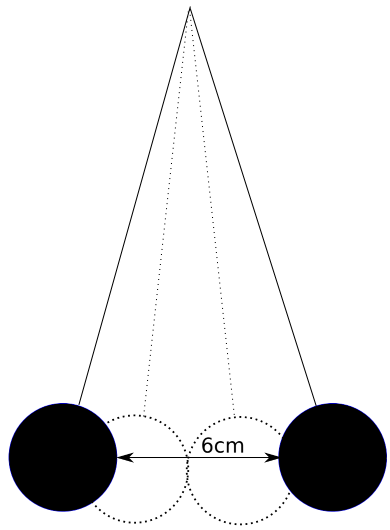
# Řešení písemné práce z Klasické elektrodynamiky

Martina Novotná

## Úloha 1

Ze dvou čtverců o straně 20 cm vystřižených z alobalu ($\rho_{\rm Al} = 2700$ kg m$^{-3}$) o tloušťce 15$\mu$m se zmačkáním vytvoří kuličky o průměru 4 cm. Ty se zavěsí na 1 m dlouhé nehmotné vlákno spojující společný závěs s body na povrchu kuliček. Po nabití obou stejným nábojem se původně dotýkající se kuličky od sebe oddálí na vzdálenost 6 cm.




V nejhrubším přiblížení lze použít Coulombův zákon, pro přesnější výpočet využijte toho, že rovnovážná poloha musí být minimem celkové energie, přičemž formulku pro elektrostatickou energii $W_{\rm el} = \frac{1}{2}\sum C_{AB}U_AU_B$ dvojice vodičů nabitých náboji $Q_A = \sum C_{AB}U_B$ známe z přednášky a přibližnou matici kapacit dvou sférických vodičů o poloměrech $a, b$ a se vzdáleností středů $d$ jsme nalezli na cvičení:

$$C_{AB} = 4\pi\epsilon_0 \begin{pmatrix} a + \frac{a^2b}{d^2} + ... & -\frac{ab}{d} - \frac{a^2b^2}{d^3} + ... \\ -\frac{ab}{d} - \frac{a^2b^2}{d^3} + ... & b + \frac{ab^2}{d^2} + ... \end{pmatrix}$$

a) Jaký náboj je na kuličkách?
b) Jaké napětí je na kuličkách?
c) V kterém místě prostoru očekáváte nejvyšší hodnotu elektrické intenzity?
d) Jaká je její velikost $E_{\rm max}$?

Pozn. Matice kapacit je výše uvedena do řádu $1/d^3$, při řešení můžete použít i méně přesnou aproximaci.

**Řešeni.** Nejprve si rozmyslíme, že vzhledem ke středu kuliček nepůsobí žádný moment síly – tíhová síla „působí" v těžišti, a elektrostatické síly efektivně působí na fiktivní náboje ležící na spojnici středů. Proto střed kuličky leží v jedné přímce s nití závěsu. Tak dostáváme, že Coulombova síla je v rovnováze s $mg\tan\alpha$, kde $2\tan\alpha = d/\sqrt{L^2 - (d/2)^2}$. Zde $d = 10\,$cm je vzdálenost středů kuliček, $L = 102\,$cm je jejich vzdálenost od místa závěsu a $m = 1.62g$. Tedy

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{d^2} \doteq \frac{mgd}{2\sqrt{L^2 - (d/2)^2}}.$$

To dá po zanedbání rozdílu mezi $\alpha \doteq \tan\,\alpha \doteq \sin\alpha = 5/102$ hodnotu **náboje**

$$Q \doteq \pm\sqrt{2\pi\epsilon_0\frac{mgd^3}{L}} \doteq 29\,\text{nC}.$$

Číselná hodnota elektrostatické síly mezi kuličkami je $\approx 780\mu$N.

