

# I. Pole v blízkosti Schwarzschildovy černé díry

Budeme uvažovat slabá skalární a elektromagnetická pole na pozadí Schwarzschildovy metriky - neuvážujeme jejich vliv na gravitační pole. Jak uvidíme, zjednoduší se mnoho výpočtů, pokud použijeme Schwarzschildovy souřadnice, kde

$$ds^2 = -f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) , \quad f = 1 - \frac{2M}{r} . \quad (1)$$

## Skalární pole

Nejjednodušší a zároveň ostatní problémy ilustrující je problém řešení pohybové rovnice pro skalární pole

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \Phi = 0 . \quad (2)$$

Protože pole má skalární charakter, vlnovou rovnici lze snadno přepsat do tvaru

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left( \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Phi_{,\nu} \right)_{,\mu} = 0 , \quad (3)$$

neboli

$$-\frac{1}{f} \partial_{tt} \Phi + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 f \partial_r \Phi) + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \partial_\vartheta \Phi) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \partial_{\phi\phi} \Phi \right] = 0 . \quad (4)$$

Dále v řešení této rovnice je možné pokročit například rozvojem do sférických funkcí

$$\Phi(r, \vartheta, \phi) = \sum_{l,m} \Phi^{lm}(r) Y_{lm}(\vartheta, \phi) . \quad (5)$$

Poté dostáváme 1 + 1 hyperbolickou rovnici

$$-\partial_{tt} \Phi^{lm} + \frac{1}{r^2} (f \partial_r) (r^2 (f \partial_r) \Phi^{lm}) - \frac{f}{r^2} l(l+1) \Phi^{lm} = 0 . \quad (6)$$

Nabízí se možnost přejít k želví souřadnici  $r^*$ , která je dána vztahem  $(\partial_{r^*}) = f \partial_r$ , t.j.

$$\frac{dr^*}{dr} = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} , \quad r^* = r + 2M \ln \left( \frac{r}{2M} - 1 \right) . \quad (7)$$

Po zavedení  $\Phi^{lm} = \Psi^{lm}/r$  vyjde

$$-\partial_{tt} \Psi^{lm} + \partial_{r^* r^*} \Psi^{lm} - \frac{d^2 r}{dr^{*2}} \Psi^{lm} - \frac{f}{r^2} l(l+1) \Psi^{lm} = 0 , \quad (8)$$

tedy k potenciálu odstředivé bariéry se přidává ještě člen pocházející z transformace  $r \rightarrow r^*$ , daný výrazem  $\frac{d^2 r}{dr^{*2}} = f \frac{2M}{r^2}$ . Výsledný tvar separované rovnice je

$$-\partial_{tt} \Psi^{lm} + \partial_{r^* r^*} \Psi^{lm} - V_l(r) \Psi^{lm} = 0 , \quad (9)$$

$$V_l(r) = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M(1-s^2)}{r^3} \right] .$$

Zde je třeba dosadit  $s = 0$  spin pole, protože ale jde o vztah, kde pro jiná pole stačí jen změnit  $s$ , je vztah uveden ve větší obecnosti.

Pokud by  $V(r) \equiv 0$ , představovala by (9) jednoduchou vlnovou rovnici s řešením  $\Psi(r^*, t) = u(r^* - t) + v(r^* + t)$ , jaké popisuje šíření vln a k černé díře v oblasti mezi  $r^* = -\infty$ , kde leží horizont černé díry a  $r^* = +\infty$ , které splývá s nekonečnem  $r = +\infty$ .

## Elektromagnetické pole

Nejprve stojí za připomenutí, jak je třeba popisovat sférické vlny v klasické elektrodynamice. V průniku Lorenzovy a Coulombovy kalibrace  $\Phi = 0$ ,  $\text{div}\vec{A} = 0$  se nabízí zápis vektorového potenciálu

$$\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\vartheta \vec{e}_\vartheta + A_\phi \vec{e}_\phi . \quad (10)$$

