mathrm{rad}} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{q\vec{v}}{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}} \bigg|_{t = t_{\mathrm{ret}}},$$

kde rychlost $\vec{v} = c\vec{\beta}$ i směrový vektor $\vec{n}$ nabývají hodnotu v retardovaném čase. (Konec poznámky.)

Pokud se dále soustředíme na $|\vec{\beta}| \ll 1$ a tedy $dt_{\mathrm{ret}}/dt \doteq 1$ dostáváme tvar (**??**), ze kterého snadno nalezneme

$$c\vec{B}_{\mathrm{rad}} = -\frac{\mu_0 q}{4\pi r} \vec{n} \times \vec{a}, \quad \vec{E}_{\mathrm{rad}} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r} \vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{a}].$$

Zavedeme-li úhel θ tak, aby $\vec{n} \cdot \vec{a} = a \cos\theta$ vyjde pak

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c} |\vec{a}|^2 \sin^2\theta$$

Úhlová integrace pak dá celkový vyzářený výkon pomalu se pohybujícím nábojem

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q^2|\vec{a}|^2}{3c^3},$$

protože $\int \sin(\theta)^2 d\Omega = \frac{2}{3}\,4\pi$. Tento důležitý výsledek se nazývá Larmorova formule (1897). Nezahrnuje speciálně-relativistické efekty, které se projevují m.j. vysokou mocninou faktoru $1-\vec{\beta}\cdot\vec{n}$ ve jmenovateli a vedou k preferovanému směru vyzařování $\vec{n}$.

Síla působící na vyzařující částici

Zatímco pole v radiační zóně má docela přehledný tvar

$$\vec{S} = c\,\vec{n}\,w(\theta,\phi) = c\,\vec{n}\,w(\vec{n}) \tag{76}$$

v blízkosti zdroje záření je tvar Poyntingova vektoru velmi komplikovaný. Kdybychom dokázali nalézt pole v blízkosti zdroje splňující příslušné okrajové podmínky (obvykle tam jsou nějaké vodiče), dokázali bychom určit kolik z energie přiváděné, řekněme do rozlehlého deskového kondenzátoru se motá v jeho okolí a slouží jen k výrobě blízkých polí (jalové proudy) a kolik energie systém opustí a v podobě záření odletí pryč. Nalézt takové řešení lze v podstatě ale jen pro nejjednodušší problémy a to jen za silně omezujících předpokladů, např., že rozměry musejí být mnohem menší, než uvažovaná vlnová délka. To znamená, že třeba rozložení polí v okolí antény je analyticky nezvládnutelné, protože dobrá anténa nemůže být mnohem menší než vlnová délka.

Podobě je ale velmi komplikovaný i problém zdánlivě nejjednodušší – energetická bilance v okolí urychlované bodové částice. Důvodem pro to je, že klasická bodová částice je fyzikálním obrazem matematického objektu popsaného δ-funkcí a příslušnými Greenovými funkcemi. Ty mají velmi dobrý smysl v rámci lineární teorie svazující pole a jeho zdroje. Energie a její toky jsou ale popsány kvadratickými výrazy a tam jistota s níž používáme δ-funkce atp. končí.

Podobně, jako jsme provedli integraci odcházejícího výkonu u dipólu, lze (s trikem, kdy pro integraci zavedeme okamžité souřadnice tak, že osa z míří směrem okamžitého zrychlení) spočíst celkový výkon, který vyzařuje v daný okamžik částice s předepsaným pohybem $\vec{x}(t)$. Výsledný vztah se nazývá *Larmorova formule*

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q^2|\ddot{\vec{x}}|^2}{3c^3}. \tag{77}$$

To ale vyžaduje, aby na částici působilo odlétající elektromagnetické pole silou, která jí odejme příslušnou vyzářenou energii. Její výpočet vyžaduje pracný výpočet limity, kdy se stále menší částice stává bodovou a její pole stále silnější a jeho energie roste nade všechny meze. Existuje pojem *klasický poloměr elektronu*, což je poloměr sférické nabité slupky, jejíž energie je ekvivalentní právě hmotě elektronu. Limita bodové částice pak vyžaduje pokračovat ve zmenšování a nějak pracovat s energií pole převyšující ekvivalent hmotnosti částice, energií v limitě nekonečnou. Poté, co se vhodným postupem takového nekonečna zbavíme, zbyde v pohybové rovnici konečná síla úměrná druhé derivaci rychlosti. My si v následujícím zjednodušeném odvození ukážeme, že právě taková síla by mohla být odpovědná za výkon odnášený elektromagnetickými vlnami.