Matice kapacit nabízí možnost uvážit nebodový charakter odpuzujících se obejektů. Koule uvažujeme stejné takže položíme $b = a$. Dále tato symetrie dá $Q = (C_{11} + C_{12})U$ a $W_{\rm el} = (2/2)(C_{11} + C_{12})U^2$. Nyní musíme uvážit, že při změně polohy kuliček se zachovává náboj nikoli napětí, to se mění. Proto máme

$$W = W_{\rm mech} + W_{\rm el} = 2\left(mgz + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_{11} + C_{12}}\right).$$

Dále, $z = -L\cos\alpha = -\sqrt{L^2 - (d/2)^2}$ a v uvažovaném přiblížení pak

$$C_{11} + C_{12} = 4\pi\epsilon_0\left(a - \frac{a^2}{d} + \frac{a^3}{d^2} - \frac{a^4}{d^3} + ...\right) \doteq \frac{4\pi\epsilon_0 a}{1 + a/d}.$$

Rovnováha tedy vyžaduje

$$\frac{\partial W}{\partial d} = \frac{gmd}{2\sqrt{L^2 - (d/2)^2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{d^2} = 0$$

To dává stejný výsledek jako pro dva bodové náboje. To proto, že až teprve první zanedbaný příspěvek $\sim (a/d)^4$ se odlišuje od rozvoje funkce $1/(1 + a/d)$. Konkrétně $C_{11} = 4\pi\epsilon_0(a + a^2b/d^2 + a^2b^2(a + b)/d^4 + ...)$. Proto pak do tohoto řádu přesnosti platí $C_{11} + C_{12} \doteq 4\pi\epsilon_0 a/(1 + a/d - a^4/d^4)$ a následně se podmínka rovnováhy změní

$$\frac{gmd}{2\sqrt{L^2 - (d/2)^2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{d^2}\left(1 - 4\frac{a^4}{d^4} + ...\right) = 0.$$

Tato „korekce" Coulombova zákona vede na změnu $Q$ menší než 0.1nC.

Při určení **napětí** vezmeme nalezenou hodnotu $Q$ a použijeme již zmíněný vztah $Q = (C_{11} + C_{12})U$. Podle počtu členů, které zahrneme dostaneme hodnoty

$$U = \{13,\ 16.3,\ 15.5,\ 15.66,\ 15.60\}\,\text{kV}.$$

Vidíme tedy, že zahrnutí prvních dvou členů, jednoho ve vzájemné kapacitě a jednoho v $C_{11}$, vede na významné změny v napětí.

**Nejvyšší elektrickou intenzitu** očekáváme na vnějším okraji obou kuliček, tam se intenzity sčítají. Při aproximaci dvojicí bodových nábojů vyjde

$$E_{\max} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(d+a)^2}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left(1 + \frac{a^2}{d^2} + ...\right).$$

Poslední uvedený člen rozvoje vyjde při použití přesné hodnoty elektrické intenzity superpozice fiktivních nábojů $3a^2/d^2$, v daném místě se totiž soustředí odpuzovaný elektrický náboj. To, že se náboj soustředí na odvrácené straně také vysvětluje záporné znaménko korekce Coulombova zákona $-4a^4/d^4$ výše.

Důležitá je **číselná hodnota** $E_{\max} \doteq 690\,\mathrm{V\,mm^{-1}}$ (nebo dokonce $740\,\mathrm{V\,mm^{-1}}$ podle přesnějšího vztahu). Tato hodnota se již blíží elektrické pevnosti vzduchu $2000\,\mathrm{V\,mm^{-1}}$, kdy se náboj začne z kuliček „ztrácet“ v důsledku „sršení“.

## Úloha 2

Potenciál elektrostatického pole $\Phi(x, y, z)$, kde $x, y, z$ jsou kartézské souřadnice, je dán integrálem

$$\Phi(x, y, z) = Ua^{-2}\int_{-a}^{a} \frac{w^2 dw}{\sqrt{(x-w)^2 + y^2 + z^2}}.$$

a) Jak velký je celkový náboj, který vytváří toto elektrické pole?
b) Kde je tento náboj rozložen?
Pozn. Účelem úlohy není procvičit počítání integrálů s odmocninami ve jmenovateli.
**Řešeni.** V zadaném tvaru potenciálu lze snadno rozpoznat vztah pro potenciál buzený nábojem ve volném prostoru

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dQ'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

protože výraz pod odmocninou je kvadrát vzdálenosti mezi bodem o souřadnicích $x, y, z$ a bodem zdroje

$$x' = w,\ y' = 0, z' = 0, \quad w \in (-a, a),$$

tedy náboj se nachází na úsečce $-a < x < a$ na ose $x$. Proto můžeme dále psát

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int dQ' = Ua^{-2}\int_{-a}^{a} w^2 dw$$