Problém spočívá v tom, že uvedená báze pole  $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\phi$  nejsou harmonická, a tedy vlnový operátor aplikovaný na potenciál nepřejde na jednoduché vlnové rovnice pro složky  $A_r, A_\vartheta, A_\phi$ . Poměrně snadno lze uhadnout, že místo  $\vec{e}_r$  je třeba použít pole  $\vec{r} = r\vec{e}_r$ , s trochou nápovědy pak lze i zjistit, že vektorové pole  $\nabla \times \vec{r}Y_{lm}(\vartheta, \phi)$  má požadované vlastnosti, neboť

$$\Delta (\nabla \times \vec{r}Y_{lm}) = \nabla \times \Delta \vec{r}Y_{lm} = \nabla \times [(\Delta \vec{r})Y_{lm} + 2\nabla Y_{lm} + \vec{r}\Delta Y_{lm}] , \quad (11)$$

přičemž první výraz v závorce je nula identicky a druhý má nulovou rotaci. Tedy po troše úprav dostáváme

$$\Delta [A^{M,lm}(t, r) (\nabla \times \vec{r}Y_{lm})] = \left[ \Delta A^{M,lm}(t, r) - \frac{l(l+1)}{r^2} A^{M,lm}(t, r) \right] (\nabla \times \vec{r}Y_{lm}) . \quad (12)$$

Chápeme-li radiální souřadnici jako směr šíření vlny, představuje (12) TE vlnu neboť  $\nabla \times \vec{r}Y_{lm} = -\vec{r} \times \nabla Y_{lm}$  je kolmé na  $\vec{r}$ . Spíše než TE/TM označení se uvádí, že jde o složku patřící k tzv. magnetické vektorové kulové funkci (proto index  $M$  u potenciálu) Nejintuitivnější je označení této polarizace jako *axiální* kvůli jejímu chování při zrcadlení. Druhou polarizaci v uvažované kalibraci získáme z potenciálu  $\vec{A}' = \nabla \times \vec{A}$ . Pokud tuto rotaci spočteme, uvidíme, že jde o vektorové pole kombinující jak směr  $\vec{r}$  tak  $\nabla Y_{lm}$ . Tato pozorování shrneme: (i) axiální vlny jsou snáze zapsatelné a (ii) polární vlny lze získat diferenciální operací vedoucí k potenciálu duálního pole.

Na pozadí Schwarzschildovy černé díry rozšíříme výraz  $\nabla \times \vec{r}Y_{lm}$  tak, že

$$A_\mu = a^{lm}(t, r) \epsilon_{\mu\nu\rho\kappa} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^\nu \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^\rho \partial^\kappa Y_{lm} \quad (13)$$

tedy ve složkách

$$A_\mu = a^{lm}(t, r) \left[ 0, 0, \frac{1}{\sin \vartheta} \partial_\phi Y_{lm}, -\sin \vartheta \partial_\vartheta Y_{lm} \right]_\mu \quad (14)$$

Za použití obdobného vztahu (3) lze Maxwellovy rovnice pro  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  psát

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left( \sqrt{-g} F^{\mu\nu} \right)_{;\nu} = 0 . \quad (15)$$

Zatímco  $r$  a  $t$  složky této rovnice jsou splněny automaticky volbou (14), zbývající složky vedou na pohybové rovnice.

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} F^{(\vartheta)\nu}{}_{;\nu} &= \left( \sqrt{-g} F^{(\vartheta)(t)} \right)_{;t} + \left( \sqrt{-g} F^{(\vartheta)(r)} \right)_{;r} + \left( \sqrt{-g} F^{(\vartheta)(\phi)} \right)_{;\phi} \\ &= \left( r^2 \sin \vartheta \frac{1}{r^2} \frac{1}{f} a_{,t} \frac{1}{\sin \vartheta} \partial_\phi Y_{lm} \right)_{;t} + \left( r^2 \sin \vartheta \frac{1}{r^2} \frac{1}{f} (-a_{,r}) \frac{1}{\sin \vartheta} \partial_\phi Y_{lm} \right)_{;r} + \left( r^2 \sin \vartheta \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} a l(l+1) Y_{lm} \right)_{;\phi} , \end{aligned} \quad (16)$$

kde zejména bylo použito pozorování, že  $F^{(\vartheta)(\phi)} = l(l+1)Y_{lm} \sin \vartheta$ . Po vytknutí příslušných faktorů dává tedy tato složka Maxwellových rovnic

$$\sqrt{-g} F^{(\vartheta)\nu}{}_{;\nu} = - \left[ -\frac{1}{f} \partial_{tt} a^{lm} + \partial_r (f \partial_r a^{lm}) - \frac{l(l+1)}{r^2} a^{lm} \right] \partial_\phi Y_{lm} . \quad (17)$$

