# Poznámky ke zkoušce z Klasické elektrodynamiky

## Vektorová analýza

Veličiny jako $\vec{E}$ představují **vektorové funkce** souřadnic (případně času). Zapisujeme je tedy buď jako trojice funkcí $\vec{r} = [x, y, z]$ nebo s pomocí bázových polí $\vec{r} = r\vec{e}_r$. Tento druhý zápis sice představuje jen zkratku, protože $\vec{e}_r$ je opět trojice čísel, **bázová pole** ale mají význačné vlastnosti, které většinou umožní s nimi pracovat jako s celkem.

Ujistěte se, že ovládáte výpočet $\nabla f, \nabla \cdot \vec{A}$ a $\nabla \times \vec{A}$ v **kartézských souřadnicích**, vyzkoušejte např. pro $f = x^2 + y^2$, $\vec{A}_1 = [x, y, z]$ a $\vec{A}_2 = [-y, x, 0]$. Podobně si vyzkoušejte, že s použitím příslušných vzorečků z přednášky umíte vypočíst např. $\nabla(r^n \cos\theta)$, $\nabla \cdot (r^n \vec{e}_r)$ nebo $\nabla \times (R^n \vec{e}_\phi)$. Ačkoli příslušný vztah v daných křivočarých souřadnicích najdete u písemky v zadání úlohy nebo na tabuli, musíte vědět, jak jej použít.

Nepleťte $d\vec{l}$, $d\vec{S}$ a $dV$. (U zkoušky neříkejte, že $d\vec{l}$ je kolmé na oblouk křivky.) Pokud bude potřeba pracovat v křivočarých souřadnicích, vztahy jako třeba $d\vec{S} = r \sin\theta\, \vec{e}_r\, d\theta\, d\phi$ budou v zadání úlohy uvedeny, nicméně ujistěte se, že je umíte použít.

Nepodceňujte **Gaussovu a Stokesovu větu**! Vyzkoušejte si, že ji např. umíte použít pro kouli resp. kružnici a vektorová pole $r^n\vec{r}$ resp. $R^n\vec{e}_z \times \vec{r}$.

**Rovnice siločáry** obsahuje na levé straně $d\vec{l}/ds$; nezapomeňte, že např. ve sférických souřadnicích nemůžete ignorovat nápovědu ze zadání, že $d\vec{l} = \vec{e}_r\, dr + r\, \vec{e}_\theta\, d\theta + r \sin\theta\, \vec{e}_\phi\, d\phi$.

## Elektrostatika

Ve formulce pro řešení **Poissonovy rovnice**

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3r'$$

je na několika místech čárkované $\vec{r}$ – jak jsou ty čárky malé, tak jsou důležité.

Ne každou úlohu lze řešit s pomocí tohoto vzorce, zejména pokud neznáte náboj (třeba na uzemněných vodičích). V písemce ale obvykle lze v takovém případě (parciální diferenciální) Poissonovu rovnici napsat v kartézských (vypadá to jako deskový kondenzátor), sférických (v zadání jsou sféry) nebo válcových souřadnicích jako **obyčejnou diferenciální rovnici**. Pokud úloha vyžaduje řešení ODR, které nejsou tvaru $f'' \pm af = \text{konst}$ (včetně $a = 0$) očekávejte nápovědu v zadání úlohy. Pokud je nábojová hustota nespojitá, bude možná potřeba **navazovat řešení**. Nespojitost $\nabla\Phi$ nějak souvisí s **plošnými náboji**. Pokud máte určit náboj, zkuste, zda to nejde za pomoci **Gaussova zákona** v integrálním tvaru. Pokud je zadáno napětí na vodiči, je obvykle nejprve potřeba nalézt pole a teprve pak lze určit (plošné) náboje, které takovému napětí odpovídají. Trik u **separace proměnných** platí stále – pokud jsou si rovny dvě funkce odlišných proměnných, jsou to konstanty.

Potenciál elektrického dipólu $\sim \vec{p}.\vec{r}/r^3$. Polarizace jako hustota elektrického dipólového momentu.

## Magnetické pole

Opravdu je potřeba umět napsat **Biot-Savartův vzorec** a vědět co do něj dosadit (samozřejmý příklad: pole kruhové smyčky na její ose). Opět, tento vzorec lze v písemce až na výjimky použít pouze pro proudy tekoucí vodiči, u plošných a objemových proudů bude nejspíš potřeba ze zadání (a nápovědy) odvodit jak výraz pro magnetické pole zhruba vypadá, použít polní rovnice a očekávat řešitelné diferenciální rovnice. Proud souvisí s pohybem nábojů, proudová hustota konvekčního proudu $\vec{j} = \rho\vec{v}$.

