

Okrajové podmínky na ideálním vodiči pro vlnová řešení Maxwellových rovnic

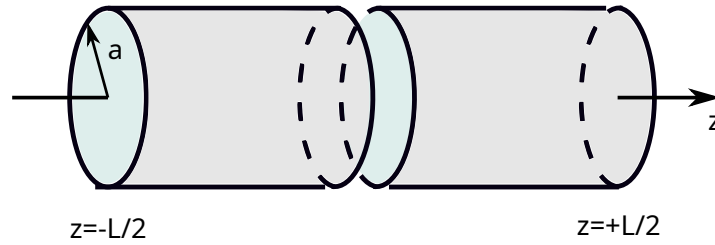
Víme, že v mnoha situacích je vlnové rovnice

$$\square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}, \quad (1)$$

$$\square \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (2)$$

kde potenciály splňují Lorenzovu kalibrační podmínku $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi = 0$. doplněna hraničními podmínkami, které určují, jaké proudy je třeba na pravé straně (1), (2). U vlnodů jsme viděli, že lze hledat polní řešení ze symetrie problému a následně proudy určit z hodnot polí na rozhraní vodič-vakuum.

Alternativně lze považovat proudové pole za neznámou veličinu a s využitím linearity problému jej pak určit právě z hraničních podmínek. Nejjednodušším a zároveň důležitým problémem je vyzařování jednoduché dipólové antény.



Obrázek 1: Uvažovaný dipól má tvar pláště válce rozděleného tenkou mezerou na dvě poloviny. Plošný proud na jeho povrchu teče ve směru osy válce.

Předpokládáme, že má tvar válce $R = a, |z| < L/2$, kde R, ϕ, z jsou válcové souřadnice. V rovině $z = 0$ bude umístěn zdroj napětí, který popíšeme později. Proudů mají harmonický průběh a vyskytují se jen na plášti válce \mathcal{S} a v souladu se symetrií je $\vec{j}^{\text{plos}} = j_z^{\text{plos}} \vec{e}_z = (2\pi a)^{-1} I(z) \vec{e}_z$. Tedy na povrchu válce je

$$A_z(R = a, \phi, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{I(z') e^{ik\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} dS, \quad \mathcal{R} = \sqrt{(z - z')^2 + 2a^2(1 - \cos \phi')}, \quad (3)$$

kde \mathcal{R} je vzdálenost mezi dvěma body na povrchu válce se souřadnicemi $R = a, \phi = 0, z$ a $R' = a, \phi', z'$ a $dS = ad\phi' dz'$. Předpokládáme, že všechny polní veličiny jsou $\sim e^{-i\omega t}$ a tak z Lorenzovy kalibrační podmínky dostaneme $c^{-2} i\omega \Phi = \partial_z A_z$ a následně pak spočteme tečnou složku elektrického pole na povrchu vodiče

$$E_z(z) = -\partial_z \Phi - \partial_t A_z = -\frac{c^2}{i\omega} \left(\partial_{zz} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} d\phi' \right] I(z') dz', \quad (4)$$

tedy (za použití $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ a $k = \omega/c$)

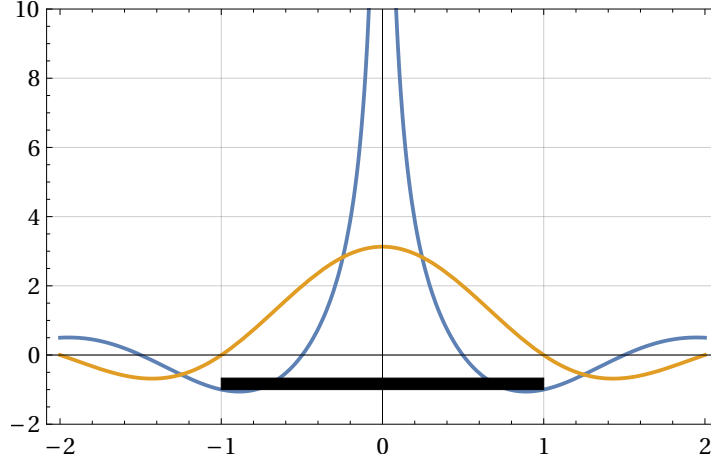
$$E_z(z) = \frac{i}{k} \frac{Z_0}{4\pi} (\partial_{zz} + k^2) \int_{-L/2}^{L/2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} d\phi' \right] I(z') dz' = \frac{i}{k} \frac{Z_0 a}{4\pi} (\partial_{zz} + k^2) \int_{-L/2}^{L/2} K(z, z') I(z') dz'. \quad (5)$$