Podobně pro poslední složku dostaneme

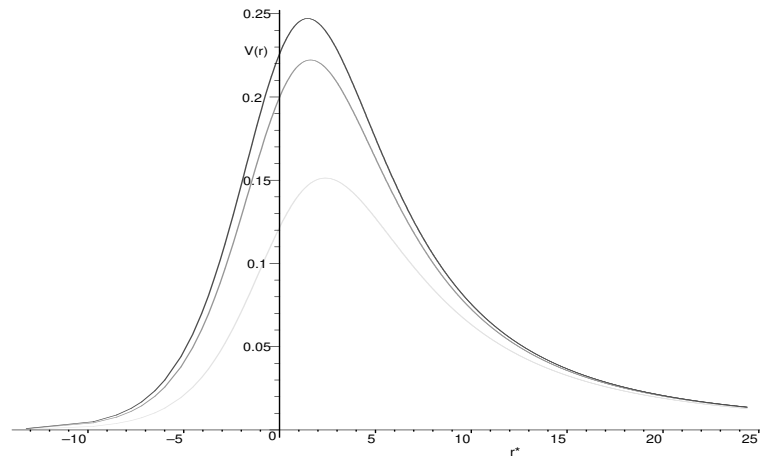
$$\sqrt{-g}F^{(\phi)\nu}{}_{;\nu} = \left[ -\frac{1}{f}\partial_{tt}a^{lm} + \partial_r(f\partial_r a^{lm}) - \frac{l(l+1)}{r^2}a^{lm} \right] \sin\vartheta\partial_\vartheta Y_{lm}. \quad (18)$$

Obě tyto rovnice představují tutéž 1+1 vlnovou rovnici pro komponentu  $a^{lm}(t, r)$ . Stejnou transformací  $r \rightarrow r^*$  dojdeme pak k rovnici (9), tentokrát ovšem  $s = 1$ , popisující vývoj axiálních perturbací nulového elektromagnetického pole na pozadí Schwarzschildovy černé díry.

Integrací duálního Maxwellova tenzoru (nebo i přímo ovšem delším výpočtem) lze nalézt tvar polárních perturbací a jejich vztah již nalezeným perturbacím axiálním.

## Gravitační perturbace

Je vhodné zmínit skutečnost, že tatáž rovnice (9) pro  $s = 2$  popisuje vývoj perturbací gravitačního pole Schwarzschildovy černé díry. Jakkoli jde o tu nejdůležitější z variant rovnice (9), její odvození nelze v rámci jedné přednášky stihnout. I s použitím počítačové algebry je třeba značné množství manipulací k převedení Einsteinových rovnic do tvaru skalární vlnové rovnice. Podobně jako u elektromagnetického pole je i zde mnohem jednodušší studovat perturbace axiální. Důležitá je ale skutečnost, že až na detaily vykazuje vývoj gravitačních perturbací stejné vlastnosti jako vývoj testovacího skalárního či elektromagnetického pole.



Obrázek 1: Průběh potenciálu pro skalární a axiální elektromagnetické a gravitační vlny s  $l = 2$  (shora dolů).

## Některé vlastnosti řešení 1+1 vlnové rovnice s potenciálem

Jak je vidět z Obrázku 1, dominantním příspěvkem k potenciálu je odstředivý člen. Mohlo by se tedy zdát, že řešení vlnové rovnice na pozadí Schwarzschildovy černé díry je jen lehce modifikovaný případ vlnové rovnice na plochem pozadí. Základní odlišnost ovšem spočívá v rozsahu souřadnice  $r^*$ . Vnitřním okrajem zde je horizont  $r^* = -\infty$  a hraniční podmínku obvykle volíme tak, že na horizontu pozorujeme jen vcházející vlny, tedy

$$(\partial_t - \partial_{r^*})\Psi^{lm}(t, r^* = -\infty) = 0. \quad (19)$$

Tato podmínka plyne z toho, že v okolí horizontu potenciál  $V_l(r)$  vymizí a pro vlnovou rovnici bez potenciálu můžeme psát  $\Psi^{lm}(t, r^* \sim -\infty) = f(t - r^*) + g(t + r^*)$ . Hraniční podmínka (19) pak říká, že od horizontu se šířící vlna  $f(t - r^*)$  vymizí (je konstantní).



## Rovnice eikonálu

Jak pro vlnovou rovnici, tak pro rovnice Maxwellovy je obvyklé hledat řešení ve tvaru součinu amplitudy a fázového faktoru (detaily viz přednáška z OTR a [MTW]). Základním výsledkem tohoto přístupu je, že nadplochy konstantní fáze mají v prvním přiblížení světelné tečné vektory  $k_\mu$  splňující rovnici geodetiky. Odsud pak lze odvodit principy geometrické optiky na křivém pozadí. Výše odvozené vztahy pro oblast závislosti řešení pak ilustrují Huygensův princip pro uvažovaný problém. Odsud také dostáváme, že čela vln se šíří rychlostí světla.