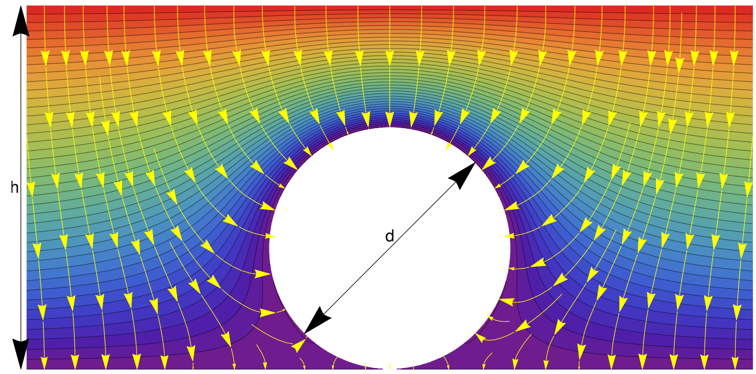
a tak je celkový náboj $Q_{\mathrm{tot}} = 8\pi\epsilon_0 Ua/3$.

## Úloha 3

Uvažujte deskový kondenzátor tvořený dvěma rovnoběžnými deskami vzdálenými $h = 13.5$cm a rozdílem potenciálu elektrod $U = 3000$V. Na jeho spodní elektrodě je položena vodivá kulička o průměru $d = 6.5$cm. Vodivé spojení kuličky a spodní elektrody způsobí, že část náboje spodní elektrody se rozmístí v podobě plošné nábojové hustoty $\sigma$ na povrchu kuličky. Výsledné elektrické pole pak kuličku zvedá silou

$$\vec{F} = \frac{1}{2}\int \sigma\vec{E}dS. \tag{1}$$

Nalezněte hodnotu této síly.
Návod: Použijte metodu fiktivních nábojů, tedy předpokládejte, že pole vně kuličky má podobu superpozice homogenního pole elektrod a pole dvou nebo tři bodových nábojů vložených do kondenzátoru s oběma uzemněnými elektrodami (nulové okrajové podmínky zjednodušují superpozici). Fiktivní náboje umístěte dovnitř kuličky blízko jejímu středu na osu symetrie.




Bohužel pole bodového náboje mezi deskami kondenzátoru není úplně jednoduché a proto použijte kalkulátor pole na adrese `http://utf.mff.cuni.cz/~ledvinka/h.html` a následujte návod:

1. náboje umístěte poblíž středu koule na její osu
2. nalezněte jejich hodnoty takové, aby
   a) nulová ekvipotenciála procházela pólem koule ($\theta = 0$), tj. $\Phi(\theta = 0) = 0$,
   b) potenciál na povrchu koule se co nejméně odchyloval od nuly. Pokud používáte dva fiktivní náboje, je rozumné požadovat $\Phi(\theta = 2\pi/3) = 0$, pro tři náboje potřebujete k té, z bodu 2a) přidat ještě dvě rovnice.

c) potenciál na povrchu koule nevybočil z intervalu ±90V.

3. Kolikrát větší je plošná nábojová hustota na pólu koule, než na deskách kondenzátoru před jejím vložením?

4. Načrtněte rozložení nábojové hustoty na kuličce.

5. Jaká síla působí na kuličku? (Použijte vztah výše. Podrobněji si původ faktoru 1/2 osvětlíme až za pár týdnů, souvisí ale s tím, že uvnitř vodiče elektrické pole vymizí a náboj na povrchu tak podléhá působení elektrického pole jen napůl.)

Jednotky intenzity elektrického pole v kalkulátoru jsou [V/cm], potenciálu ve [V], vzdálenosti se zadávají v [cm] a hodnoty nábojů v [nC]. Kromě hodnoty **síly** z bodu 5 a **poměru** plošných nábojových hustot z bodu 3 nezapomeňte přidat i **náčrt** závislosti z bodu 4 a nalezené **hodnoty** nábojů a jejich **poloh**.