Ampérův zákon se velmi dobře používá u axiálně symetrických problémů. Důležitá jsou magnetická pole jednoduchých zdrojů – přímého vodiče a dipólu. Na cvičení jsme probírali vektorový potenciál homogenního a dipólového pole. Lorentzova síla na kus drátu se s použitím $\vec{j}dV \to I\, d\vec{l}$ dá zapsat jako $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$. Dokud nebudou k dostání magnetické monopóly, hodí se znát silové působení na magnetický dipól.

Lokalizované proudy budí magnetický dipólový moment a magnetizace jako jeho hustota.

Na rozhraní platí Maxwellovy rovnice také: jednak to souvisí s integrální verzí Maxwellových rovnic (jaké objemy a plochy je potřeba vzít pro Gaussovu resp. Stokesovu větu?), alternativně v diferenciální verzi prostorové derivace skoků dávají $\delta$-funkce a po jejich zkrácení zbyde z $\nabla$ jen $\vec{n}[\ ]$. Není jedno, zda na rozhraní mluvíte o spojitosti $\vec{B}$ nebo $\vec{H}$ (na cvičení jsme ukázali, že uvnitř permanentního magnetu míří dokonce opačným směrem.)

## Kvazistacionární přiblížení

Vzhledem ke tvaru Faradayova zákona může být potřeba použít Stokesovu větu. Vzorovým problémem je elektrické a magnetické pole solenoidu s měnícím se proudem. Máme provázané elektrické a magnetické pole, dochází k přenosu energie magnetického pole, lze očekávat relevantní Poyntingův vektor. Už neplatí $\vec{E} = -\nabla\Phi$.

## Elektromagnetické vlny

D'Alembertovo řešení 1D vlnové rovnice $u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$ – vlny se zejména šíří, vlnit se nemusejí.

**Rovinná vlna**: Víte, že $ax + by + cz =$ konst. je rovnice roviny a jakém smyslu faktor $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ popisuje rovinou vlnu? Divergence a rotace polí určených tímto faktorem se redukuje na $i\vec{k}\cdot$ resp. $i\vec{k}\times$! Příčné, ne podélné! Ve vakuu je $\vec{B} = \vec{n}/c \times \vec{E}$, v prostředí je často lepší vzít $\vec{B} = \vec{k}/\omega \times \vec{E}$. Chování vln na rozhraní určují Maxwellovy rovnice (není třeba postulovat Snellův zákon ani zákon odrazu), dvě neznámé (amplitudy odražené a prošlé vlny) vyžadují dvě rovnice (pro elektrické a magnetické pole na rozhraní).

## Ostatní

Zákony zachování mají formu rovnice kontinuity (bez nebo se zdrojem). Existuje vždy integrální i diferenciální verze. $I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S}$ nikoli $dV$.

Ještě je nutné znát **Maxwellovy rovnice**.

# Příklady

Na webu `http://utf.mff.cuni.cz/~ledvinka` jsou řešené příklady z písemek. Vlastnosti kvazistacionárních řešení (a to i takové, jako třeba moment hybnosti pole) jsou ilustrovány v úloze "Kvazistacionární pole" na stránce *Poznámky k přednáškám*, vedle najdete i úlohu používající magnetické a elektrické pole solenoidu.

Letos jsme v písemkách příliš neprocvičili plošné a křivkové integrály; zde je krátký příklad:
**Stokesova věta** pro kruh $z = 0 \wedge x^2 + y^2 < a^2$ a $\vec{A} = x^3\vec{e}_y$. Platí $\nabla \times \vec{A} = \nabla x^3 \times \vec{e}_y = 3x^2\vec{e}_z$, tedy

$$\oint_{\partial K} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{<-\pi,\pi>} [0, (a\cos s)^3, 0] \cdot \big([-a\sin s, a\cos s, 0]\, ds\big) = a^4 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 s\ ds = a^4.3\pi/4,$$

$$\oint_K \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{<0,a>\times<-\pi,\pi>} [0, 0, 3(u\cos s)^2] \cdot \big([0,0,1]\, u\, du\, ds\big) = 3 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 s\ ds \int_0^a u^3\ du = 3.\pi.a^4/4.$$

Kde jsme použili parametrizaci kružnice $\vec{x}(s) = [a\cos s, a\sin s, 0]$ a kruhu $\vec{x}(s,u) = [u\cos s, u\sin s, 0], s \in <-\pi, \pi>$, $u \in <0, a>$, tedy $d\vec{l} = (d\vec{x}/ds)\ ds = [-a\sin s, a\cos s, 0]\, ds$ a $d\vec{S} = (\partial\vec{x}/\partial u) \times (\partial\vec{x}/\partial s)\, du\, ds = [0,0,1]\, u\, du\, ds$.