## Numerické řešení

Jakmile se vyjasnilo, za jakých podmínek lze nalézt jednoznačné řešení, jaké popisují vztahy (22), je vhodné uvést jak se takové řešení hledá numericky. Numerické řešení představuje totiž jedinou cestu jak nalézt řešení Cauchyovy úlohy, analytické totiž není známo.

Pro výklad zvolíme tzv. metodu konečných diferencí. Její podstata spočívá v nahrazení neznámé funkce (z nekonečně rozměrného prostoru funkcí dvou proměnných) sadou funkčních hodnot na mříži a nahrazení derivací v rovnicích konečnými diferencemi. To jsou výrazy, jaké známe ze zavedení derivací, přičemž ovšem opomíjíme skutečnost, že je třeba provést limitu, jenž učiní ze sečen tečny. První derivaci funkce tedy nahradíme podle předpisu

$$\frac{df(t)}{dt} \sim \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t},$$

opakovaným použitím tohoto vztahu pak dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi(t, r^*)}{\partial t^2} &\sim \frac{\Psi(t + \Delta t, r^*) - 2\Psi(t, r^*) + \Psi(t - \Delta t, r^*)}{\Delta t^2}, \\ \frac{\partial^2 \Psi(t, r^*)}{\partial r^{*2}} &\sim \frac{\Psi(t, r^* + \Delta r^*) - 2\Psi(t, r^*) + \Psi(t, r^* - \Delta r^*)}{\Delta r^{*2}}. \end{aligned} \quad (23)$$

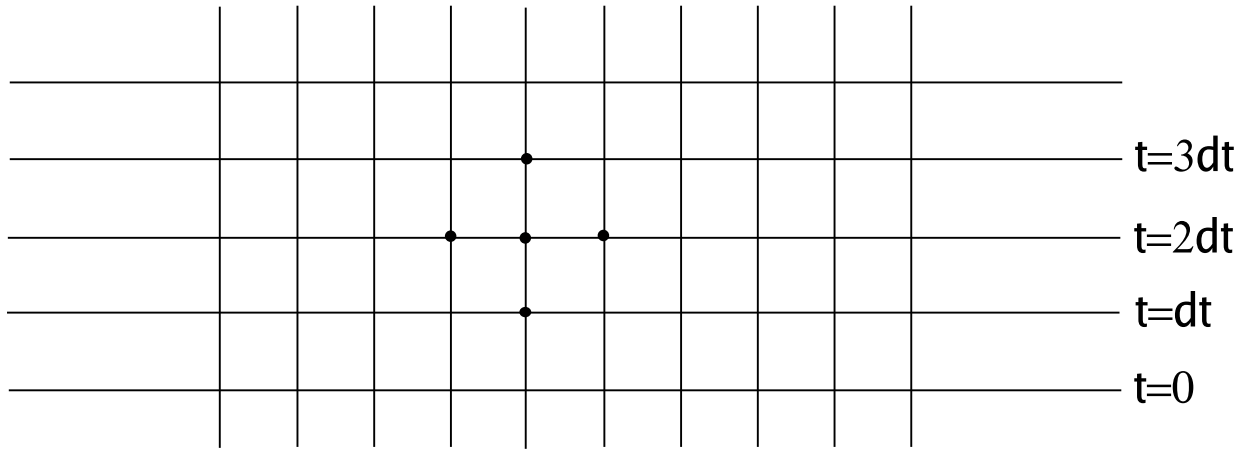
Nejprve zkusme možnost řešit s použitím tohoto přiblížení obyčejnou vlnovou rovnici bez potenciálu  $(-\partial_{tt} + \partial_{r^{*2}})\Psi = 0$  – značně to problém zjednoduší. Tato rovnice po dosazení formulí pro konečné diference přejde na tvar

$$\Psi(t + \Delta t, r^*) - 2\Psi(t, r^*) + \Psi(t - \Delta t, r^*) = \left(\frac{\Delta t}{\Delta r^*}\right)^2 [\Psi(t, r^* + \Delta r^*) - 2\Psi(t, r^*) + \Psi(t, r^* - \Delta r^*)] \quad (24)$$