V kalkulátoru máte k dispozici hodnoty následujících veličin na povrchu kuličky:

| identifikátor | definice | význam |
|---|---|---|
| `Phi` | $\Phi$ | elektrický potenciál na povrchu kuličky ve [V] |
| `theta` | $\theta$ | sférická souřadnice na povrchu kuličky, 0 na horním pólu, $\pi$ na dolním |
| `Ex` | $E_x = -\partial_x \Phi$ | x-složka elektrické intenzity ve [V/cm] |
| `Ez` | $E_z = -\partial_z \Phi$ | z-složka elektrické intenzity ve [V/cm] |
| `nx` | $n_x = \sin\theta$ | x-složka normálového vektoru ke kuličce v [cm] |
| `nz` | $n_z = \cos\theta$ | z-složka normálového vektoru ke kuličce v [cm] |
| `En` | $E_n = -\vec{n}\cdot\nabla\Phi$ | normálová složka elektrické intenzity ve [V/cm] |
| `x` | $x = R\sin\theta$ | souřadnice $x$ bodu na povrchu kuličky v [cm] |
| `z` | $z = R(1+\cos\theta)$ | souřadnice $z$ bodu na povrchu kuličky v [cm] |
| `R` | d/2 | poloměr kuličky v [cm] |
| `H` | h | vzdálenost desek v [cm] |
| `epsilon` | $\epsilon_0 = 8.854187817.10^{-12}$F m$^{-1}$ | (tedy nikoli v [nC V$^{-1}$cm$^{-1}$]) |
| `Pi` | $\pi$ | |

Soustavy lineárních rovnic umí řešit m.j. Wolfram Alpha (`http://goo.gl/FvNS2b`).

**Řešeni.** Nejprve si vysvětlíme řešení pro obecné hodnoty napětí a rozměrů. Lineární superpozice polí umožňuje psát

$$\Phi(\vec{x}; U, Q_1, Q_2, ...) = \Phi(\vec{x}; U, 0, 0, ...) + \Phi(\vec{x}; 0, Q_1, 0, ...) + \Phi(\vec{x}; 0, 0, Q_2, ...) + ...$$

a dále pak opět z linearity

$$\Phi(\vec{x}; U, Q_1, Q_2, ...) = \Phi(\vec{x}; U, 0, 0, ...) + Q_1\Phi(\vec{x}; 0, 1, 0, ...) + Q_2\Phi(\vec{x}; 0, 0, 1, ...) + ... \,.$$

Protože vyžadujeme na povrchu koule nulový potenciál, stačí v kalkulátoru nejprve zvolit nějaké polohy fiktivních nábojů a pak pro vybranou sadu bodů $\vec{x}_k,\ k = 1, 2, ...$ na povrchu koule spočíst v kalkulátoru hodnoty $\Phi(\vec{x}_k; 0, 1, 0, ...), \Phi(\vec{x}_k; 0, 0, 1, ...), ...,$ které představují prvky matice soustavy rovnice pro $Q_1, Q_2, ....$ Hodnoty $-\Phi(\vec{x}_k; U, 0, 0, ...)$ pak představují její pravou stranu. Tak získáme hodnoty nábojů. Je pak třeba zkontrolovat, že napětí na povrchu koule se v ostatních bodech, než jsou $\vec{x}_k$ neodchyluje mimo povolenou toleranci. V tom případě je potřeba zvolit jiné polohy fiktivních nábojů, míst $\vec{x}_k$. Tolerance v zadání úlohy byla zvolena tak, aby nebylo nezbytné přidávat třetí náboj.

Hodnoty nábojů velmi závisí na jejich poloze a proto neexistuje jedno „správné" řešení. Zda se to vaše povedlo, lze pro Vámi nalezené hodnoty a polohy nábojů snadno ověřit v kalkulátoru.

**Bod 2**: Konkrétně pro výše zadané hodnoty můžeme postupovat takto: Zvolíme polohu dvou nábojů blízko středu koule, např. $z_1 = 3.38$ cm a $z_2 = 3.12$ cm. Jiné poloze budou odpovídat značně jiné hodnoty nábojů, ale již ne tak odlišné tvary grafů a hodnoty nábojových hustot a síly, které v úloze zjišťujeme.