Pro jednoduchost uvažujme nabitou částici, která se nejdříve v časech $t \le t_1$ nachází v rovnoměrném přímočarém pohybu, pak na ni chvíli působí všelijaké síly, které ji urychlují a brzdí, aby ji nakonec v $t \ge t_2$ ponechaly ve stejném rovnoměrném přímočarém pohybu. Taková částice podle (**??**) vyzáří energii

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} k|\dot{\vec{v}}|^2\,dt = k\int_{t1}^{t2} \dot{\vec{v}}\cdot\dot{\vec{v}}\,dt = k\left(\left[\dot{\vec{v}}\cdot\vec{v}\right]_{t1}^{t2} - \int_{t1}^{t2}\ddot{\vec{v}}\cdot\vec{v}\,dt\right), \tag{78}$$

kde $k = (q^2/(6\pi\epsilon_0 c^3))$.

Předpokládáme, že energii do systému dodává nějaká síla $\vec{F}$ působící na částici

$$E = \int \vec{F}\cdot\vec{v}dt. \tag{79}$$

Protože okrajové členy jsou za daného počátečního a koncového stavu nulové za předpokladu platnosti zákona zachování energie dostáváme

$$0 = \int \left(-m\dot{\vec{v}} + \vec{F} + k\ddot{\vec{v}}\right)\cdot\vec{v}\;dt. \tag{80}$$

což by mohlo vést k domněnce, že pohybová rovnice pro nabitou částici musí být modifikována do tvaru

$$m(\vec{a} - \tau\dot{\vec{a}}) = \vec{F}, \tag{81}$$

kde $\tau = k/m$ je extrémně krátká charakteristická doba, pro elektron je $\sim 10^{-24}$ s, což je hodnota odpovídající času, který světlu trvá překonat klasický poloměr elektronu – to připomíná, že záření souvisí s jevem retardace.

To je ovšem jen stěží přijatelné: (1) je to diferenciální rovnice třetího řádu, (2) ta řešení na něž jsme z Newtonovské dynamiky zvyklí se ztrácejí mezi velmi ošklivými řešeními exponenciálně rostoucími v čase, (3) kdybychom chtěli vybrat mezi řešeními to správné (to poznáme podle toho, že dobře dopadne – viz naše podmínky na koncovou rychlost částice) máme jasně nekausální teorii.

Ukazuje se, že rozumný smysl lze Abrahamově-Lorentzově síle

$$\vec{F}_{\text{brzd}} = k\dot{\vec{a}} \tag{82}$$

dát, pokud třetí derivaci polohy chápeme jako časovou derivaci zrychlení vypočteného z původní pohybové rovnice bez brzdné síly. Věci se komplikují ještě nutností zahrnout speciální relativitu, nicméně pro newtonovský model vodíkového atomu s pevným centrem máme původní sílu

$$\vec{F} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

Po zderivování výrazu $k\vec{a} = k\vec{F}/m$ podle času dostaneme pravou stranu (**??**) a tedy

$$\vec{F}_{brzd} = -\tau\dot{\vec{F}} = -\tau\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\dot{\vec{x}}|\vec{x}|^2 - 3\vec{x}(\vec{x}\cdot\dot{\vec{x}})}{|\vec{x}|^5}.$$

Jde o sílu, která u klasické kruhové trajektorie působí proti směru rychlosti v souladu s obvyklým jevem disipace. Místo vazkých efektů má ale popisovat brždění v důsledku vyzařovaných elektromagnetických vln.

Cvičení: Vyjádřete u kruhové dráhy zrychlení jako funkci energie a sestavte za pomocí (**??**) diferenciální rovnici vyjadřující časový vývoj energie klasického vodíkového atomu. Spočtěte dobu jeho života.