Na obrázku 3 je znázorněno, že polní (t.j. platící v každém bodě prostoručasů) vlnová rovnice přejde na rovnici pro každý bod mříže. Tato diskrétní rovnice svazuje “kříž” sousedních funkčních hodnot. Tak jako u skutečné vlnové rovnice, i u její diskrétní podoby můžeme studovat disperzní relaci (numerického) řešení. Po dosazení  $\Psi(t, r^*) = \Psi e^{i(-\omega t + k r^*)}$  do vztahu (24) a při použití  $\Psi(t + \Delta t, r^*) = e^{-i\omega \Delta t}$  atp. a vztahu  $2 \cos x = e^{ix} + e^{-ix}$  přejde diskrétní verze vlnové rovnice na disperzní relaci pro numerické řešení ve tvaru

$$(1 - \cos \omega \Delta t) = \left(\frac{\Delta t}{\Delta r^*}\right)^2 (1 - \cos k \Delta r^*), \quad (25)$$

přičemž tuto rovnici je třeba chápat jako rovnici  $\omega(k)$  ve stejném smyslu jako je u evoluční rovnice časová derivace určena derivacemi prostorovými. Rovnice  $(1 - \cos \omega(k)\Delta t) = Z$  má reálné řešení  $\omega(k)$  pouze pokud  $0 \leq Z \leq 2$ . Není-li  $\omega(k)$  reálné, budeme v numerickém řešení pozorovat exponenciálně narůstající chybu, která ve velmi krátkém čase zastíní regulární část řešení. Protože  $(1 - \cos k \Delta r^*)$  samo nabývá hodnot z intervalu  $< 0, 2 >$  je nezbytné, aby poměr  $C = \left(\frac{\Delta t}{\Delta r^*}\right) \leq 1$ . Podobná podmínka je vlastní všem diskrétním metodám řešení hyperbolických PDR a říká, že **časový krok nelze zvolit větší než**



Obrázek 3: Mříž funkčních hodnot diskrétní aproximace funkce  $\Psi$  se zvýrazněnými body, které diskrétní evoluční rovnice (24) svazuje.

**dovoluje kauzální struktura** problému. Závisí-li kvůli velkému časovému kroku hodnota  $\Psi(t + \Delta t, r^*)$  i na hodnotě  $\Psi(t, r^* \pm 2\Delta r^*)$ , nemůže numerické řešení používající schéma (24), kde  $\Psi(t + \Delta t, r^*)$  závisí jen na  $\Psi(t, r^* \pm \Delta r^*)$ , dát správný výsledek. Poměr  $c\Delta t/\Delta x$  se po Courantovi, Friedrichsovi a Lewym nazývá CFL faktor.

Pro  $C < 1$  není závislost  $\omega(k)$  lineární a numerické řešení vykazuje dispersi.

Pro  $C = 1$  se uvedená metoda zjednoduší a přejde na zeměpisné (NSEW) schéma

$$\Psi_N = \Psi_W + \Psi_E - \Psi_S - \frac{1}{2}V_l \left( \frac{v-u}{2} \right) (\Psi_W + \Psi_E) , \quad (26)$$

kde se schéma zahustí použitím průměru  $\Psi_W$  a  $\Psi_E$  místo  $\Psi(u, v)$ . Pozn. Na základě tohoto schématu jsme diskutovali, jak přirozeně se hraniční podmínka podobná (19) vyklube z tohoto schématu. Podobně tato numerická metoda dobře ilustruje, že pro hyperbolický problém musí mít data charakter počáteční a nikoli okrajové podmínky.