Poté studujeme superpozici polí elektrod a obou nábojů. Pro $U = 3000$V a $Q_1 = Q_2 = 0$ máme

$$\Phi(\theta = 0) \doteq 1444.44 \text{ V}, \quad \Phi(\theta = 120°) \doteq 361.111 \text{ V}$$

Pro $U = 0$ , $Q_1 = 1$ nC a $Q_2 = 0$ je

$$\Phi(\theta = 0) \doteq 186.014 \text{ V}, \quad \Phi(\theta = 120°) \doteq 112.015 \text{ V}$$

a konečně pro $U = 0$ , $Q_1 = 0$ a $Q_2 = 1$ nC je

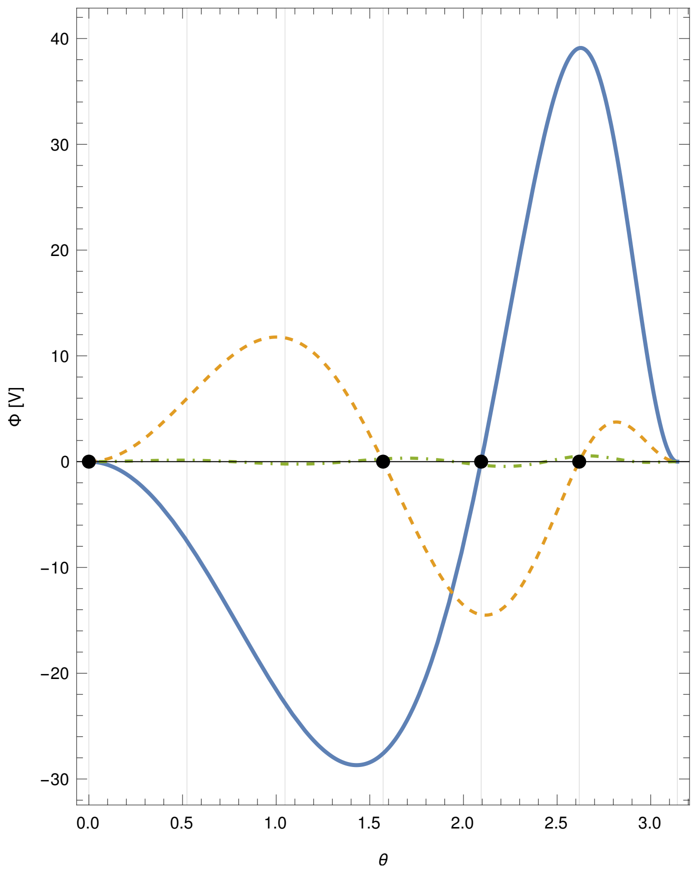
$$\Phi(\theta = 0) \doteq 162.295 \text{ V}, \quad \Phi(\theta = 120°) \doteq 116.867 \text{ V}$$

Pro vynulování hodnot potenciálu na pólu $\Phi(\theta = 0)$ a a zvolené rovnoběžce $\Phi(\theta = 120°)$ musí být zároveň:

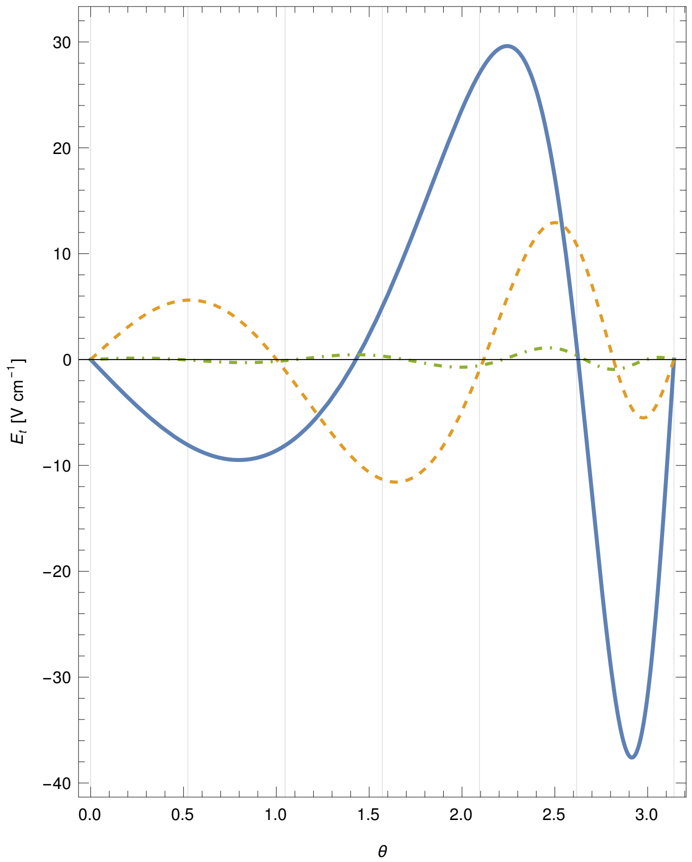
$$1444.44 + 186.014\ Q_1 + 162.295\ Q_2 = 0$$