Tato rovnice se nazývá Pocklingtonova (1897). Pokud bychom studovali, jak se chová přímý vodič v poli elektromagnetické vlny, vyžadovali bychom, aby byla nulová superpozice elektrické složky pole proudů a pole dopadající vlny. Zde se budeme zabývat situací, kdy válcový vodič představuje vysílající anténu. V jejím středu je válcová plocha přerušena a je zde umístěn zdroj napětí U . Tomu odpovídá elektrické pole $E_z(z) = -U\delta(z)$, tedy

$$(\partial_{zz} + k^2) \hat{K} I = i \frac{4\pi k}{Z_0} U \delta(z). \quad (6)$$

Zde jsme integrální operátor nahradili symbolem \hat{K} .

Funkce $K(z, z') = K(|z - z'|)$ představuje tzv. jádro integrálního operátoru. Průběh funkce $K(|z - z'|)$ je na Obr. 2.



Obrázek 2: Reálná (singulární) a imganinární část funkce $K(z - z')$ pro $L = \lambda$ a $a = L/30$. I přes singulární chování v $z = z'$, funkce $K(|z - z'|)$ patří do L_1 .

Formálně můžeme psát

$$\hat{K}I = i \frac{4\pi k}{Z_0} U (\partial_{zz} + k^2)^{-1} \delta(z). \quad (7)$$

Snadno zjistíme, že

$$(\partial_{zz} + k^2) (A \cos kz + B \sin k|z|) = 2Bk\delta(z)$$

(Zde rovnou předpokládáme symetrické rozložení proudů na anténě, bez tohoto předpokladu bychom níže museli zkoumat zvlášť řešení pro $z < 0$ a zvlášť pro $z > 0$ takže bychom dostali více rovnic, jejichž řešení by pak m.j. dalo i tuto symetrii.) Tak dostaneme Hallénovu rovnici (1938)

$$\hat{K}I = i \frac{2\pi}{Z_0} U \sin k|z| + A \cos kz. \quad (8)$$

Neznámou je i zde proud $I(z) = I(|z|)$ pro $|z| < L/2$. Je obvyklé takovéto rovnice řešit přechodem k konečněrozměrnému podprostoru funkcí, tedy položit

$$I(z) = \sum_j I_j \psi_j(z), \quad \sin k|z| = \sum_j s_j \psi_j(z), \quad \cos kz = \sum_j c_j \psi_j(z), \quad 0 < z < L/2. \quad (9)$$

Bázové funkce zvolíme Čebyševovy polynomy $T_j(s)$ posunuté z intervalu $s \in (-1, 1)$ na interval $z \in (0, L/2)$

$$\psi_j(z) = T_j \left(4 \frac{|z|}{L} - 1 \right). \quad (10)$$

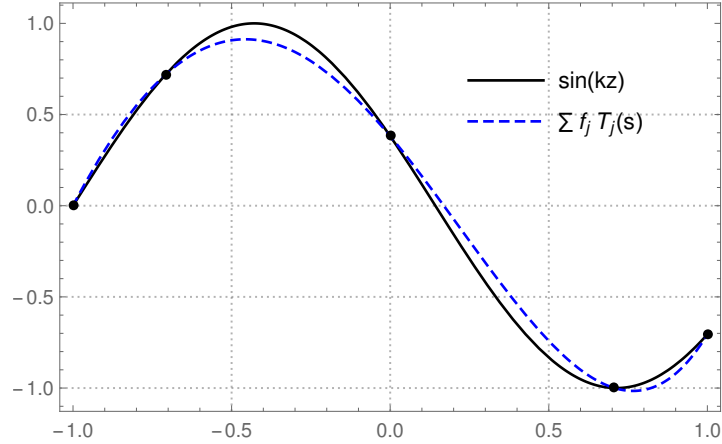
(Zlaté pravidlo aproximace funkcí na konečném intervalu: Použij Čebyševovy polynomy.) Máme-li funkci $f(s)$, pak koeficienty f_j konečné aproximace $f(s) = \sum_{j=0}^n f_j T_j(s)$ nalezneme nejsnáze diskretní cosinovou transformací (DCT) $\{f_j\} = \text{DCT}^{-1}\{f(s_k)\}$, protože $T_j(s) = \cos(j \arccos s)$ (nejkratší definice Čebyševových polynomů) dostaneme položením $s = \cos t$

$$f(\cos t) = \sum_{j=0}^n f_j \cos(jt).$$

Zde $s_k = \cos t_k$ a $t_k = \pi k/n$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ pokrývají rovnoměrně interval $\langle 0, \pi \rangle$. Následující funkce spočte $\{f_j\}$ pro danou funkci f a řád aproximace n :

```
ChebKoeffs[n_, f_] := Module[{cnodes, fc, cc},
  cnodes = N[Cos[Pi Range[0, n]/n]];