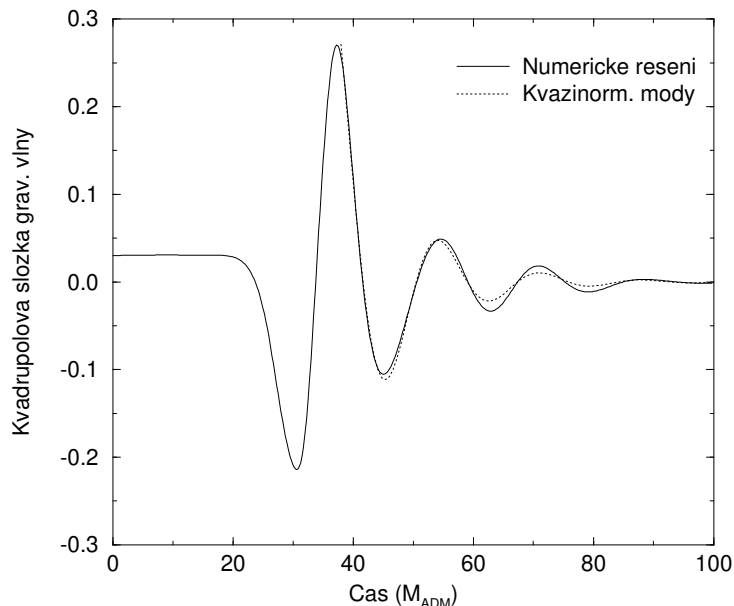
## Kvazinormální módy

Mnoho informací o vlastnostech uvažované vlnové rovnice a tedy i o chování polí či perturbací metriky na pozadí Schwarzschildovy černé díry lze získat analýzou rezonančních frekvencí. Tak jako každý jiný systém, který může opouštět energie vln, i zde má rezonanční frekvence komplexní hodnotu – imaginární složka frekvence udává rychlost tlumení, reálná periodu rezonančního signálu. To, že takovéto rezonanční frekvence představují důležitou informaci o chování pole na uvažovaném černoděrovém pozadí má ilustrovat Obrázek 4. Na něm je zachycen průběh gravitační vlny, jakou lze pozorovat po čelní srážce dvou stejných černých děr. Počínaje okamžikem, kdy dosáhne maxima, má signál charakter součtu tlumených rezonančních signálů.

Obrázek 4 také říká, jak lze základní kvazinormální frekvence nalézt. Numerickým řešením rovnice (9) pro nenulová lokalizovaná počáteční data dostaneme řešení, které bude mít podobu vlny šířící se po světelném kuželi od místa lokalizace počátečních dat následované kvazinormálními oscilacemi. Ty budou mít podobu exponenciálně tlumené harmonické vlny a z její frekvence a míry tlumení lze odečíst reálnou a imaginární složku první kvazinormální frekvence.

Předpokládáme-li harmonický časový průběh řešení (9), kdy  $\Psi \sim e^{-i\omega t}$ , přejde tato rovnice na obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu

$$\left[ \partial_{r^*r^*} + \omega^2 - V_l(r) \right] \Psi^{lm} = 0 . \quad (27)$$



Obrázek 4: Kvadrupolová složka signálu pocházejícího od čelní srážky dvou černých děr má ke konci charakter součtu tlumených rezonančních signálů. Plná čára odpovídá numerickému řešení, čárkovaná představuje vhodný součet dvou nejméně tlumených kvazिनormalních módů černé díry vzniklé srážkou (převzato z [Anninos&Brandt, 1998]).

$l, s$	$\omega$
$s = l = 0$	$0.11 - 0.1i$
$s = l = 1$	$0.24 - 0.09i$
$s = l = 2$	$0.37 - 0.09i$

Tabulka 1: Nejméně tlumené kvazिनormalní frekvence pro  $s = 0, 1, 2$ .

V oblastech  $r^* \rightarrow \pm\infty$ , kde vymizí potenciál má tato rovnice řešení  $\Psi \sim e^{\pm i\omega r^*}$ . Hodnota  $\omega$  je komplexní číslo, přičemž jeho imaginární část je záporná. To proto, aby v řešení  $\Psi \sim e^{-i\omega(r^*+t)}$  v  $r = -\infty$  a  $\Psi \sim e^{-i\omega(-r^*+t)}$  v  $r = +\infty$ , která představují odcházející vlnu byla v čase exponenciálně tlumená. Hodnoty kvazिनormalních frekvencí  $\omega$  se naleznou právě položením těchto hraničních podmínek. Problém spočívá v tom, že tato řešení, která představují odcházející v čase tlumenou vlnu směrem do nekonečna rostou, zatímco hraniční podmínka vyžaduje aby vymizela druhá část řešení, která je v okolí nekonečna silně tlumená. Je proto numericky obtížné správnou kvazिनormalní frekvenci řešením této rovnice nalézt. Existují ovšem pokročilé metody, používající analogii (27) se stacionární Schroedingerovou rovnicí a problémem rezonancí v klasické kvantové mechanice.

Nejdůležitějším výsledkem je ovšem skutečnost, že potenciál je všude kladný a nepřipouští ve smyslu Schroedingerovy rovnice (27) vázané stacionární stavy. Jejich existence by totiž znamenala existenci záporného  $\omega^2$ . To by vzhledem k předpokládané harmonické časové závislosti  $\Psi \sim e^{-i\omega t}$  znamenalo existenci exponenciálně rostoucí amplitudy pole či gravitační perturbace a tedy nestabilitu v rámci lineárního přiblížení. Proto se také článek [RW57] jmenoval *Stability of a Schwarzschild singularity*.