$$361.111 + 112.015\ Q_1 + 116.867\ Q_2 = 0$$

To je soustava dvou rovnic a má řešení $Q_1 = -30.960$ nC a $Q_2 = 26.584$ nC. Maximální odchylka od nulové hodnoty je na povrchu kuličky asi 39 V (Obr. 1). Potenciál na ploše, která má být v ideálním případě povrchem vodivé kuličky, určuje i hodnotu tečné složky elektrického pole (Obr. 2).




Obr. 1. Průběh potenciálu na povrchu kuličky pro nalezené hodnoty nábojů (modrá křivka). Dva body na modré křivce, kde jsme vyžadovali splnění $\Phi = 0$ jsou zvýrazněny puntíkem. Žlutá křivka je pro řešení se třemi fiktivními náboji (nulovost potenciálu vyžadujeme ve třech bodech). Zelená odpovídá pěti fiktivním nábojům




Obr. 2. Průběh tečné složky elektrické intenzity ukazuje, že s rostoucím počtem fiktivních nábojů klesá k nule i tečná složka elektrické intenzity. Barvy křivek viz Obr. 1.

**Bod 3**: Nábojová hustota $\sigma = \epsilon_0 E_n$, přičemmž na deskách bez vložené kuličky je $E_n = U/h$. Proto pro zjištění „Kolikrát větší je plošná nábojová hustota na pólu koule, než na deskách kondenzátoru před jejím vložením“ použijeme v kalkulátoru výraz

```
>   En/(U/H)
```

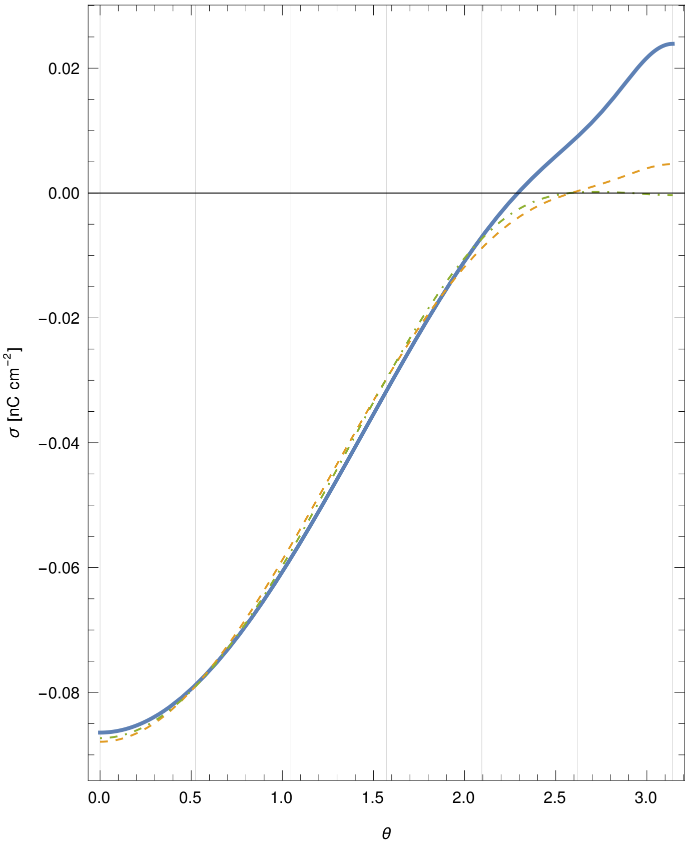
a vezmeme hodnotu pro $\theta = 0$. Pro dva fiktivní náboje vyjde $\sigma/\sigma_0 = 4.39$, pro tři $\sigma/\sigma_0 = 4.393$. (Že jde o dobrý odhad, můžeme zjistit porovnáním s hodnotou pro pět fiktivních nábojů $\sigma/\sigma_0 = 4.395$. Viz též Obr. 3.)