```



Obrázek 3: Hezké funkce jako je třeba $\sin ks$ na tomto obrázku dokáže Čebyševova aproximace nahradit velmi dobře. Kdybychom místo $n = 4$ vzali o jednu více, již bychom křivky na obrázku nedodlišili. Aproximační polynom se s přesnou funkcí shoduje ve vyznačených bodech.

```
fc = Map[f, cnodes];
cc = FourierDCT[fc, 1]*Sqrt[2/n];
cc[[{1, -1}]] /= 2;
cc
]
```

Jako příklad vezmeme koeficienty s_j reprezentující funkci $f(s) = \sin \frac{L}{4}k(s+1)$ pro $k = 11/L$ na Obr. 3. Uvažujme funkci

$$(\hat{K}\psi_j)(z) = \int_{-L/2}^{L/2} K(z, z')\psi_j(z')dz' \quad (11)$$

kteřou můžeme také rozvinout do báze $\{\psi_k\}$:

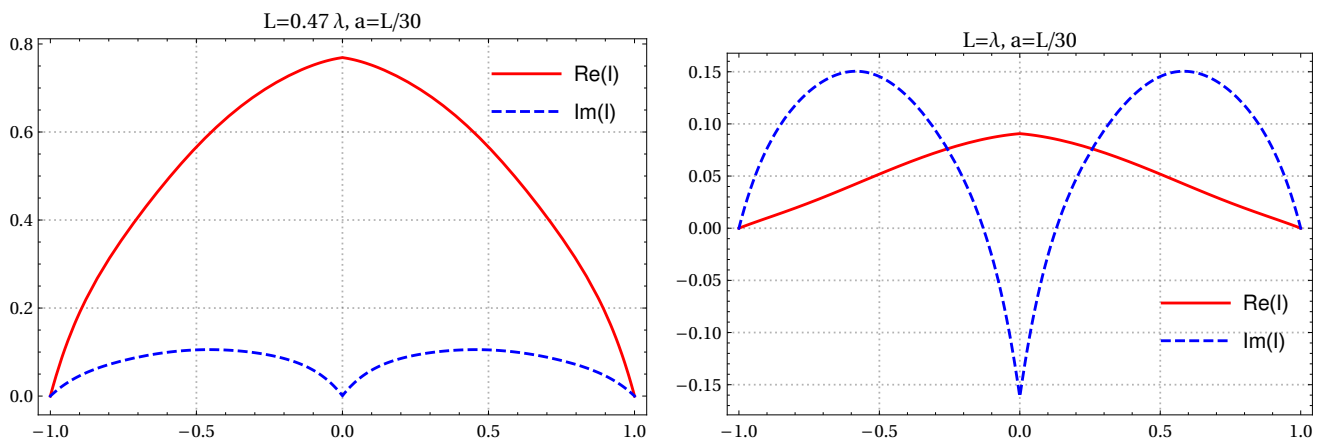
$$(\hat{K}\psi_j)(z) = \sum_k K_{kj}\psi_k(z). \quad (12)$$

Tak dostáváme maticovou aproximaci rovnice (8)

$$\sum_j K_{kj}I_j = i\frac{2\pi}{Z_0}Us_k + Ac_k. \quad (13)$$

Tuto soustavu rovnic pro neznámé I_j je ještě třeba doplnit hraniční podmínkou $I(z = L/2) = 0$ a množinu neznámých rozšířit o A .

Ukazuje se, že pro nekonečně úzkou mezeru mezi částmi dipólu je roste normálová složka elektrické intenzity na povrchu válce $\sim U/z$ a tedy dostáváme nekonečnou nábojovou hustotu. Z rovnice continuity máme $I \sim \ln|z|$. Na Obr. 4 jsme využili skutečnosti, že pro dostatečně nízké řády rozvoje se tento detail ztratí.



Obrázek 4: Průběhy proudu podél dipólové antény pro dvě frekvence a řád aproximace $n = 7$. Nižší frkvence odpovídá zhruba půlvlnnému dipólu, pro který je anténa v rezonanci, což se pozná tím, že vymizí imaginární hodnota proudu na svorkách. Vyzařovací odpor vyjde po dozazení správných jednotek 81Ω . Na vyšší frekvenci ($L = \lambda$, vpravo) se anténa chová jako kombinace odporu a kapacity.