**Bod 4**: V kalkulátoru zadáme výraz a

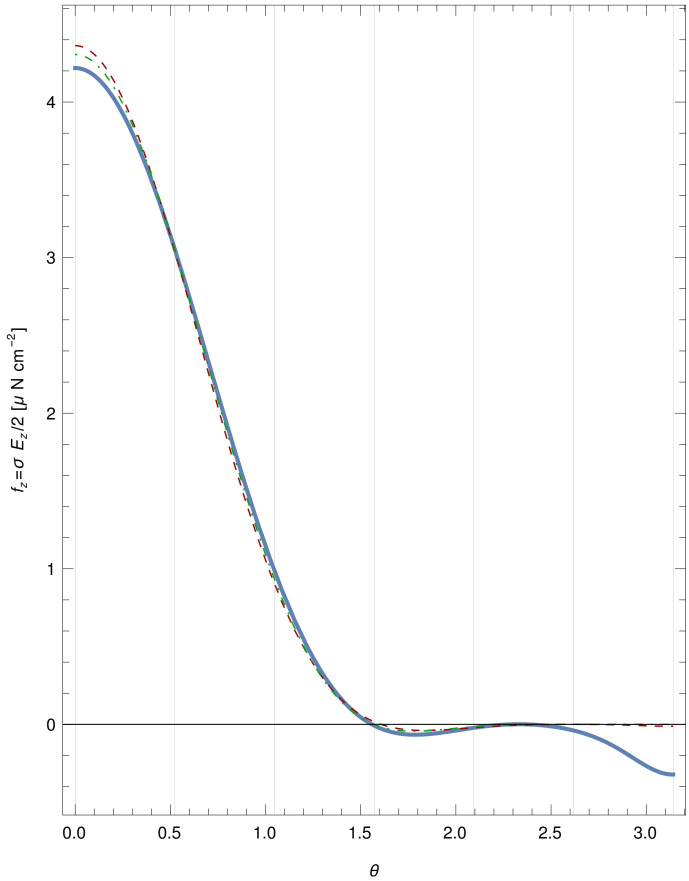
```
>   En
```

a získáme nábojovou hustotu, ovšem v jednotkách V/cm. Do jednotek SI (kde $[\sigma] = \mathrm{Cm}^{-2}$) výsledek převedeme zadáním `En*epsilon*100`

Na grafu (Obr. 3) je vidět, že většina náboje sedí na severní polokouli, nicméně ani se třemi náboji nevyjde většinou na jižním pólu $\sigma = 0$, jak by mělo. Přidání dalších fiktivních nábojů ovšem pomůže, jak je na obrázku vidět.




Obr. 3. Průběh nábojové hustoty na povrchu kuličky. Barvy křivek opět odpovídají počtu použitých fiktivních nábojů. Spolu s Obr. 2 tak vidíme, že obě složky elektrické intenzity v místě dotyku kuličky a spodní elektrody vymizí.




Obr. 4. Plošná hustota vertikální složky síly působící na náboj rozložený na povrchu kuličky $f_z = \frac{1}{2}\sigma E_z$. Je vidět, že i jen se dvěma fiktivními náboji je průběh překvapivě věrný.

**Bod 5**: Vztah pro sílu je dán v zadání. V axiální symetrii máme $dS = R^2 \sin\theta d\theta$, takže stačí do kalkulátoru zadat výraz

```
> 0.5 * epsilon*En * Ez * 2*Pi*R * R*sin(theta)
```

(vyjde v newtonech, protože centimetry v elektrické intenzitě a rozměrech kuličky se zkrátí). Viz též Obr. 4. Numerické hodnoty vyjdou 87.1, 86.8 a 87.44 $\mu$N pro 2,3 a 5 fiktivních nábojů.

Závěrečné poučení: Metoda fiktivních nábojů umožňuje poskládat výsledné pole jako superpozici řešení Laplaceovy rovnice splňujících vhodné okrajové podmínky. Co jeden fiktivní náboj, to jedna bázová funkce. Pokud bychom ale chtěli těch bodů více, brzy by se ukázalo, že tyto bázové funkce „míří stejným směrem“ a že soustava rovnic by byla katastrofálně špatně podmíněná (absolutní hodnoty fiktivních nábojů by pak o mnoho řádů převyšovaly celkový náboj na sféře). Řešení je nám známo – musíme použít mutipólový rozvoj, který představuje ortogonalizované bázové funkce.